This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

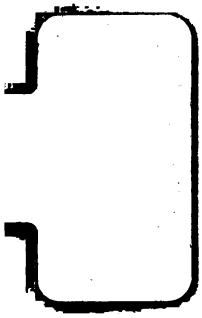
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06908099 6



Sammlung

combinatorisch-analytischer

Abhandlungen

herausgegeben

von

Carl Friedrich Hindenburg

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Zweyte Sammlung

Leipzig, bey Gerhard Fleischer dem Jüngern

1800.

ПУБЛИЧНА
БИБЛИОТЕКА
ЈОВАН ЈОВИЋ

Dem Herrn

Professor Klügel

in Halle

und

dem Herrn

Professor Pfaff

in Helmstädt

widmet

diese zweyte Sammlung

combinatorisch-analytischer Abhandlungen

zu Bezeugung

seiner Freundschaft und Hochachtung

der Herausgeber.

Vorbericht.

Ich liefere hier die zweyte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Sie sind eine Fortsetzung jener Schrift: Polynomischer Lehrsatz ꝛc., die man als die erste Sammlung ansehen kann; weshalb ich auch dafür einen Haupttitel hier habe abdrucken lassen, den man ihr vorsetzen kann.

Diese zweyte Sammlung hat gleiche Absicht mit der ersten: Vervollkommung und weitere Ausbreitung der Combinationslehre und ihrer Anwendung auf die Analysis, durch Beyhülfe der lokalen und combinatorischen Zeichen und Functionen, deren Werthe durch äusserst simple, gröſstentheils involutorische Darstellungen sich so leicht ergeben. Auch stellt die zweyte der folgenden Abhandlungen ein neues sehr merkwürdiges Beyspiel auf, wie sehr man sich den combinatorischen Formen nähert, sie auch wohl dem Inhalte, wenn schon

Sammlung

combinatorisch-analytischer

Abhandlungen

herausgegeben

von

Carl Friedrich Hindenburg

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Zweyte Sammlung

Leipzig, bey Gerhard Fleischer dem Jüngern

1800.

ГІВКУВА
ВІВІТЕ
МЕЛЛЛЮК

Dem Herrn

Professor Klügel

in Halle

und

dem Herrn

Professor Pfaff

in Helmstädt

widmet

diese zweyte Sammlung

combinatorisch-analytischer Abhandlungen

zu Bezeugung

seiner Freundschaft und Hochachtung

der Herausgeber.

Vorbericht.

Ich liefere hier die zweyte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen. Sie sind eine Fortsetzung jener Schrift: Polynomischer Lehrsatz ꝛc., die man als die erste Sammlung ansehen kann; weshalb ich auch dafür einen Haupttitel hier habe abdrucken lassen, den man ihr vorsetzen kann.

Diese zweyte Sammlung hat gleiche Absicht mit der ersten: Vervollkommung und weitere Ausbreitung der Combinationslehre und ihrer Anwendung auf die Analysis, durch Beyhülfe der lokalen und combinatorischen Zeichen und Functionen, deren Werthe durch äusserst simple, gröſstentheils involutorische Darstellungen sich so leicht ergeben. Auch stellt die zweyte der folgenden Abhandlungen ein neues sehr merkwürdiges Beyspiel auf, wie sehr man sich den combinatorischen Formen nähert, sie auch wohl dem Inhalte, wenn schon

nicht der geſchmeidigen Anordnung nach, ganz erreicht, indem man die Auflöſung der Aufgabe, durch eine weiter als gewöhnlich, getriebene Analyſe möglichſt zu ſimpliſiciren und zu erleichtern ſucht. Die dortigen Reihen der Coefficienten der einzelnen Glieder ſind nichts anders als combinatoriſche Involutionen, wo die höhern alle vorhergehende niedrigern in ſich enthalten. Nur die Subſtitutionen, durch welche ſie dort hergeleitet werden, machen ihre Auffindung weitläuftig und zum Theil beſchwerlich; das combinatoriſche Geſetz hingegen, das ſie befolgen, iſt ganz einfach und leicht. Da bei den Gliedern jener Reihen die Boſcowichſche Folge der Complexionen zum Vorſchein kommt, ſo hat das Veranlaſſung gegeben, dieſe Anordnung von neuem vorzunehmen, ſie wie die Moivriſche, rein-combinatoriſch darzuſtellen, und auf unbeſtimmte Summen zu erſtrecken

Mehrere der folgenden Aufſätze ſind vorlängſt in meinen Händen geweſen. Einige derſelben hätten ſogar in der erſten Sammlung abgedruckt werden können, wenn es der Raum verſtattet hätte. Alle würden ſie, nach den von mir getroffenen Anſtalten, längſt im Publicum erſchienen ſeyn, hätte nicht ihre Ausfertigung durch den Druck mannigfaltige Schwierigkeiten und unvorhergeſehene Hinderniſſe gefunden. Dieſe hier aufzuzählen, kann die Leſer nicht intereſſiren. Dagegen, hoffe ich, ſollen Inhalt und Ausführung der Abhandlungen die Verzögerung ihrer Mittheilung hinlänglich vergüten.

Man wird mit Vergnügen bemerkt haben, daß die combinatoriſche Analyſis immer mehr und mehr an Ausdehnung gewinnt. Auch auswärtige, der deutſchen Sprache unkundige, Leſer können ſich nun näher von ihr, nach ihrem itzigen ſehr erweiterten Zuſtande, aus zwey neuerlich erſchienenen lehrreichen, und, für die Analyſis

überhaupt, wichtigen Werken unterrichten. Herr Professor Pfaff hat nähmlich in seinen sehr gründlichen, tiefeindringenden Disquisitionibus analyticis, in der dortigen dritten Abhandlung, durch eigene Bearbeitung der combinatorischen Operationen und ihrer Anwendung, nach den von mir eingeführten lokalen und combinatorischen Zeichen, um diesen neuen Zweig der Analysis sich verdient gemacht. Auch hat Herr Doctor und Professor Kramp zu Cölln in seinem classischen Werke: Analyse des Réfractions astronomiques et terrestres (bey den daselbst im dritten Capitel neu aufgeführten algebraischen transcendentischen Functionen, facultés numériques, aus welchen so viele und wichtige Wahrheiten hergeleitet werden) die combinatorische Analysis bey seinen Forschungen, nach einer eigenen, mit seinen übrigen Zeichen mehr übereinstimmenden, Bezeichnung häufig angewendet, und dadurch ihren großen Nutzen bey verwickelten Untersuchungen aufs neue bestätiget und ausser Zweifel gesetzt. Vielleicht, daß auch nun Herrn Professor Bürmanns in Cölln vielumfassender Essai de Calcul fonctionnaire, davon zu anderer Zeit im mathematischen Archive gesprochen worden, bereits abgedruckt ist; da, einer mir zugekommenen sichern Nachricht zufolge, das Institut national zu Paris, welchem diese Schrift von dem biedern Lalande zur Prüfung vorgelegt worden war, den Druck derselben, mit rühmlicher Meldung ihres Verfassers, schon seit einiger Zeit verordnet hat. In diesem Werke wird Herr B. der vornehmlich dahin arbeitet, die Functionen-Analysis mit der combinatorischen in die engste Verbindung zu setzen, nicht ermangelt haben, diese neben jener zu empfehlen, auch mehrmals von ihr Gebrauch zu machen. „Die Functionen-Analysis (sagt dieser vortrefliche Ana„lyst in einem seiner Briefe an mich) lehrt meisterhaft „was zu thun ist, übernimmt aber, in verwickelten Fäl-

„len, nur ſelten die Ausführung; ſondern überläßt ſolche „der combinatoriſchen; wodurch alſo ein großer Theil „der ganz allgemeinen Formeln erſt wirkliche Brauchbar„keit erhält, und ſolche ſonach aufhören, bloße Spiele „des Witzes und des Scharfſinns ihrer Erfinder zu ſeyn.“

Der Wunſch, den man bereits mehrmals geäuſſert hat, ein eigenes Lehrbuch der combinatoriſchen Analyſis zu haben, welches von den erſten und einfachſten Gründen an, die Hauptſätze und ihre Anwendung wiſſenſchaftlich geordnet, faßlich vorgetragen und deutlich entwickelt enthielte; ein Lehrbuch, in welchem alles, was zur Sache gehört, beiſammen anzutreffen wäre, worinn nichts, als anderswoher bekannt, vorausgeſetzt würde, wo alſo Berufungen und Verweiſungen auf andre Schriften, ausgenommen in hiſtoriſcher und litterariſcher Rückſicht, ganz wegfielen — dieſer Wunſch iſt wahrſcheinlich bereits itzt, da ich dieſes ſchreibe, in Erfüllung gegangen. Es haben nähmlich, Herr Profeſſor Stahl in Jena und Herr Conrector Weingärtner in Erfurt, ſich ſchon ſeit einiger Zeit mit Ausfertigung eines ſolchen Werks, nach meiner Theorie und in meinen Zeichen, beſchäftigt. Ihre gründlichen Kenntniſſe und Einſichten in die Sache bürgen für den guten Erfolg dieſer Unternehmung, durch welche ſie ſich ein bleibendes Verdienſt um die Wiſſenſchaft erwerben werden, die ſie ſchon vorher, durch akademiſche Vorleſungen mehr auszubreiten und zu erweitern bemüht geweſen ſind. Beyder Schriften, wenn ſie nicht ſchon itzt abgedruckt ſind, werden gewiß in der nächſt bevorſtehenden Oſtermeſſe zu haben ſeyn.

Von mehrern Aufſätzen, die wegen Mangel an Raum in dieſer zweyten Sammlung nicht Platz finden konnten, hätte ich ſehr gern noch einen, „betreffend eine „nähere Betrachtung meiner combinatoriſchen Zeichen,

„um ſelbige in der Zeit von einer halben Stunde je„dem Analyſten leshar und verſtändlich zu ma„chen *), nebſt der Vergleichung dieſer Zeichen mit „andern, neuerlich in Vorſchlag gebrachten“ vorgelegt, wenn letzteres durch den Druck bequem hätte geſchehen können.

Es hat nähmlich Herrn Profeſſor Bürmann bey ſeiner ernſtlichen und gründlichen Beſchäftigung mit der combinatoriſchen Analyſis wünſchenswerth geſchienen, daß die Kenntniß von ihr auch im Auslande ſich baldmöglichſt verbreiten möchte. Bey der Vorarbeit zu einer künftigen Analyſe combinatoire, die Herr B. ſogleich unternahm, kam es nun wegen der lettres gothiques, deren hier in der Anmerkung erwähnt worden iſt, recht eigentlich zur Sprache. Die Folgen der dadurch veranlaßten Discuſſion ſind merkwürdig und verdienen hier nicht übergangen zu werden.

*) Noch immer hört man die Aeuſſerung, dieſe Zeichen ſeyen fremd und unverſtändlich. Vi dirò con franchezza (ſagt einer von Herrn Bürmanns ausländiſchen Correſpondenten) che non ho ſtudiato l'Analiſi combinatoria. La notazione troppo eterogenea ſempre mi faceva paura — und ein Anderer: La notation differe trop et trop peu de la notation analytique. Ces lettres gothiques (die deutſchen Buchſtaben) auxquelles je ne me puis accoutumer — La choſe peut être excellente, mais une autre notation eſt indiſpenſable. So ſchlimm dürfte es denn doch wohl um die Sache nicht ſtehen! — In dem obenangeführten Aufſatze rede ich blos vom Leſen und Verſtehen der Zeichen. Nur dabey kann man anfangs anſtoſſen. Denn, was die Ausführung derſelben nach ihren Zahlen- oder Buchſtabenwerthen anbetrift, ſo weiß man ſich entweder ſchon ſelbſt zu helfen, oder man verfährt nach angewieſenen ſehr einfachen Regeln; und dabei fällt ſogar jeder Vorwand von Schwierigkeit hinweg, weil die combinatoriſchen Operationen ihrer Natur nach leichter ſind, als die arithmetiſchen: die Zahlen ſich leichter permutiren, combiniren und variiren, als addiren, multipliciren und dividiren laſſen.

Die Unbekanntſchaft der Ausländer mit unſern deutſchen Buchſtaben, deren ich mich zu Bezeichnung der Binomial- und Polynomialcoefficienten bediene; ja, was noch mehr auf ſich hat, ihre entſchiedene Abneigung dafür, und eine gewiſſe, ich weis nicht ſoll ich ſagen natürliche oder erkünſtelte (übertrieben delicate) Perhorreſcenz derſelben, die Herr B. der ſich lange Zeit im Auslande aufgehalten hat, aus Erfahrung kennt, und die ſelbſt ein Euler durch häufigen Gebrauch dieſer Buchſtaben in ſeinen claſſiſchen ganz unentbehrlichen Werken gleichwohl nicht hat tilgen können; dies zuſammen genommen, wünſchte Herr B. (der übrigens meine Grundſätze der Bezeichnung [Erſte Samml. S. 284] vollkommen billigt) die deutſchen Buchſtaben gegen andere Zeichen auszutauſchen. Die Sache hat keine Schwierigkeit, und man kann — ſtans pede in uno — wohl zehn paſſende Vorſchläge thun, den Anſtoß aus dem Wege zu räumen, und ſich dadurch beſonders einer Nation gefällig zu bezeigen, bey welcher

la plus noble penſée
Ne peut plaire à l'eſprit, quand les yeux ſont bleſsés.

Bey dieſer Gelegenheit — wie es ſo beym Bauen zu geſchehen pflegt, wenn man einmal anfängt einzureiſſen — kamen noch zwey andere Fragen in Antrag: „ob nicht, wenn einmal die deutſchen Alphabete wegfielen, auch die Buchſtabenzeichen der übrigen lateiniſchen Alphabete (deren Bedeutſamkeit im einzelnen, ſo wie ihre Harmonie in der Zuſammenſetzung übrigens vollkommen anerkannt wären) aufzuheben, und dieſe Vortheile auf einem andern Wege zu erreichen ſeyen? „und, ob es überhaupt nicht rathſam ſey, den Zeichen „der Combinationslehre, als Grundwiſſenſchaft, „eine, von den in der Algebra und Analyſis vorkommenden

„Zeichen, die gewöhnlich Buchſtaben ſind, ganz abwei-
„chende Form zu geben?“

Was Herr Profeſſor Bürmann von ſeinem Plan d'une notation purement combinatoire, ſeinem Développement des Fonctions combinatoires, ſeiner Application aux combinaiſons arithmétiques des Séries, und ſpäterhin, von ſeinem Syſtême de Notation und ſeinen Fonctions combinatoires pour la langue univerſelle, dite Idéographie analytique (Arch. der Math. H. VIII. S. 510) mir zugeſendet hat, verdient alle Aufmerkſamkeit, zeigt großen Scharfſinn und eine gereifte Ueberſicht des Ganzen. Die kurzen und expreſſiven Zeichen, die vielleicht Herr B. ſchon itzt weiter vervollkommnet hat, können, mit ihren verſchiedenen Modificationen, hier nicht mitgetheilt werden, weil es für ſie in der Druckerey keine Typen giebt.

Ich will gleichwohl verſuchen, von der Hauptſache, der Notation combinatoire und den fonctions combinatoires, hier ſoviel im Allgemeinen beyzubringen, als, ohne Nachweiſung auf Figuren, davon zu begreifen möglich iſt; für Leſer, verſteht ſich, denen meine Zeichen ſchon bekannt ſind. Nur dieſen kann ich mich in der Kürze verſtändlich machen.

Bey mir deuten bekanntermaßen die großen lateiniſchen, gerade und ſchiefſtehenden, Buchſtaben, mit ihren beſtimmten Abzeichen, combinatoriſche Operationen, mit oder ohne Wiederholung, ſchlechthin oder zu beſtimmten Summen, claſſenweiſe oder lexikographiſch geordnet, an; die Klaſſen oder Ordnungen ſelbſt, werden durch die Folge der Buchſtaben nachgewieſen; der übergeſchriebene Diſtanzexponent macht, daß es dem Alphabete nie an Buchſtaben fehlen kann,

so viel man ihrer auch nöthig hat, auch können durch ihn bestimmte und unbestimmte Klassen und Ordnungen durcheinander ausgedrückt werden; beyzufügende Polynomial- oder Binomialcoefficienten werden durch vorgesetzte kleine oder große, im letztern Falle mit ihren Potenzexponenten versehene, deutsche Buchstaben angedeutet; die combinatorischen Operationen aber auf die im Zeiger befindlichen Elemente bezogen; die Involutionen insbesondere, diese vor allen andern sich so vortheilhaft auszeichnende Formen der Zusammensetzung, werden durch eigene besondere Zeichen dargestellt.

Herr Professor Bürmann hingegen wählt für gewisse Hauptbegriffe und Operationen: Einzelne Dinge, Reihe, Complexion, Combination, Discerption, einzelne bestimmte Grundzeichen; die, durch Veränderung der Lage; durch kleine Abstufung der ursprünglichen Form; durch Verlängerung der Grundstriche; durch Beyfügung horizontaler und verticaler Doppelstriche, oben, unten und zur Seite des Zeichens; durch ein- und übergeschriebene Zahlen und Buchstaben, weiter modificirt werden, um die, bey meinen Zeichen so eben angeführten, besondern Bestimmungen, bestimmt nachzuweisen.

Die Bürmannischen Zeichen sind sprechende; so etwas, wie meine

$$P(1,2,3\ldots n);\quad C(1,2,3\ldots n);\quad V(1,2,3\ldots n)$$

für die combinatorischen Hauptoperationen (Syst. Perm. p. XLI, 12) oder, wie meine

$$[P]_{(1,2,3\ldots n)}\qquad [C]_{(1,2,3\ldots n)}\qquad [V]_{(1,2,3\ldots n)}$$

(Arch. d. Math. H. IV. S. 416, 417 und die dort. No-

ſt) wo man auch die Klammern [.] weglaſſen kann, wenn man, wie hier, den Zeiger (1,2,3...n) überall unterſetzt; wodurch ſich die complexen Zeichen P, C, V, ſchon hinlänglich von gemeinen Buchſtaben unterſcheiden; oder endlich, wie meine

J, J, $\mathfrak{J}$, $\mathcal{J}$, mit und ohne Summenexponenten,

für Klaſſen- und lexikographiſche Involutionen (Erſte Samml. S. 176, 32) — nur ſind es keine Buchſtaben, wie bey mir, ſondern blos buchſtabenähnliche Figuren (wie das verzogene r bey Γ, dem Radical- oder Wurzelzeichen; dahin man auch meine Coefficienten und Gliederzeichen $\varkappa$, 7 rechnen, und ſolche als verzogene c, t anſehen kann).

Die einfachſten Bürmanniſchen Monogrammata, aus welchen die übrigen, durch obenerwähnte Veränderung und Beyfügung beſtimmter Abzeichen, gebildet werden, ſind

⊓ Série; ⊏ Combinaiſon; ⊐ Diſcerption;

Die Variations ſind hier den Combinaiſons, als Combinaiſons permutées, untergeordnet. Eine Menge einzelner, zuweilen auch verbundener Dinge, heißt Série; die einzelnen Dinge werden Individus (nicht choſes oder elémens) genennt, weil jenes zu viel Bedeutungen hat, dieſes zu oft vorkommt.

Noch charakteriſtiſcher wäre folgende Zeichnung:

⊓ Permutation; ⊏ Combinaiſon; ⊔ Variation; ⊐ Diſcerption

für die combinatoriſchen Hauptoperationen. Es iſt beſſer, die Combinationen und Variationen, jede für ſich zu betrachten, und nicht, jene als beſchränkte Variationen oder dieſe als erweiterte Combinationen, anzuſehen (Erſte Samml. S. 214. Note). Die Discerptionen werden

hier nicht (wie die Permutationen, Combinationen und Variationen) als eine besondere combinatorische Operation aufgeführt; sie sind von den Combinationen und Variationen nur der Betrachtungs- und Entwikkelungsart nach unterschieden; in soferne man bey diesen das Ganze als aus seinen Theilen zusammengesetzt, bey jenen, als in seine Theile zerlegt sich denkt. Meine beyden Discerptionsprobleme (Inf. Dign. p. 73. seq. und p. 129 seq. *), besonders die dortigen Vorschriften der Auflösung, zeigen das sehr deutlich. Die Série könnte man durch Klammern, runde ( ) oder eckichte [ ] welche die einzelnen Dinge eingeschlossen enthielten, darstellen. Diese wären zugleich, wegen der Aehnlichkeit, der ersten mit dem alten, der zweyten mit dem neuen, griechischen großen Sigma, sprechende Zeichen, wie die obigen; und so hätte man in allem nur vier Grundzeichen, oder, wenn man so will, nur ein Einziges, aber in vier verschiedenen Lagen, für die Form; und eben so ein Eigenes für die Materie.

Ich eröffne hier blos meine Gedanken in Absicht auf das Ganze, wie ich es jetzt kenne. Was Herr B. weiterhin für Veränderungen im Einzelnen vorgenommen hat, kann ich nicht sagen, da mir seine neusten Versuche hierüber nicht bekannt sind. Auch dürfte der Vorschlag, die gegebenen einzelnen Dinge der Série, nicht einzuschreiben, sondern, in Klammern eingeschlossen, dem combinatorischen Zeichen unterzusetzen, von Herrn B. wohl schwerlich genehmiget werden, da das Einschreiben oder Einsetzen derselben, welches die Form seiner

*) In den beyden dortigen Problemen (p. 73 und p. 129), nähmlich in dem Satze selbst, stünde statt Numerus — componendus, besser discerpendus.

Grundzeichen verſtattet, ſonſt viel Empfehlendes vor ſich hat.

Den Schriftzügen ⊓, ⊏, ⊔, ⊐, Namen zu geben, um ſolche, wie Buchſtaben, bequem damit ausſprechen und leſen zu können: ſo dürften wohl die beyden erſten Buchſtaben Pe, Co, Va, Di, als Sylben der lateiniſchen Benennungen der combinatoriſchen Operationen, die ſie bezeichnen, oder auch nur die Anfangsbuchſtaben derſelben, mit ihren bekannten gewöhnlichen Benennungen, Pe, Ce, Vav, De, die ſchicklichſten ſeyn; um ſo mehr, da die Namen dieſer Operationen ſchon vorlängſt in andere Sprachen übergegangen und allgemein im Gebrauche ſind.

Mehrere der Bürmanniſchen combinatoriſchen Zeichen haben Aehnlichkeit mit hebräiſchen Schriftzügen, mit denen ſie auch das gemein haben, daß ſie ſich, wie die Finalbuchſtaben dieſer Sprache, ohne unkenntlich zu werden, in die Länge dehnen (auch in die Höhe und Tiefe ſtrecken) laſſen; welches bey mehrern ein- über- und unterzuſchreibenden Nachweiſungen (Zeigern, Summen- und Klaſſenexponenten, und darnach beſtimmt entwickelten Complexionen) mit Nutzen geſchieht. Wegen des einfachen Baues dieſer Zeichen aus geraden Linien, die unter rechten Winkeln zuſammen ſtoßen, ließen ſich mehrere derſelben, und, wären die Einſchreibungen nicht, alle insgeſamt, ohne weitere Vorbereitung, durch Typen darſtellen, wie ſie in jeder Druckerey vorhanden ſind. Dies wird das Eckichte dieſer Zeichen entſchuldigen, bey denen Herr B. die ſchöne Form ſelbſt vermißt, aber auch zugleich richtig bemerkt: L'élégance de la ſimplicité eſt la ſeule, qui convient aux ſciences; celle d'ornement, eſt pour les arts. Daß eckichte Schriftzüge ſich weniger bequem und

geschwind schreiben lassen als runde, ist sehr wahr; aber man kann ja im Schreiben die Züge so viel abrunden, als man nur immer für bequem findet. Ich male die, zu auffallender Unterscheidung von mir gewählten, blumichten gedruckten Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$... und $\mathfrak{J}$, der lexikographischen Ordnungen und Involutionen, beym Schreiben auch nicht nach; ganz gewöhnliche Buchstaben, mit einem kleinen Striche zum Abzeichen, stellen sie mir dar.

Der Ausführbarkeit dieser Zeichen im Drucke hält sich ihr Urheber mit wenigem Kostenaufwande versichert. Dieser könnte gleichwohl gespart, und alles sogleich in Gang gebracht werden, wenn Herr B. des Einsetzens von Zahlen und Buchstaben in die Grundzeichen (das auch für die Zeiger zuweilen Schwierigkeit haben wird) sich zu begeben, und meine Abzeichen für die Buchstaben, so wie den Zeiger mit der Klammer, auch für seine Symbole beyzubehalten sich entschließen wollte. Die Klassen- und Ordnungszahlen würden hier (wie meine Distanzexponenten) über das combinatorische Zeichen gesetzt. So würde z. B.

$p-q\left[\begin{smallmatrix}r\\ \\ \end{smallmatrix}\right]_{\binom{\gamma,\ \eta,\ \iota,\ \varkappa\ldots}{3,\ 7,\ 9,\ 10\ldots}}^{m+n}$ das hier nebenstehende Symbol mit seinen Abzeichen „die (m+n)te Po„tenz, der rten Variationsclasse, zur „Summe p—q, für den Zeiger aus „den Buchstaben $\gamma, \eta, \iota, \varkappa \ldots$ nach den beigefügten „Zahlenwerthen 3, 7, 9, 10 ...! ausdrücken.“ Bey den Variationscomplexionen wären hier Widerholungen verstattet, weil das Abzeichen des Gegentheils fehlt.

Diese so eben aufgeführte symbolische Anordnung, die von der Bürmannischen (wenn auch bey ihr die Einschreibungen beybehalten werden) nicht wesentlich ver-

ſchieden iſt, gewährt, auſſer der Leichtigkeit, mit welcher ſie ſich ſogleich und ohne alle Vorbereitung im Druck ausführen läßt, noch den Vortheil, daß ſie ein bequemes Mittel an die Hand giebt, wie man auf dem kürzeſten Wege, eine der Bürmanniſchen ähnliche Darſtellung in meinen Zeichen ausdrücken kann. Man darf nehmlich nur, ſtatt des Bürmanniſchen □ mein V, mit oder ohne Klammern (nach der Erinnerung auf Seite XIII, oben) ſetzen, alle übrigen Nebenbeſtimmungen aber, wie ſie daſtehen, beibehalten. Der Unterſchied dieſer Zeichnung von der ſonſt von mir gebräuchlichen, beruht einzig und allein darauf: daß die Variationsclaſſen hier nicht, wie bey mir ſonſt, durch die Folge der Buchſtaben $A, B, C, D, A^{r-1}\ldots$ ſondern durch $V^{1}, V^{2}, V^{3}, V^{4}\ldots V^{r}$, alſo durch die Diſtanzexponenten, 1, 2, 3, 4...r über dem V (dem Zeichen der nach Variation) gewieſen werden, welche, als Claſſenexponenten, ſich hier auf die Gränze o beziehen, von welcher der Anfang zu rechnen wäre. Eben ſo wäre, bey den Combinationen, ſtatt ⊏ nun ⊂ zu ſetzen, auch würden hier, ſtatt der Combinationsclaſſen $A, B, C, D\ldots A^{r-1}$ nun $C^{1}, C^{2}, C^{3}, C^{4}\ldots C^{r}$, und ſtatt der Combinationsclaſſen zu beſtimmten Summen, deren Complexionen die Polynomialcoefficienten beyzufügen wären, oder ſtatt $a^{n}A, b^{n}B, c^{n}C, d^{n}D\ldots$ nun $c^{n}C^{1}, c^{n}C^{2}, c^{n}C^{3}, c^{n}C^{4}\ldots$ zu ſetzen ſeyn.

Das nur auf den Fall, wenn man die Bürmanniſche Darſtellung ſo nahe als möglich in meinen Zeichen nachbilden wollte; auſſerdem würde ich doch lieber, bey Uebertragung jener Zeichnung in die meinige, den eingeführten Gebrauch, die Combinations- und Variations-Claſſen durch die Folge der Buchſtaben

anzudeuten, beybehalten. Dadurch werden die Ordnungsexponenten 1, 2, 3, 4 ... über die C und V zu schreiben erspart, jedem der groſſen Claſſenbuchſtaben A, B, C, D ... wird der gleichnamige Polynomialcoefficient a, b, c, d ... beygefügt, welche wieder zu den Binomialcoefficienten ^{m}A, ^{m}B, ^{m}C, ^{m}D ... genau paſſen.

Sollen aber einmal Koſten aufgewendet werden, ſo wären unſtreitig, aus dem Ganzen gegoſſene Grundzeichen, denen ſich die weitern Modificationen bequem ein- und anfügen lieſſen, bey weitem die beſten. Freylich könnte man dazu nur dann erſt ſchreiten, wenn ſich hoffen lies, die darauf zu verwendenden anſehnlichen Koſten in der Folge mit Vortheil wieder zu erlangen.

Man könnte dabey das Aeuſſere der Charactere gefälliger machen, und das Eckichte der Formen abründen, woran ſich die Augen der analytiſchen Elégants jenes revolutionären Volkes, welchem vornehmlich zu gefallen auch dieſe literariſche Umwälzung in Vorſchlag gebracht worden iſt, doch immer ſtoſſen würden. Zugleich würde dadurch viel Zeit und Unluſt beym Setzen des Drucks erſpart werden.

Die Forderung betreffend, daß die combinatoriſchen Zeichen von allen andern analytiſchen ſich gut unterſcheiden, und daher auch Buchſtaben dafür vermieden werden möchten; ſo geht die Abſicht derſelben vornehmlich dahin, daß combinatoriſche Symbole mit andern, ohne Abbruch der Deutlichkeit und ohne alle Zweydeutigkeit ſich könnten vermiſchen laſſen. Meine $a^{n}A$, $b^{n}B$ ... $j^{n}J$, und andere combinatoriſche Functionen, thun unſtreitig der Forderung, wegen ihrer beſondern Form, vollkommen Genüge; aber freilich iſt der Abſtand derſelben von

den gewöhnlichen nicht so groß, als bey nachfolgender Gleichung Herrn Bürmanns

$$a+\frac{3+c}{17}\,\overset{v}{\underline{\overline{x}\|}}^{m+n} = 5a^3-12^3\,\overset{r}{\underline{\overline{|m+n}}}\cdot\overset{r}{\underline{\overline{|m-n}}}$$

Solche Vermischungen finden sich bey analytischen Untersuchungen häufig ein, wenn man das, was bey ihnen combinatorisch sich entwickeln läßt, auch sofort combinatorisch zeichnet. Dies zugleich als ein Beweis, wie sich etwa solche Symbole, ohne weitere Vorbereitung, im Druck ausführen lassen.

Das ist ein kurzer Abriß der Bürmannischen combinatorischen Semiotik, so weit ich sie itzt kenne, und soweit sich solche, ohne die Zeichen selbst mit ihren Modificationen figürlich vorzulegen, übersehen läßt. Diese Zeichen sind, wie Herr B. selbst erinnert, eine getreue Uebersetzung meiner Alphabete, mit denen sie daher, in Absicht auf harmonische Darstellung gleichen Schritt halten; sie sind nicht kürzer aber einfacher, und daher nach Herrn B's Bemerkung, für Ausländer und Nicht-Gelehrte leichter und faßlicher. Jene dürfen nehmlich nicht zwey ihnen verhaßte Alphabete (das deutsche, große und kleine) erst lesen und schreiben lernen, und diese, wenn sie auch zu den uncultivirten Nationen der Erde gehörten, brauchen überhaupt gar keins zu wissen, weil ihnen die Zeichen, deren Grundzüge so einfach sind, unmittelbar mit der Sache selbst vorgelegt werden können; weshalb sie auch Anspruch auf eine allgemeine combinatorische ideographirte Zeichensprache machen können. Was ich von uncultivirten, wenigstens nicht so helle wie wir erleuchteten, Nationen hier sage, dafür könnte Manchem vielleicht das Ziel zu weit gesteckt scheinen. Ich habe aber dabey folgende merkwürdige

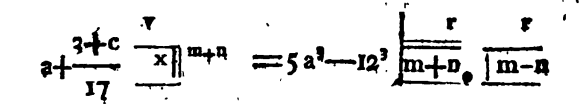
anzudeuten, beybehalten. Dadurch werden die Ordnungsexponenten 1, 2, 3, 4 ... über die C und V zu schreiben erspart, jedem der groſſen Claſſenbuchſtaben A, B, C, D ... wird der gleichnamige Polynomialcoefficient a, b, c, d ... beygefügt, welche wieder zu den Binomialcoefficienten ^{m}A, ^{m}B, ^{m}C, ^{m}D ... genau paſſen.

Sollen aber einmal Koſten aufgewendet werden, ſo wären unſtreitig, aus dem Ganzen gegoſſene Grundzeichen, denen ſich die weitern Modificationen bequem ein- und anfügen lieſſen, bey weitem die beſten. Freylich könnte man dazu nur dann erſt ſchreiten, wenn ſich hoffen lies, die darauf zu verwendenden anſehnlichen Koſten in der Folge mit Vortheil wieder zu erlangen.

Man könnte dabey das Aeuſſere der Charactere gefälliger machen, und das Eckichte der Formen abründen, woran ſich die Augen der analytiſchen Elégants jenes revolutionären Volkes, welchem vornehmlich zu gefallen auch dieſe literariſche Umwälzung in Vorſchlag gebracht worden iſt, doch immer ſtoſſen würden. Zugleich würde dadurch viel Zeit und Unluſt beym Setzen des Drucks erſpart werden.

Die Forderung betreffend, daß die combinatoriſchen Zeichen von allen andern analytiſchen ſich gut unterſcheiden, und daher auch Buchſtaben dafür vermieden werden möchten; ſo geht die Abſicht derſelben vornehmlich dahin, daß combinatoriſche Symbole mit andern, ohne Abbruch der Deutlichkeit und ohne alle Zweydeutigkeit ſich könnten vermiſchen laſſen. Meine $a^{n}A$, $b^{n}B$ ... $j^{n}J$, und andere combinatoriſche Functionen, thun unſtreitig der Forderung, wegen ihrer beſondern Form, vollkommen Genüge; aber freilich iſt der Abſtand derſelben von

den gewöhnlichen nicht so groß, als bey nachfolgender Gleichung Herrn Bürmanns



Solche Vermischungen finden sich bey analytischen Untersuchungen häufig ein, wenn man das, was bey ihnen combinatorisch sich entwickeln läßt, auch sofort combinatorisch zeichnet. Dies zugleich als ein Beweis, wie sich etwa solche Symbole, ohne weitere Vorbereitung, im Druck ausführen lassen.

Das ist ein kurzer Abriß der Bürmannischen combinatorischen Semiotik, so weit ich sie itzt kenne, und soweit sich solche, ohne die Zeichen selbst mit ihren Modificationen figürlich vorzulegen, übersehen läßt. Diese Zeichen sind, wie Herr B. selbst erinnert, eine getreue Uebersetzung meiner Alphabete, mit denen sie daher, in Absicht auf harmonische Darstellung gleichen Schritt halten; sie sind nicht kürzer aber einfacher, und daher nach Herrn B's Bemerkung, für Ausländer und Nicht-Gelehrte leichter und faßlicher. Jene dürfen nehmlich nicht zwey ihnen verhaßte Alphabete (das deutsche, große und kleine) erst lesen und schreiben lernen, und diese, wenn sie auch zu den uncultivirten Nationen der Erde gehörten, brauchen überhaupt gar keins zu wissen, weil ihnen die Zeichen, deren Grundzüge so einfach sind, unmittelbar mit der Sache selbst vorgelegt werden können; weshalb sie auch Anspruch auf eine allgemeine combinatorische ideographirte Zeichensprache machen können. Was ich von uncultivirten, wenigstens nicht so helle wie wir erleuchteten, Nationen hier sage, dafür könnte Manchem vielleicht das Ziel zu weit gesteckt scheinen. Ich habe aber dabey folgende merkwürdige

Stelle aus einem von Herrn Bürmanns Briefen (von 15. Sept. 1798) vor Augen gehabt. „Ich wünschte die Ana„lysis ausser Europa bekannt zu machen. Die Zeit ist da, wo „unsere Wissenschaften gemeiner werden wollen, und Bo„napartens Heldenzug *) wird nicht wenig dazu beytra„gen. Es scheint mir darum nöthig zu seyn, auf eine all„gemeine, systematisch einfache Bezeichnung zu dencken. „In Constantinopel, in Persien, in Peking, in Ja„pan und Indostan, sind die französischen Anfangsgrün„de der Mathematik in die Landessprache übersetzt worden. „Gott weis, welche Formen unsere meist schweren Euro„päischen Buchstaben da bekommen haben, und wie sehr „eine ohnehin schwere Wissenschaft dadurch erschwert „worden ist!“

Der Beyfall, welchen ich jenen neuvorgeschlagenen Zeichen hier ertheilt habe, kann den meinigen keinen Eintrag thun. Herr Bürmann erkennt sie für die vollkommensten schlechterdings, die sich durch Buchstaben angeben und darstellen lassen. Sie werden also immer fortdauern, um so mehr, da uns das Lesen und Schreiben der Buchstaben, so wie ihre alphabetische, so gut zu benutzende, Folge so geläufig ist. Auch kann die Einführung und der Gebrauch doppelter Zeichen gar nichts schaden; selbst die Unbequemlichkeit, die einige, die sich meiner Zeichen bereits bedienen, von daher befürchten, ist nur scheinbar, nicht reell, indem der Ueberblick einer einzigen Octavseite, worauf die Zeichen verglichen werden, den Kenner der meinigen sogleich in den Stand setzt, die andern zu lesen und zu verstehen. Es ist ja nicht das erste mal, daß bey einer Wissenschaft, gleich von ihrem Ursprunge an, doppelte Zeichen, ohne Nachtheil

*) Obgleich, wie wir nun wissen, jener Zug nach Egypten in politischer Hinsicht ganz verunglückt ist, so wird er doch für die Wissenschaften, für Künste und Gewerbe, nicht ohne ersprießliche Folgen seyn. H.

sind gebraucht worden; und so werden die beyderley combinatorischen in vollkommenem Einverständnisse mit und neben einander bestehen können. Was das künftige Schicksal dieser Symbole seyn, und ob die eine Art derselben vor der andern ein merkliches Uebergewicht im Gebrauche bekommen werde? das kann die Urheber derselben wenig kümmern, die dabey nicht auf sich, blos auf die Sache sehen — wenn nur die Wissenschaft dadurch gewinnt; und das wird sie gewiß, wenn Herr B. seinen Plan verfolgt, und das Publikum recht bald mit seiner Analyse combinatoire beschenkt.

Wegen meiner Lokalzeichen und Formeln hat sich Herr B. nicht erklärt. Der schnelle Ueberblick, den sie gewähren, indem sie die Bestandtheile des zusammenzusetzenden Ganzen kurz darstellen; der enge Zusammenhang mit den combinatorischen Functionen, durch welche sie sich bequem ausführen lassen; der Umstand, daß, wenn man ohne ihre Beyhülfe sogleich zu den combinatorischen Ausdrücken schreitet, man nicht selten in unnöthige und verdrüßliche Weitläuftigkeiten verfällt (Toepf. comb. An. S. 176 — 180; Arch. d. Math. H. VII. S. 374, 375; 10). — dies zusammengenommen, macht ihren Gebrauch wichtig, zum Theil unentbehrlich. Will man auch hier Buchstaben im eigentlichen Sinne vermeiden, so darf man nur statt meiner gewöhnlichen Reihenbuchstaben p, q, r, s, t ..., statt der Glieder- und Coefficientenzeichen γ, $\varkappa$, andere willkührliche Zeichen oder buchstabenähnliche Figuren wählen. Die Sache hat nicht die geringste Schwierigkeit.

Dieser lange Vorbericht wird hoffentlich keiner Entschuldigung bedürfen. Die vergleichende Betrachtung der Zeichen steht an ihrem rechten Orte: an der Spitze einer Schrift, bey welcher auf leichte und vielumfassende

Symbole ſo viel ankommt. Der Nutzen ſolcher Zeichen iſt ſehr groß und mannigfaltig. Sie beziehen ſich auf ganz einfache Darſtellungen, dienen zu bequemer Auffaſſung derſelben, kürzen die Vorträge, Schlüſſe und Beweiſe ab, erleichtern dadurch das Nachdenken, und ſchaffen, wie ſchon Herr Profeſſor Pfaff bemerkt hat, den weſentlichen Vortheil, daß ſie Unterſuchungen veranlaſſen, an die man ſonſt nicht ſo leicht gedacht hätte —

Ce n'eſt qu'en généraliſant les combinaiſons et en Simplifiant leurs Symboles, que l'ame diſtingue les parties d'un Tout immenſe. C'eſt en ſoulageant ainſi la memoire, que l'imagination diſpoſe de toutes ſes forces, que l'homme concentre, pour ainſi dire, l'Univers au foyer de ſon eſprit. *Eſſai de Calcul fonct. Sect. I.*

Leipzig, im April 1800.

Carl Friedrich Hindenburg.

I.

Entwickelung gebrochener Functionen, in lokal- und combinatoriſchen Zeichen dargeſtellt, in Tafeln geordnet, und mit hiſtoriſchen Erläuterungen verſehen,

von

Carl Friedrich Hindenburg.

Vorerinnerung.

Dieſe Abhandlung iſt durch die folgende des Herrn Profeſſor Trembley's veranlaßt worden. Beyde enthalten dieſelbe Aufgabe, nur unter verſchiedenen Namen und Formen, und auf verſchiedenen Wegen aufgelößt. Die Evolution gebrochener Functionen führt auf wiederkehrende Reihen, und dieſe ſind alſo ein Reſultat von jener. Wie wichtig eine verbeſſerte Theorie ſolcher Reihen, ſowohl an ſich als wegen ihres ausgebreiteten Einfluſſes auf andere Aufgaben ſey, iſt bekannt. Um ſo mehr wird die möglichſte Simplification derſelben durch die combinatoriſche Methode, in ihren darſtellenden leicht auflöslichen Zeichen, den Analyſten willkommen ſeyn.

Herrn Trembley's Verſuch einer neuen Behandlung dieſer Reihen war ſchon damals, als ich die erſte Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen [a]) abdrucken ließ, in meinen Händen. Ich war wil-

a) Dieſe Schrift iſt bisher unter dem (nur auf den größten Theil nicht auf den ganzen Inhalt derſelben paſſenden) Titel: polynomiſcher Lehrſatz ꝛc. citirt worden. Hier und in der Folge aber werde ich ſelbige immer unter den obigen an-

lens, sie daselbst einzurücken, und hatte dieserhalb schon die dortige Aufgabe (§. 215. S. 289, 290) nach meinem Verfahren und in meinen Zeichen, zur Vergleichung aufgestellt; nur die Enge des noch übrigen Raumes hinderte das Vorhaben. Beyde Abhandlungen folgen nun; die meinige, nach ihren beyden, von einander wesentlich verschiedenen, Formen: die Trembleyische, mit einigen Erläuterungen und Bemerkungen von mir versehen, die man hoffentlich nicht überflüssig finden wird.

---

1. Aufgabe. Das Entwickelungsgesetz für gebrochene Functionen

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc.})^r}{(\alpha x^{\nu} + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = P$$

in Lokal- und combinatorischen Zeichen ausgedrückt, darzustellen.

2. Auflösung. I. Der obigen, in Lokalzeichen ausgedrückten, Reihen (1)

$$p = p{\times}1x^{\mu} + p{\times}2x^{\mu+\delta} + p{\times}3x^{\mu+2\delta} + \text{etc.}$$
$$q = q{\times}1x^{\nu} + q{\times}2x^{\nu+\delta} + q{\times}3x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}$$

Potenzen

$$p^r = p^r{\times}1x^{r\mu} + p^r{\times}2x^{r\mu+\delta} + p^r{\times}3x^{r\mu+2\delta} + \text{etc.}$$
$$q^s = q^s{\times}1x^{s\nu} + q^s{\times}2x^{s\nu+\delta} + q^s{\times}3x^{s\nu+2\delta} + \text{etc.}$$

sind, nach dem polynomischen Lehrsatze, für jede r und s gegeben (Erste Samml. c. a. Abh. S. 291).

gemessenern Titel: Erste Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen anführen. Darinn ist (S. 99. Note h) Herrn Trembley's Schrift bereits erwähnt worden, die ich so eben erhalten hatte.

II. Für P nehme man eine Reihe, die mit $q^s = q^s \varkappa 1 x^{s\nu} + q^s \varkappa 2 x^{s\nu+\delta} +$ etc. multiplicirt, dieselben Potenzen von x darstellt, wie p^r. Man setze also

$$P = P\varkappa 1 x^{r\mu - s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu - s\nu + \delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \text{etc.}$$

und suche der angenommenen Reihe P und der Potenzen p^r, q^s, Coefficienten

$$P\varkappa 1, P\varkappa 2, P\varkappa 3 \ldots P\varkappa (n+1)$$
$$p^r\varkappa 1, p^r\varkappa 2, p^r\varkappa 3 \ldots p^r\varkappa (n+1)$$
$$q^s\varkappa 1, q^s\varkappa 2, q^s\varkappa 3 \ldots q^s\varkappa (n+1)$$

durch einander auszudrücken.

III. Das geschieht entweder so, daß die gesuchten Coefficienten der angenommenen Reihe P unabhängig von einander, blos durch die Coefficienten der Potenzen p^r, q^s, die durch die Coefficienten der Reihen p, q gegeben sind (1) dargestellt (directe independente Form) oder, daß zugleich folgende oder spätere Coefficienten von ihren vorhergehenden oder frühern abhängig gemacht werden (recurrirende dependente Form).

Die Auflösungsformeln beyder Formen der Hauptaufgabe (1) und einiger speciellern davon abgeleiteten, will ich in folgenden Tafeln aufstellen. So lassen sich die Formeln am bequemsten übersehen und mit einander vergleichen. Die Rechtfertigung derselben durch Beweis, nebst einigen Bemerkungen, ihre Einrichtung und den Gebrauch betreffend, sollen hinterher nachgeholt werden.

Tafel I. Auflösungsformel der Hauptaufgabe (1)

A. Recurrirende dependente Form.

α) Combinatorische Grundlage in Variationsklassen.

3, a. Für

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc.})^r}{(\alpha x^{\nu} + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = P$$

ist $P = P\varkappa 1 x^{r\mu - s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu - s\nu + \delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = \frac{p^r \varkappa 1}{q^s \varkappa 1}$

$$P\varkappa 2 = \frac{p^r \varkappa 2 - {}^2B}{q^s \varkappa 1}$$

$$P\varkappa 3 = \frac{p^r \varkappa 3 - {}^3B}{q^s \varkappa 1}$$

$$P\varkappa 4 = \frac{p^r \varkappa 4 - {}^4B}{q^s \varkappa 1}$$

$$P\varkappa(n+1) = \frac{p^r \varkappa(n+1) - {}^{n+1}B}{q^s \varkappa 1}$$

$q^s [q^s\varkappa 1, q^s\varkappa 2, q^s\varkappa 3 \ldots . q^s\varkappa(n+1)]$
$P [\ \varepsilon\ , P\varkappa 1, P\varkappa 2 \ldots . P\varkappa n\ ]$
$[\ \varepsilon\ , 1\ , 2\ \ldots .\ n\ ]$

Die Zahlen 1, 2...n im Zeiger beziehen sich auf die übersteheden Coefficienten von P und q^s, deren Verbindung mit einander die bestimmten Variationsklassen bestimmt nachweisen. Infin. Dign. p. 172. Tab. VIII; Nov. Syst. Perm. p. LX. Tab. IV. Was die Zerlegung dieser Klassen giebt, zeigt Seite 6.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

B. Directe independente Form.

α) Combinatoriſche Grundlage in Variationsklaſſen.

3, b. Für

$$\frac{p^r}{q^s} = \frac{(ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{ etc.})^r}{(\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{ etc.})^s} = P$$

iſt $P = P\varkappa 1 x^{r\mu-s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu-s\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = (q^{-s}p^r)\varkappa 1 = {}^{q^{-s}p^r}{}_2B$

$P\varkappa 2 = (q^{-s}p^r)\varkappa 2 = {}^{q^{-s}p^r}{}_3B$

$P\varkappa 3 = (q^{-s}p^r)\varkappa 3 = {}^{q^{-s}p^r}{}_4B$

$P\varkappa 4 = (q^{-s}p^r)\varkappa 4 = {}^{q^{-s}p^r}{}_5B$

. . . . . .

$P\varkappa(n+1) = (q^{-s}p^r)\varkappa(n+1) = {}^{q^{-s}p^r}{}_{n+2}B$

also P d. i.

$$q^{-s}p^r = [{}^{q^{-s}p^r}{}_2B + {}^{q^{-s}p^r}{}_3Bx^{\delta} + {}^{q^{-s}p^r}{}_4Bx^{2\delta} + \text{etc.}]x^{r\mu-s\nu}$$

$$\begin{array}{l} p^r[p^r\varkappa 1 \;,\; p^r\varkappa 2 \;,\; p^r\varkappa 3 \ldots] \\ q^{-s}[q^{-s}\varkappa 1,\; q^{-s}\varkappa 2 \;,\; q^{-s}\varkappa 3 \ldots] \\ \quad [\;1\;,\;2\;,\;3\;\ldots] \end{array}$$

Wegen der Zahlen 1, 2, 3 . . . im Zeiger, gilt dieſelbe Erinnerung wie auf Seite 4 unten. Was die Zerlegung der hier aufgeführten Variationsklaſſen giebt, zeig Seite 7.

Tafel I. Auflösungsformel der Hauptaufgabe (1)

A. Recurrirende dependente Form.

β) Zerlegte Variationsklassen (3 a) in ihre Theile.

4, a. Für die Aufgabe (1 oder 3, a)

ist $P\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r\varkappa 2 - q^s\varkappa 2.P\varkappa 1) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 3 = \left(p^r\varkappa 3 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 4 = \left(p^r\varkappa 4 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa 3 \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 4.P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P\varkappa(n+1) = \left(p^r\varkappa(n+1) - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa n \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa(n-1) \\ \vdots \qquad \vdots \\ q^s\varkappa n \;.\; P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa(n+1).P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$p\,[\,a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,,\,e\ldots.]$

$q\,[\,\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta\,,\,\varepsilon\ldots.]$

Das Zeichen — afficirt hier alle Glieder zwischen den Klammern [ ] vor welchen es steht; und $q^s\varkappa 1$ ist ein gemeinschaftlicher Divisor überhaupt in alle Glieder. Weil p^r, q^s durch p und q gegeben sind (2) so ist auch $p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$ d. i. $P\varkappa 1$ gegeben, und dadurch $P\varkappa 2$, und $P\varkappa 3$ u. s. w.

Es erhellet, daß die Recurrenz lediglich auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . beruhet; da die $p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2$ . . . und $q^s\varkappa 1$, $q^s\varkappa 2$ . . . durch p und q gegeben sind.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

B. Directe independente Form.

β) Zerlegte Variationsklaſſen (3, b) in ihre Theile.

4, b. Für die Aufgabe (1 oder 3, b)

iſt $P\varkappa 1 = (p^r q^{-s})\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r q^{-s})\varkappa 2 = \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix}$$

Alſo P d. i.

$$p^r q^{-s} = [p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1]\, x^{r\mu - s\nu} + \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + \delta} + \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 3 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 3 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \cdots + \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa (n+1) \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa n \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ p^r\varkappa n . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa (n+1) . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + n\delta}$$

$p\,[a, b, c, d, e \ldots]$

$q\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots]$

Die Coefficienten der hier untergeſetzten Scalen p, q, ſind einerley mit denen der Reihen p, q der Aufgabe (3,b). Die hieſigen Lokal-Functionen laſſen ſich leicht in combinatoriſche umſetzen. (E. S. c. a. A. S. 235, 291.)

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

5, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.}} = P$$

ist $P = P_{\varkappa 1}x^{\mu-\nu}+P_{\varkappa 2}x^{\mu-\nu+\delta}+P_{\varkappa 3}x^{\mu-\nu+2\delta}+\text{etc.}$

und $P_{\varkappa 1} = p_{\varkappa 1} : q_{\varkappa 1}$

$$P_{\varkappa 2} = (p_{\varkappa 2} - q_{\varkappa 2}.P_{\varkappa 1}) : q_{\varkappa 1}$$

$$P_{\varkappa 3} = (p_{\varkappa 3} - \left\{\begin{matrix} q_{\varkappa 2}.P_{\varkappa 2} \\ q_{\varkappa 3}.P_{\varkappa 1} \end{matrix}\right\}) : q_{\varkappa 1}$$

$$\begin{matrix} p[& a, & b, & c, & d, & e \ldots] \\ q[& \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots] \end{matrix}$$

Alles wie in (4, a) wenn man dort $r = s = 1$ sezt. Eben so hätte man (aus 3, a) $\frac{p}{q}$ durch Variationsklassen ausdrücken können. Auch kann man hier α statt $q_{\varkappa 1}$ und a, b, c ... statt $p_{\varkappa 1}$, $p_{\varkappa 2}$, $p_{\varkappa 3}$ ... sezen.

6, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{etc.}} = P$$

Haben die $P_{\varkappa 1}, P_{\varkappa 2}, P_{\varkappa 3}$ ... in allen ihren Gliedern das Zeichen +. Man darf also in (5, a) nur überall, wo — steht, das Zeichen + sezen. Auch in der Scale q, haben hier die $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ... das Zeichen + (wie in 5, a) den $-\beta, -\gamma, -\delta, -\varepsilon$ ... im Nenner entgegengesezt.

Die Auflösungsformel für das $\frac{p}{q}$ (hier in 6, a) ist unten (23) ausgeführt. Wegen der Umsetzung der Zeichen — in + (Ebend. und 21).

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

5, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.}} = pq^{-1}$$

ist $pq^{-1} = a\frac{1}{\alpha}x^{\mu-\nu}$

$$\left.\begin{array}{l} -a\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +b\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\left(\frac{a^2A}{\alpha^2}-\frac{b^2B}{\alpha^3}\right) \\ -b\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +c\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+2\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\left(\frac{a^3A}{\alpha^2}-\frac{b^3B}{\alpha^3}+\frac{c^3C}{\alpha^4}\right) \\ -b\left(\frac{a^2A}{\alpha^2}-\frac{b^2B}{\alpha^3}\right) \\ -c\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +d\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+3\delta}.$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

6, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{etc.}}$$

haben alle Glieder und ihre Theile das Zeichen + daher man hier (für 6, b) überall + statt − in den Coefficienten (in 5, b) setzen muß. Der Zeiger ist dennoch hier (wie in 5, b) derselbe; nehmlich

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

7, a. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = Q$$

ist $Q = Qx1x^{-s\nu} + Qx2x^{-s\nu+\delta} + Qx3x^{-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Qx1 = 1 : q^s x1$

$$Qx2 = -\frac{q^s Q \,{}^2B}{q^s x1} = -q^s x2 . Qx1 : q^s x1$$

$$Qx3 = -\frac{q^s Q \,{}^3B}{q^s x1} = -\left\{\begin{matrix} q^s x2 . Qx2 \\ q^s x3 . Qx1 \end{matrix}\right\} : q^s x1$$

$$Qx(n+1) = -\frac{q^s Q \,{}^{n+1}B}{q^s x1} = -\left\{\begin{matrix} q^s x2 \,.\, Qxn \\ q^s x3 . Qx(n-1) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ q^s x(n+1) . Qx1 \end{matrix}\right\} : q^s x1$$

(Der Zeiger wie in 3, a, nur Q für P
Die Scale für q wie in 4, a)

Folgt aus 3, a und 4, a, wenn man dort $P = Q$; a $= p^r x1 = 1$; $b = c = d = \text{etc} = 0 = \mu$; und $p^r x2 = p^r x3 = p^r x4 = \text{etc} = 0$ setzt.

8, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = Q$$

Darf man nur in 7, a das dortige $s = 1$ setzen. Eben das gilt auch für den Zeiger; die Scale für q ist hier mit der in 7, a übereinstimmend.

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.
B. Directe independente Form.

7, b. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = q^{-s}$$

ist $q^{-s} = q^{-s}\varkappa 1 x^{-s\nu} + q^{-s}\varkappa 2 x^{-s\nu+\delta} + \text{etc.}$

also $q^{-s} = \frac{1}{\alpha^s} x^{-s\nu}$

$$+ \frac{{}^{-s}\mathfrak{A}a^1A}{\alpha^{s+1}} x^{-s\nu+\delta}$$

$$+ \left[\frac{{}^{-s}\mathfrak{A}a^2A}{\alpha^{s+1}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{B}b^2B}{\alpha^{s+2}}\right] x^{-s\nu+2\delta}$$

$$+ \left[\frac{{}^{-s}\mathfrak{A}a^3A}{\alpha^{s+1}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{B}b^3B}{\alpha^{s+2}} + \frac{{}^{-s}\mathfrak{C}c^3C}{\alpha^{s+3}}\right] x^{-s\nu+3\delta}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Erste Samml. c. a. Abh. S. 235, für das dortige m hier — s, und für die kleinen lateinischen Buchstaben, die zugehörigen griechischen geschrieben. Obiger Werth für q^{-s} anders ausgedruckt (42).

8, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\varkappa x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = q^{-1}$$

ist $q^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu} - \frac{a^1A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta} - \left[\frac{a^2A}{\alpha^2} - \frac{b^2B}{\alpha^3}\right] x^{-\nu+2\delta}$

$$- \left[\frac{a^3A}{\alpha^2} - \frac{b^3B}{\alpha^3} + \frac{c^3C}{\alpha^4}\right] x^{-\nu+3\delta} \text{ u. s. w.}$$

Nähmlich für $s = 1$, ist ${}^{-s}\mathfrak{A} = -1$; ${}^{-s}\mathfrak{B} = +1$; ${}^{-s}\mathfrak{C} = -1$; ${}^{-s}\mathfrak{D} = +1$; ... also (8, a)

$$q^{-r}\varkappa(n+1) = -\frac{a^nA}{\alpha^2} + \frac{b^nB}{\alpha^3} - \frac{c^nC}{\alpha^4} + \frac{b^nD}{\alpha^5} - \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

9, a Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = Q$$

ist $Q = Qx1x^{-\nu} + Qx2x^{-\nu+\delta} + Qx3x^{-\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Qx1 = \frac{1}{\alpha}$

$$Qx2 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{2}B = +\beta . Qx1 : \alpha$$

$$Qx3 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{3}B = +\left\{\begin{matrix}\beta . Qx2 \\ \gamma . Qx1\end{matrix}\right\} : \alpha$$

$$Qx4 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{4}B = +\left\{\begin{matrix}\beta . Qx3 \\ \gamma . Qx2 \\ \delta . Qx1\end{matrix}\right\} : \alpha$$

Alles, wie in 7, a; nur $s=1$, und statt der dortigen — hier überall + gesetzt. Für die dortigen $qx1$, $qx2$, $qx3$, $qx4$ ... stehen hier α, β, γ, δ ... Man vergleiche (21. 22).

10, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = Q$$

ist $Q = Qx1 + Qx2x^{\delta} + Qx3x^{2\delta} + \text{etc.}$

und $Qx1 = 1$

$$Qx2 = \frac{qQ}{}{}^{2}B = \beta . Qx1$$

$$Qx3 = \frac{qQ}{}{}^{3}B = \beta . Qx2 + \gamma . Qx1$$

q [	1 ,	β ,	γ ,	δ ...]
Q [	s	$Qx1$,	$Qx2$,	$Qx3$ ...]
[	s	1 ,	2 ,	3 ...]

Man sehe (43)

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

9, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = q^{-x}$$

iſt $q^{-x} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu}$

$$+ \frac{a^1 A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta}$$

$$+ \left[\frac{a^2 A}{\alpha^2} + \frac{b^2 B}{\alpha^3}\right] x^{-\nu+2\delta}$$

$$+ \left[\frac{a^3 A}{\alpha^3} + \frac{b^3 B}{\alpha^3} + \frac{c^3 C}{\alpha^4}\right] x^{-\nu+3\delta}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Alles, wie in 8, b; nur überall das Zeichen + ſtatt — vor die Combinationsklaſſen geſetzt.

10, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = q^{-x}$$

iſt $q^{-x} = 1 + a^1 A x^{\delta} + [a^2 A + b^2 B] x^{2\delta}$

$$+ [a^3 A + b^3 B + c^3 C] x^{3\delta} + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Alles, wie in 9, b; nur $\alpha = 1$ und $\nu = 0$ geſetzt. Eine andere Darſtellung in involutoriſchen Zeichen J und $\mathfrak{J}$ in der Folge (44, 45).

Tafel I. Auflösungsformel der Hauptaufgabe (1)

A. Recurrirende dependente Form.

β) Zerlegte Variationsklassen (3 a) in ihre Theile.

4, a. Für die Aufgabe (1 oder 3, a)

ist $P\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r\varkappa 2 - q^s\varkappa 2.P\varkappa 1) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 3 = \left(p^r\varkappa 3 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$P\varkappa 4 = \left(p^r\varkappa 4 - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa 3 \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 4.P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P\varkappa(n+1) = \left(p^r\varkappa(n+1) - \left\{\begin{matrix} q^s\varkappa 2.P\varkappa n \\ q^s\varkappa 3.P\varkappa(n-1) \\ \vdots \qquad \vdots \\ q^s\varkappa n \;.\; P\varkappa 2 \\ q^s\varkappa(n+1).P\varkappa 1 \end{matrix}\right\}\right) : q^s\varkappa 1$$

$$p\,[\,a\;,\;b\;,\;c\;,\;d\;,\;e\;\ldots\,]$$

$$q\,[\,\alpha\;,\;\beta\;,\;\gamma\;,\;\delta\;,\;\varepsilon\;\ldots\,]$$

Das Zeichen — afficirt hier alle Glieder zwischen den Klammern [ ] vor welchen es steht; und $q^s\varkappa 1$ ist ein gemeinschaftlicher Divisor überhaupt in alle Glieder. Weil p^r, q^s durch p und q gegeben sind (2) so ist auch $p^r\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$ d. i. $P\varkappa 1$ gegeben, und dadurch $P\varkappa 2$, und $P\varkappa 3$ u. s. w.

Es erhellet, daß die Recurrenz lediglich auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . beruhet; da die $p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2$ . . . und $q^s\varkappa 1$, $q^s\varkappa 2$ . . . durch p und q gegeben sind.

Tafel I. Auflöſungsformel der Hauptaufgabe (1)

B. Directe independente Form.

β) Zerlegte Variationsklaſſen (3, b) in ihre Theile.

4, b. Für die Aufgabe (1 oder 3, b)

iſt $P\varkappa 1 = (p^r q^{-s})\varkappa 1 = p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1$

$$P\varkappa 2 = (p^r q^{-s})\varkappa 2 = \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix}$$

Alſo P d. i.

$$p^r q^{-s} = [p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 1]\, x^{r\mu - s\nu}$$
$$+ \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + \delta}$$
$$+ \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa 3 \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa 3 . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + 2\delta}$$
$$+ \begin{Bmatrix} p^r\varkappa 1 . q^{-s}\varkappa (n+1) \\ p^r\varkappa 2 . q^{-s}\varkappa n \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ p^r\varkappa n . q^{-s}\varkappa 2 \\ p^r\varkappa (n+1) . q^{-s}\varkappa 1 \end{Bmatrix} x^{r\mu - s\nu + n\delta}$$

p [a , b , c , d , e . . .]
q [α , β , γ , δ , ε . . .]

Die Coefficienten der hier untergeſetzten Scalen p, q, ſind einerley mit denen der Reihen p, q der Aufgabe (3, b). Die hieſigen Lokal-Functionen laſſen ſich leicht in combinatoriſche umſetzen. (E. S. c. a. A. S. 235, 291.)

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

5, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.}} = P$$

ist $P = P_{\varkappa 1}x^{\mu-\nu}+P_{\varkappa 2}x^{\mu-\nu+\delta}+P_{\varkappa 3}x^{\mu-\nu+2\delta}+\text{etc.}$

und $P_{\varkappa 1} = p_{\varkappa 1} : q_{\varkappa 1}$

$P_{\varkappa 2} = (p_{\varkappa 2} - q_{\varkappa 2}.P_{\varkappa 1}) : q_{\varkappa 1}$

$P_{\varkappa 3} = (p_{\varkappa 3} - \left\{\begin{matrix} q_{\varkappa 2}.P_{\varkappa 2} \\ q_{\varkappa 3}.P_{\varkappa 1} \end{matrix}\right\}) : q_{\varkappa 1}$

p [	a,	b,	c,	d,	e . . .]
q [	α,	β,	γ,	δ,	ε . . .]

Alles wie in (4, a) wenn man dort $r = s = 1$ sezt. Eben so hätte man (aus 3, a) $\frac{p}{q}$ durch Variationsklassen ausdrücken können. Auch kann man hier α statt $q_{\varkappa 1}$ und a, b, c . . . statt $p_{\varkappa 1}$, $p_{\varkappa 2}$, $p_{\varkappa 3}$ . . . sezen.

6, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{etc.}} = P$$

Haben die $P_{\varkappa 1}, P_{\varkappa 2}, P_{\varkappa 3}$ . . . in allen ihren Gliedern das Zeichen +. Man darf also in (5, a) nur überall, wo — steht, das Zeichen + sezen. Auch in der Scale q, haben hier die β, γ, δ, ε . . . das Zeichen + (wie in 5, a) den — β, — γ, — δ, — ε . . . im Nenner entgegengesezt.

Die Auflösungsformel für das $\frac{p}{q}$ (hier in 6, a) ist unten (23) ausgeführt. Wegen der Umsetzung der Zeichen — in + (Ebend. und 21).

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

5, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.}} = pq^{-1}$$

ist $pq^{-1} = a\frac{1}{\alpha}x^{\mu-\nu}$

$$\left.\begin{array}{l} -a\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +b\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\left(\frac{a^2A}{\alpha^2}-\frac{b^2B}{\alpha^3}\right) \\ -b\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +c\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+2\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} -a\left(\frac{a^3A}{\alpha^2}-\frac{b^3B}{\alpha^3}+\frac{c^3C}{\alpha^4}\right) \\ -b\left(\frac{a^2A}{\alpha^2}-\frac{b^2B}{\alpha^3}\right) \\ -c\frac{a^1A}{\alpha^2} \\ +d\frac{1}{\alpha} \end{array}\right\} x^{\mu-\nu+3\delta}.$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

6, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.}}{\alpha x^{\nu}-\beta x^{\nu+\delta}-\gamma x^{\nu+2\delta}-\text{etc.}}$$

haben alle Glieder und ihre Theile das Zeichen + daher man hier (für 6, b) überall + statt − in den Coefficienten (in 5, b) setzen muß. Der Zeiger ist dennoch hier (wie in 5, b) derselbe; nehmlich

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

7, a. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = Q$$

ist $Q = Q\varkappa 1 x^{-s\nu} + Q\varkappa 2 x^{-s\nu+\delta} + Q\varkappa 3 x^{-s\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Q\varkappa 1 = 1 : q^s\varkappa 1$

$$Q\varkappa 2 = -\frac{q^s Q}{q^s\varkappa 1}\,{}^2B = -q^s\varkappa 2 . Q\varkappa 1 : q^s\varkappa 1$$

$$Q\varkappa 3 = -\frac{q^s Q}{q^s\varkappa 1}\,{}^3B = -\begin{Bmatrix} q^s\varkappa 2 . Q\varkappa 2 \\ q^s\varkappa 3 . Q\varkappa 1 \end{Bmatrix} : q^s\varkappa 1$$

$$Q\varkappa(n+1) = -\frac{q^s Q}{q^s\varkappa 1}\,{}^{n+1}B = -\begin{Bmatrix} q^s\varkappa 2 . Q\varkappa n \\ q^s\varkappa 3 . Q\varkappa(n-1) \\ \vdots \\ q^s\varkappa(n+1) . Q\varkappa 1 \end{Bmatrix} : q^s\varkappa 1$$

(Der Zeiger wie in 3, a, nur Q für P
Die Scale für q wie in 4, a)

Folgt aus 3, a und 4, a, wenn man dort $P = Q$; $a = p^r\varkappa 1 = 1$; $b = c = d = \text{etc} = o = \mu$; und $p^r\varkappa 2 = p^r\varkappa 3 = p^r\varkappa 4 = \text{etc} = o$ setzt.

8, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = Q$$

Darf man nur in 7, a das dortige $s = 1$ setzen. Eben das gilt auch für den Zeiger; die Scale für q ist hier mit der in 7, a übereinstimmend.

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

7, b. Für

$$\frac{1}{q^s} = \frac{1}{(\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.})^s} = q^{-s}$$

ist $q^{-s} = q^{-s}{}_{\varkappa 1} x^{-s\nu} + q^{-s}{}_{\varkappa 2} x^{-s\nu+\delta} + \text{etc.}$

also $q^{-s} = \frac{1}{\alpha^s} x^{-s\nu}$

$$+ \frac{-s\mathfrak{A} a^1 A}{\alpha^{s+1}} x^{-s\nu+\delta}$$

$$+ \left[\frac{-s\mathfrak{A} a^2 A}{\alpha^{s+1}} + \frac{-s\mathfrak{B} b^2 B}{\alpha^{s+2}}\right] x^{-s\nu+2\delta}$$

$$+ \left[\frac{-s\mathfrak{A} a^3 A}{\alpha^{s+1}} + \frac{-s\mathfrak{B} b^3 B}{\alpha^{s+2}} + \frac{-s\mathfrak{C} c^3 C}{\alpha^{s+3}}\right] x^{-s\nu+3\delta}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Erste Samml. c. a. Abh. S. 235, für das dortige m hier — s, und für die kleinen lateinischen Buchstaben, die zugehörigen griechischen geschrieben. Obiger Werth für q^{-s} anders ausgedrückt (42).

8, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^\nu + \beta x^{\nu+\delta} + \gamma x^{\nu+2\delta} + \text{etc.}} = q^{-1}{}_1$$

ist $q^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu} - \frac{a^1 A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta} - \left[\frac{a^2 A}{\alpha^2} - \frac{b^2 B}{\alpha^3}\right] x^{-\nu+2\delta}$

$$- \left[\frac{a^3 A}{\alpha^2} - \frac{b^3 B}{\alpha^3} + \frac{c^3 C}{\alpha^4}\right] x^{-\nu+3\delta} \text{ u. s. w.}$$

Nähmlich für $s = 1$, ist $-s\mathfrak{A} = -1$; $-s\mathfrak{B} = +1$; $-s\mathfrak{C} = -1$; $-s\mathfrak{D} = +1$; ... also (8, a)

$$q^{-1}{}_{\varkappa(n+1)} = -\frac{a^n A}{\alpha^2} + \frac{b^n B}{\alpha^3} - \frac{c^n C}{\alpha^4} + \frac{b^n D}{\alpha^5} - \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

9, a Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = Q$$

ist $Q = Qx1\,x^{-\nu} + Qx2\,x^{-\nu+\delta} + Qx3\,x^{-\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $Qx1 = \frac{1}{\alpha}$

$$Qx2 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{2}B = +\beta . Qx1 : \alpha$$

$$Qx3 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{3}B = +\left\{\begin{matrix}\beta . Qx2 \\ \gamma . Qx1\end{matrix}\right\} : \alpha$$

$$Qx4 = +\frac{qQ}{\alpha}{}^{4}B = +\left\{\begin{matrix}\beta . Qx3 \\ \gamma . Qx2 \\ \delta . Qx1\end{matrix}\right\} : \alpha$$

Alles, wie in 7, a; nur $s = 1$, und statt der dortigen — hier überall + gesetzt. Für die dortigen $qx1$, $qx2$, $qx3$, $qx4$ ... stehen hier α, β, γ, δ ... Man vergleiche (21. 22).

10, a. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = Q$$

ist $Q = Qx1 + Qx2\,x^{\delta} + Qx3\,x^{2\delta} + \text{etc.}$

und $Qx1 = 1$

$$Qx2 = \frac{qQ}{}{}^{2}B = \beta . Qx1$$

$$Qx3 = \frac{qQ}{}{}^{3}B = \beta . Qx2 + \gamma . Qx1$$

$$\begin{matrix} q & [& 1 , & \beta , & \gamma , & \delta \ldots &] \\ Q & [& s & Qx1 , & Qx2 , & Qx3 \ldots &] \\ & [& s & 1 , & 2 , & 3 \ldots &] \end{matrix}$$

Man sehe (43)

Tafel II. Auflöſungsformeln für einzelne Fälle.

B. Directe independente Form.

9, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = q^{-1}$$

iſt $q^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-\nu}$

$$+ \frac{a^1 A}{\alpha^2} x^{-\nu+\delta}$$

$$+ \left[\frac{a^2 A}{\alpha^2} + \frac{b^2 B}{\alpha^3}\right] x^{-\nu+2\delta}$$

$$+ \left[\frac{a^3 A}{\alpha^3} + \frac{b^3 B}{\alpha^3} + \frac{c^3 C}{\alpha^4}\right] x^{-\nu+3\delta}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Alles, wie in 8, b; nur überall das Zeichen + ſtatt — vor die Combinationsklaſſen geſetzt.

10, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - \beta x^{\delta} - \gamma x^{2\delta} - \delta x^{3\delta} - \text{etc.}} = q^{-1}$$

iſt $q^{-1} = 1 + a^1 A x^{\delta} + [a^2 A + b^2 B] x^{2\delta}$

$$+ [a^3 A + b^3 B + c^3 C] x^{3\delta} + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Alles, wie in 9, b; nur $\alpha = 1$ und $\nu = 0$ geſetzt. Eine andere Darſtellung in involutoriſchen Zeichen J und $\mathfrak{J}$ in der Folge (44, 45).

Tafel II. Auflösungsformeln für einzelne Fälle.

A. Recurrirende dependente Form.

II, a. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \text{etc.}} = P$$

ist $P = a$
$+ (b + \beta . P\varkappa 1)\, x$
$+ (c + \beta . P\varkappa 2 + \gamma . P\varkappa 1)\, x^2$
$+ (d + \beta . P\varkappa 3 + \gamma . P\varkappa 2 + \delta . P\varkappa 1)\, x^3$
= = = = = =

Alles, wie in 6, a und in 23, wenn man dort $\mu = \nu = 0$ und $\alpha = \delta = 1$ setzt.

B. Directe independente Form.

II, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

ist $pq^{-1} = a$
$+ [b + aa^1 A]\, x$
$+ [c + ba^1 A + a(a^2 A + b^2 B)]\, x^2$
= = = = = =

$$\left(\begin{matrix} \beta , & \gamma , & \delta , & \varepsilon \ldots \\ 1 , & 2 , & 3 , & 4 \ldots \end{matrix}\right)$$

Alles, wie in 6, b, wenn man nehmlich in 5, b überall $+$ statt $-$, auch $\mu = \nu = 0$ und $\alpha = \delta = 1$ setzt, und die einzelnen Glieder von unten herauf schreibt, also hier nach ... c, b, a, wie dort nach a, b, c ... ordnet.

Eine andere Darstellung in involutorischen Zeichen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ in der Folge (45).

Tafel III. Combinatorisch-involutorische Formeln für die beyden **einfachsten Formen** (10, b und 11, b) zu unmittelbarer Vergleichung der Auflösung nach diesen Formeln mit dem Verfahren nach den **Trembleyischen** in der nächstfolgenden Abhandlung.

12. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1-ax-bx^2-cx^3-\text{ etc.}} = q^{-1}$$

ist $\frac{1}{q}\,\gamma(n+1) = q^{-1}\varkappa(n+1)x^n = j^n Jx^n = j^n \mathfrak{J}^1 x^n$

also (für n nach und nach 0, 1, 2, 3 ... gesetzt)

$$q^{-1}\begin{cases} = q^{-1}\varkappa 1 + q^{-1}\varkappa 2.x^1 + q^{-1}\varkappa 3\, x^2 + q^{-1}\varkappa 4\, x^3 + \text{etc.} \\ = 1 + j^1 Jx^1 + j^2 J\, x^2 + j^3 J x^3 + \text{etc.} \\ = 1 + j^1 \mathfrak{J}^1 x^1 + j^2 \mathfrak{J}^1 x^2 + j^3 \mathfrak{J}^1 x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots. \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots. \end{pmatrix}$$

Erhellet aus 10, b, wenn man die dortigen a^1A durch $j^1J = j^1\mathfrak{J}^1$; die $a^2A + b^2B$ durch $j^2J = j^2\mathfrak{J}^1$; die $a^3A + b^3B + c^3C$ durch $j^3J = j^3\mathfrak{J}^1$; u. s. w. (E S. c. a. A. S. 267) ausdrückt, und statt der dortigen Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ im Nenner, hier die Trembleyischen a, b, c, d... setzt. Ein **directer** Beweis der Formel für q^{-1} (49).

1) Die ^nJ sind **Classeninvolutionen**, die $^n\mathfrak{J}^1$ **lexikographische** Darstellungen von beyden und ihre Regeln (Ebendas. S. 183 f. S. 200-204; S. 280, 281).

2) Die a, b, c ... im **Zeiger** für q^{-1} haben entgegengesetzte Zeichen mit denen im **Nenner** q für den Bruch $\frac{1}{q}$. Wäre des Bruches Nenner $1-ax+bx^2-cx^3+dx^4 \ldots$ so müßte man dafür im Zeiger $+a, -b, +c, -d \ldots$ setzen. Mit dem Zeiger verhält sich's wegen der Zeichen, wie mit der Beziehungsscale (27).

Ein Paar Beyspiele zur Erläuterung (60, 61).

Tafel III. Combinatorisch-involutorische Formeln für die beyden einfachsten Formen ꝛc. s. Seite 15

13. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

$$\text{ist } \frac{p}{q} \mathcal{T}(n+1) \begin{cases} = (pq^{-1}) \varkappa (n+1)\, x^n \\ = (\alpha j^n J + \beta j^{n-1} J \ldots + \overset{n-1}{\alpha}\, j^1 J + \overset{n}{\alpha})\, x^n \\ = (\alpha j^n \mathfrak{J} + \beta j^{n-1} \mathfrak{J} \ldots + \overset{n-1}{\alpha}\, j^1 \mathfrak{J} + \overset{n}{\alpha})\, x^n \end{cases}$$

Daraus (für n nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 ... gesetzt) wird $pq^{-1} = (pq^{-1}) \varkappa 1 + (pq^{-1}) \varkappa 2.x^1 + (pq^{-1}) \varkappa 3.x^2 + \text{etc.}$

das ist

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & \alpha \\ & + (\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta)\, x \\ & + (\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma)\, x^2 \\ & + (\alpha j^3 \mathfrak{J} + \beta j^2 \mathfrak{J} + \gamma j^1 \mathfrak{J} + \delta)\, x^3 \\ & + (\alpha j^4 \mathfrak{J} + \beta j^3 \mathfrak{J} + \gamma j^2 \mathfrak{J} + \delta j^1 \mathfrak{J} + \varepsilon)\, x^4 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

statt der $j^1 \mathfrak{J}$, $j^2 \mathfrak{J}$, $j^3 \mathfrak{J}$ ... in pq^{-1} kann man auch $j^1 J$, $j^2 J$, $j^3 J$ ... setzen, wie auch aus dem obenstehenden allgemeinen Gliede $\frac{p}{q} \mathcal{T}(n+1)$ zu ersehen.

Alles folgt hier eben so aus (11, b) wie 12 aus (10, b) nach der Nachweisung in (12). Statt der a, b, c ... β, γ, δ ... in (11, b) stehen hier α, β, γ ... a, b, c ... wie bey Herrn Trembley. Ein directer Beweis der Formel für pq^{-1} (50).

Die Erinnerungen 1) 2) in (12) wegen der ^nJ und $^n\mathfrak{J}$ und wegen der entgegengesetzten Vorzeichen der a, b, c, d ... im Nenner und Zeiger, gelten auch hier.

Einige Beyspiele zur Erläuterung (62 — 65).

Tafel IV. Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung der combinatoriſchen Involution $^{n}\mathfrak{J}_{(1,2,3,4,5\ldots)}^{(a,b,c,d,e\ldots)}$

14.		15.
etc	a|a|a|a|a|a|a	$a^{n-1}[a]$
	a|a|a|a|a|b	$a^{n-2}[b]$
	a|a|a|a|c	$a^{n-3}[c]$
	a|a|a|b|b	$a^{n-4}[b,d]$
	a|a|a|d	$a^{n-5}[bc,e]$
	a|a|b|c	$a^{n-6}[b^3,bd,c^2,f]$
	a|a|e	$a^{n-7}[b^2c,be,cd,g]$
etc.	a|b|b|b	$a^{n-8}[b^4,b^2d,bc^2,bf,ce,d^2,h]$
	a|b|d	$a^{n-9}[b^3c,b^2e,bcd,bg,c^3,cf$
	a|c|c	$de,i]$
	a|f	$a^{n-10}[b^5,b^3d,b^2c^2,b^2f,bce,bd^2,bh,$
	b|b|c	$c^2d,cg,df,e^2,k]$
	b|e	
	c|d	
	g	
etc.	etc.	u. ſ. w. ſ.

Beyde Anordnungen ſind lexikographiſch und rein-combinatoriſch. Die erſte (14) geht von niedrigern Involutionen auf die nächſt höhern fort, und umgekehrt; die zweyte (15) enthält die Complexionen zur unbeſtimmten Summe n allgemein. Beyder Darſtellungen gehören zu den Involutionen der vollkommenſten Art.

Von beyden (E. S. c. a. A. an mehrern Orten); namentlich von der erſten (daſ. S. 183-185); von der zweyten (S. 199-203); ein Paar einzelne Fälle, für n = 10 und wenn der Zeiger mit a, b, c, d abbricht (S. 280, 281). Wegen der Benennung: Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung, unten (74).

Von der allgemeinen Claſſeninvolution $^{n}\mathfrak{J}$, aus Complexionen zur unbeſtimmten Summe n (S. 204-206).

Tafel IV. Boscowich-Hindenburgische Darstellung der Complexionen von $\binom{a,b,c,d,e\ldots}{1,2,3,4,5\ldots}^{n}$ für bestimmte Werthe von n.

16. Darstellung für n = 9.

111111111	$aaaaaaaaa = a^9$
11111112	$aaaaaaab = a^7b$
1111122	$aaaaabb = a^5b^2$
111222	$aaabbb = a^3b^3$
12222	$abbbb = ab^4$
1111113	$aaaaaac = a^6c$
111123	$aaaabc = a^4bc$
11223	$aabbc = a^2b^2c$
2223	$bbbc = b^3c$
11133	$aaacc = a^3c^2$
1233	$abcc = abc^2$
333	$ccc = c^3$
111114	$aaaaad = a^5d$
11124	$aaabd = a^3bd$
1224	$abbd = ab^2d$
1134	$aacd = a^2cd$
234	$bcd = bcd$
144	$add = ad^2$
11115	$aaaae = a^4e$
1125	$aabe = a^2be$
225	$bbe = b^2e$
135	$ace = ace$
45	$de = de$
1116	$aaaf = a^3f$
126	$abf = abf$
36	$cf = cf$
117	$aag = a^2g$
27	$bg = bg$
18	$ah = ah$
9	$i = i$

Von der Boscowichschen Anordnung ausführlich (unten Abh. III. §. 10. u. f.) Wegen der Benennung Boscowich Hindenburgische Darstellung (Ebend. 11. Anm.)

Die Rechtfertigung der Formeln in diesen Tafeln durch Beweis, und was sonst noch darüber zu sagen oder dabey zu erinnern seyn möchte, will ich in Folgendem, unter der allgemeinen Rubrik ihrer Formen, zusammenfassen.

A. Recurrirende dependente Form.

Beweis der Formeln 3, a und 4, a Taf. I. S. 4. 6.

18. Der Satz (1) giebt $\frac{p^r}{q^s} = P$. In diese Gleichung setze man, statt der gegebenen Reihen p^r, q^s, und der angenommenen P, ihre Lokalwerthe (2), multiplicire die Reihe für q^s (2, I) mit der für P (2, II) und bringe die Glieder der Reihe für p^r (2, I) auf die andere Seite, zu $q^s P$. Dieses giebt $o = q^s P - p^r$. In dieser Gleichung setze man die einzelnen, zu einerley Potenz von x gehörigen, Coefficienten, einen nach dem andern $= o$. Dadurch findet man die Werthe der einzelnen Coefficienten der Reihe P; die Werthe nehmlich von $Px1$, $Px2$, $Px3$ . . . nach der Ordnung, wie sie in der Tafel (3, a, S. 4) stehen. Die dort vorkommenden Variationsklassen $^2B^{q^s P}$, $^3B^{q^s P}$ . . . sind bequeme Ausdrücke der zusammengehörigen Producte aus der Multiplication der Reihe q^s (von $q^s x2$ an) in P. Sie machen die combinatorische Grundlage aus, durch welche, mit Beyhülfe der Lokalwerthe für p^r, q^s, es möglich wird, die Auflösungsformel für eine so verwickelte Aufgabe in einen so simpeln und, ohne Abbruch der Deutlichkeit, kurzen Ausdruck, als

$$Px(n+1) = \frac{p^r x(n+1) - {}^{n+1}B^{q^s P}}{q^s x1}$$

darstellt, zusammenzufassen.

Daraus kann man nun sehr leicht, vermittelst des (S. 4, unten) beygefügten Zeigers, die Werthe der Coefficienten von P, für den Gebrauch herleiten, und das so einfache Verbindungsgesetz selbst anschaulich darstellen, wie solches (4, a, S. 6) ausführlich geschehen ist.

19. Das analytische Verfahren für die Auflösung und den Beweis in 18, ist das schon sonst oft und vielfach gebrauchte; aber die dabey angewendeten Mittel, die Lokal- und combinatorischen Functionen, sind von den gewöhnlichen ganz verschieden. Daher eben die so große Abweichung der hier beygebrachten Auflösungsformeln dieser Aufgabe von andern; wovon in der Folge (am Ende dieser Rubrik) mehr vorkommen wird.

20. Für

$$\left(\frac{(ax^{\mu}+bx^{\mu+\delta}+cx^{\mu+2\delta}+\text{etc.})^{r}}{(\alpha x^{\nu}+\beta x^{\nu+\delta}+\gamma x^{\nu+2\delta}+\text{etc.})^{s}}\right)^{f}$$

$$=$$

$$P^{f}{}_{x1}x^{f(r\mu-s\nu)}+P^{f}{}_{x2}x^{f(r\mu-s\nu)+\delta}+\text{etc.}$$

findet man die Werthe von $P^{f}{}_{x1}$, $P^{f}{}_{x2}$, $P^{f}{}_{x3}$; u. s. w. wenn man durchgängig

statt	P,	r,	s in (3, a; 4, a)
hier	P^{f},	fr,	fs setzt.

21. Die Vorzeichen der Coefficienten a, b, c . . .; α, β, γ . . . der Reihen p, q (in 3, a; 4, a; 5, a) sind sämmtlich +. Dasselbe Zeichen müssen also auch die Coefficienten der einzelnen Glieder ihrer Potenzen p^{r} und q^{s} (ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit der Exponenten r und s) haben. Was also in den Werthen von P_{x2}, P_{x3}, P_{x4} u. s. w. Negatives vorkommt, beruht auf dem den Klammern [ ] vorgesetzten Zeichen —. Anders verhält es sich, wenn die

Coefficienten von p und q nicht sämtlich das Zeichen + haben. Da kommen positive und negative Glieder unter den Klammern vermengt vor, die durch das vorgesetzte Zeichen — wieder umgesetzt werden müssen. Um nun nicht auf diese zweyerley Zeichen Rücksicht nehmen zu dürfen, ist es bequem, der Aufgabe, an welcher man die Auflösung zeigen will, eine solche Gestalt und Einrichtung zu geben, durch welche das vor den Klammern gesetzte Zeichen nicht — sondern + wird. Das würde z. B. hier (in 5; a) der Fall seyn, wenn man daselbst durchgängig $-\beta, -\gamma, -\delta, \ldots$ im Nenner annähme, die Glieder aber bey der Entwickelung der Werthe von $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3, \ldots$ so ansähe, als ob sie zu der Scale $+\beta, +\gamma, +\delta, \ldots$ gehörten [b].

22. In 6, a (S. 8) ist das wirklich der Fall. Da stehen nehmlich $-\beta, -\gamma, -\delta, \ldots$ im Nenner, und alle Glieder desselben, ausser dem ersten, haben das Vorzeichen —. Den Erfolg den dieses, nach der Bemerkung (in 21) auf die Auflösungsformel hat, wird folgende Darstellung zeigen, die der noch übrige Raum auf Seite 8 aufzuführen nicht verstattete. Zur Abwechslung will ich hier a, b, c, ... statt $p\varkappa 1$, $p\varkappa 2$, $p\varkappa 3$, ... und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ statt $q\varkappa 1$, $q\varkappa 2$, $q\varkappa 3, \ldots$ setzen.

23. Für (6, a)

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc.}}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc.}} = P$$

b) Hieher die Eulerische Erinnerung wegen der Form $\frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \text{etc.}}$: primum denominatoris terminum pono = 1, huc enim semper fractio reduci potest, nisi is fit = 0; reliquos autem denominatoris terminos omnes tanquam negativos contemplor, vt Seriei hinc formatae omnes termini fiant affirmatiui (Intr. in An. Inf. T. I. art. 63.)

ist $P = P\varkappa 1 x^{\mu-\nu} + P\varkappa 2 x^{\mu-\nu+\delta} + P\varkappa 3 x^{\mu-\nu+2\delta} + \text{etc.}$

und $P\varkappa 1 = \frac{a}{\alpha}$

$$P\varkappa 2 = \frac{b + {}^{2}\overset{qP}{B}}{\alpha} = (b + \beta . P\varkappa 1) : \alpha$$

$$P\varkappa 3 = \frac{c + {}^{3}\overset{qP}{B}}{\alpha} = \left(c + \begin{Bmatrix} \beta . P\varkappa 2 \\ \gamma . P\varkappa 1 \end{Bmatrix}\right) : \alpha$$

$$P\varkappa 4 = \frac{d + {}^{4}\overset{qP}{B}}{\alpha} = \left(d + \begin{Bmatrix} \beta . P\varkappa 3 \\ \gamma . P\varkappa 2 \\ \delta . P\varkappa 1 \end{Bmatrix}\right) : \alpha$$

$$\begin{array}{lccccc} & = & = & = & = & = \\ q & [\alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots] \\ P & [\;=, & P\varkappa 1, & P\varkappa 2, & P\varkappa 3, & P\varkappa 4 \ldots] \\ & [\;=, & 1, & 2, & 3, & 4 \ldots] \end{array}$$

Hier werden nähmlich (in 3, a und 4, a) die Zeichen — durchgängig in + verwandelt (21). Auch erhellet ohne Schwierigkeit, daß alle Glieder des obigen Quotienten $\frac{P}{q}$ positiv kommen müssen. Man kann daher (in 4, a) in jedem Gliede hinter der Klammer [ ] das Zeichen — der negativen Factoren, $q\varkappa 2$ oder $-\beta$; $q\varkappa 3$ oder $-\gamma$; $q\varkappa 4$ oder $-\delta$; ... aus dem Nenner q, auf das Vorzeichen — vor der Klammer wirken, und solches in + umsetzen lassen. Das ist eben so viel, als ob man, für die gleichfalls positiv gezeichneten Variationsklassen $+{}^{2}\overset{qP}{B}$, $+{}^{3}\overset{qP}{B}$ u. s. w. dann

$$q\,[+\alpha, +\beta, +\gamma, +\delta, +\varepsilon \ldots]$$

im Zeiger setzte, daß also die Coefficienten im Nenner q denen im Zeiger, von β an, entgegengesetzt wären.

24. Wenn p und q, wie bisher ist vorausgesetzt worden, unendliche Reihen sind, so hat jeder folgende Coefficient von P oder Q ein Bestimmungsstück mehr, als der vorhergehende, und die Zahl dieser Stücke (der einzelnen Glieder) dieser Coefficienten wächst unendlich. Wenn aber p und q, wie nicht selten der Fall ist, irgendwo abbrechen, z. B. p mit den vierten Coefficienten d, und q mit dem dritten γ, so haben, wenn der ebenerwähnte Fall für $\frac{p}{q}$ in (23) angenommen wird, nur die ersten vier Coefficienten von P vorgesetzte a, b, c, d nach der Ordnung, und, wo diese Buchstaben ausfallen, von da an (also mit dem fünften Coefficienten P×5) giebt es für diesen und alle übrigen nur drey Bestimmungsstücke oder Glieder, in denen α, β, γ, nach der Ordnung, als Factoren vorkommen c).

Was für $Q = \frac{1}{q}$ auf den Fall gilt, wenn die Coefficienen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ für q irgendwo abbrechen, zeigt unter andern die Formel (9, a) mit einem Blicke.

25. Solche Reihen, wie bisher sind betrachtet worden, werden recurrirende oder wiederkehrende genennt, weil jeder folgende Coefficient derselben, aus einem oder mehrern der nächstvorhergehenden, durch Beyhülfe gewisser beständigen Größen gebildet wird, welche nach de Moivre, der sich mit der Untersuchung solcher Reihen zuerst und vorzüglich beschäftigt hat, die Beziehungsscale (scala re-

c) Nisi Numerator in infinitum progrediatur, additio (numerorum ex Numeratore) mox cessabit, atque quiuis terminus secundum legem constantem ex aliquot praecedentibus determinabitur. (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 63.)

lationis) ausmachen. Ich will Moivre's eigene Worte hierüber aus der Schrift Miscellanea analytica (p. 27) in welcher er seine Sätze über diese Reihen am ausführlichsten vorgetragen und erwiesen hat, hier anführen:

26. Si Series aliqua ita sit constituta, vt assumtis in ea ad libitum terminis quotlibet, terminus quisque subsequens ad eundem semper antecedentium numerum habeat rationes datas, talem seriem voco recurrentem: huiusmodi est subjecta Series:

A B C D E F
$1+2x+3x^2+10x^3+34x^4+97x^5+$ etc.

in qua
$D = 3Cx - 2Bx^2 + 5Ax^3$
$E = 3Dx - 2Cx^2 + 5Bx^3$
$F = 3Ex - 2Dx^2 + 5Cx^3$
etc. etc. etc.

Quantitates autem $3x - 2x^2 + 5x^3$ vel etiam $3 - 2 + 5$, simul sumtas subque propriis suis signis connexas, voco Indicem seu Scalam relationis.

Ebendaselbst (S. 35) beweißt de Moivre den Satz, die Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1 - fx + gx^2 - hx^3 + kx^4 -}$ etc. gebe eine wiederkehrende Reihe, und setzt (S. 36) hinzu: Scala (relationis) conficitur ex Diviſore $1 - fx + gx^2 - hx^3 + kx^4 -$ etc., deleta vnitate, mutatis signis, diuisisque terminis reliquis per x, x^2, x^3, x^4 etc., adeo vt Scala relationis fiat $f - g + h - k +$ etc.; iam vero cum haec Scala respiciat tantummodo Coefficientes terminorum Seriei, si desideres Scalam, qua termini ipsi ad antecedentes referantur, nihil aliud faciendum erit, quam vt Unitas deleatur ex denominatore, mutenturque Signa terminorum reliquorum, seruatis potestatibus quantitatis x,

adeo vt Relationis Scala, quae terminos ipsos spectat, futura sit $fx - gx^2 + hx^3 - kx^4 +$ etc.

27. Wäre also eine Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} = S,$$

so beschaffen,

daß $E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A$

und $F = \alpha E + \beta D + \gamma C + \delta B$

u. s. w. . s.

so wäre S als eine recurrirende Reihe gegeben, die scala relationis wäre nähmlich $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, oder, die Factoren $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$ machten zusammen ihre Beziehungsscale aus, und der Nenner der gebrochenen Function, durch dessen Division S entstanden, wäre $1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$. Das Fortgangsgesetz der Reihe beruht also auf der Beziehungsscale, und diese giebt augenblicklich den Nenner des Bruchs, durch dessen Entwickelung die recurrirende Reihe entsteht. Die Vorzeichen der α, β, γ, δ ... sind nehmlich im Nenner und in der Beziehungsscale einander immer entgegengesetzt, und es verhält sich mit der Beziehungsscale, wie in (22) mit dem Zeiger. Für die Beziehungsscale $-\alpha - \beta - \gamma - \delta$ etc. wäre der Nenner $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc.; für jene $+\alpha - \beta + \gamma - \delta +$ etc., wäre dieser $1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 -$ etc. Wenn also mit einer Reihe zugleich ihre Beziehungsscale gegeben ist, so hat die Bestimmung der gebrochenen Function, deren Evolution die Reihe giebt, keine Schwierigkeit.

28. Die Beziehunsscalen, und folglich auch die Nenner der Brüche, durch deren Entwickelung die Reihen entspringen, bestehen gewöhnlich aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern. Ich habe aber die Gliederzahl der Scalen und Nenner, so wie der Zähler, nicht gleich anfangs beschränkt, und wiederkehrende Reihen, in einem weitläufti-

gern Sinne so genommen, wie ich sie (im Anfange von 24, 25) beschrieben habe. Inzwischen hat man bereits, nach jener Beschränkung, die wiederkehrenden Reihen in Ordnungen abgetheilt; nennt Reihen der ersten, zweyten, dritten ... Ordnung, nachdem ihre Beziehungsscalen aus eins, zwey, drey... Gliedern bestehen, die Nenner also der zugehörigen Brüche, in ihrer einfachsten Form, $1-\alpha x$ oder $1-\alpha x-\beta x^2$ oder $1-\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3$, u. s. w. sind; wobey man zugleich festgesetzt hat (wie auch Herr Trembley in der folgenden Abhandlung durchgängig beobachtet) die Zähler dieser Brüche seyen, in Absicht auf die veränderliche Größe (x) wenigstens um einen Grad niedriger, als die zugehörigen Nenner; dergleichen Brüche man eigentliche, ächte zu nennen pflegt. Wiederkehrende Reihen, in der Ausdehnung wie ich solche hier anfangs genommen habe, würden, in Absicht auf Ordnung, an sich ganz unbestimmt seyn, jede Reihe von bestimmter Ordnung aber in sich begreifen, und solche durch augenblickliche Nachweisung, welche Glieder oder Producte bey ihr wegfallen, mit größter Leichtigkeit sogleich darstellen.

29. Noch unterscheidet man seriem recurrentem puram von der impura, und nennt puram diejenige, wo alles blos durch die $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ der Beziehungsscale bestimmt wird, wie bey $\frac{1}{1-\alpha x-\beta x^2-\text{ etc.}}$; impura heißt, wo außer den $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, der Beziehungsscale, auch noch andere Größen a, b, c, d... wenigstens in den ersten Gliedern der Reihe, vorkommen, wie die Entwickelung von $\frac{a+bx+cx^2+dx^3\ldots}{1-\alpha x-\beta x^2-\gamma x^3\ldots}$ (II, a) zeigt. Bey der pura ist also das erste Glied 1, wenn der Nenner mit 1, oder $\frac{1}{\alpha}$, wenn er mit α anfängt: alle übrigen Glieder werden von

dieſem, vermittelſt der einzelnen Theile der Beziehungsſcale, nach der Ordnung, gebildet. Kommen im Nenner Sprünge bey den Potenzen von x vor, ſo muß auch bey der Scale Rückſicht darauf genommen werden, und umgekehrt bey dem Nenner. So gäbe $\frac{1}{1+\alpha x+\gamma x^3}$ eine ſeriem recurrentem puram, deren Scale $-\alpha-0-\gamma$ wäre; und zu der Scale $0+\beta+0-\delta$ gehörte der Bruch $\frac{1}{1-\beta x^2+\delta x^4}$.

30. Das Anfangsglied 1 im Nenner der gebrochenen Function wird zum gemeinſchaftlichen Diviſor aller Glieder der entwickelten, und die Beziehungsſcale fängt mit des zweyten Gliedes im Nenner Coefficienten α an. Eben ſo verhält es ſich, wenn im Nenner q, ſtatt 1 jede andere Zahl $q^s\varkappa 1$ den Anfang macht. Dann iſt $q^s\varkappa 1$ der durchgängige Diviſor in alle Glieder der evolvirten Function, und die Beziehungsſcale $-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 4}{q^s\varkappa 1}-$ etc. fängt von dem zweyten Coefficienten $q^s\varkappa 2$ des Nenners an. Die Vorzeichen ſind auch hier bey beyden die entgegengeſetzten (4, a; 7, a). So befolgen die gebrochenen Functionen, die im erſten Gliede des Nenners nicht 1 haben, einerley Geſetz mit denen, die mit 1 anfangen; und ſo ſind die Reihen (7, a; 9, a) wirkliche Series purae, die nur allein von ihren Beziehungsſcalen ($-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 4}{q^s\varkappa 1}\ldots$ bey 7, a; und $+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\ldots$ bey 9, a) abhangen, obſchon ihre Nenner nicht mit 1 anfangen. Eben ſo ſind die Reihen (4, a; 5, a) impurae, weil die Formirung ihrer Glieder, neben der Beziehungsſcale ($-\frac{q^s\varkappa 2}{q^s\varkappa 1}-\frac{q^s\varkappa 3}{q^s\varkappa 1}-\ldots$ in

4, a; und $-\frac{q\varkappa 2}{q\varkappa 1} - \frac{q\varkappa 3}{q\varkappa 1} - \ldots$ in 5, a) noch die Beyhülfe anderer Größen ($p'\varkappa 1$, $p'\varkappa 2 \ldots$ für 4, a, oder $p\varkappa 1$, $p\varkappa 2 \ldots$ das ist a, b ... für 5, a) erfordert; jene giebt der Nenner, diese der Zähler an die Hand.

31. Weil der erste Theil des Nenners der Function den gemeinschaftlichen Divisor in alle Glieder der zu entwickelnden Reihe giebt (30) so darf dieser nicht $= 0$ seyn. Denn wäre $q^s\varkappa 1$ oder $q\varkappa 1$ d. i. hier α^s oder $\alpha = 0$, so würden dadurch das erste und alle folgende Glieder der Reihen (4, a; 5, a; 7, a; 9, a) unendlich. Wie man dieser scheinbaren Schwierigkeit begegnen, und sie leicht heben könne, hat Euler (Introd. in Anal. Inf. L. 1. f. 69) gezeigt. Eine andere wichtige Bemerkung, in Beziehung auf ächte und unächte gebrochene Functionen, und wie, bey dem Gebrauche der letztern, die ganze darinn enthaltene Function, in den Gliedern, in welche sie kommt, das Fortschreitungsgesetz unterbricht (Ebend. f. 63).

32. Die Hauptaufgabe (1 oder 3, a) hat Euler in der Gestalt

$$\frac{(A+Bx+Cx^2+\text{ etc.})^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{ etc.})^n} = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\text{ etc.}$$

aufgelöst (Inst. Calc. Diff. P. II. Cap. VIII. f. 207)

Die Eulerischen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ...
sind meine $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$, $P\varkappa 4$...

aber das dortige Fortschreitungsgesetz für die Werthe der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ... ist nicht so leicht und einfach [d]) als das hiesige

d) Euler, der vorher mehrere Gesetze, in weniger zusammengesetzten Fällen, wörtlich ausgedrückt und angegeben hat, sagt daher a. a. O. von diesem: Lex, qua istae formulae (für die Werthe der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ...) vlterius continuantur ex inspectione facilius apparet, quam verbis describi queat.

(4, a) für die P×1, P×2, P×3 u. s. w. Durch die Auflösung dieser Aufgabe, behauptet dieser große Analyst (a. a. O. s. 208) die Lehre von der Evolution der Functionen und der recurrirenden Reihen erweitert zu haben. Eben das gilt von der Auflösung hier (4, a) und noch mehr von der andern (in B).

33. Ueberhaupt hat Euler von der Evolution der Functionen in Reihen, und den wiederkehrenden Reihen insbesondere (Introd. in Anal. Infin. L. I. Cap. IV. und XIII. ingl. Inst. Calc. Differ. L. II. Cap. VIII.) ausführlich gehandelt. Unter den letztern schienen ihm vor andern diejenigen Reihen, die aus Brüchen entspringen, deren Nenner eine Dignität oder Potenz einer Reihe ist, einer besondern Betrachtung werth zu seyn. Bey Potenzen von Binomien hatte auch die Auffindung eines allgemeinen Gesetzes (Introd. L. I. s. 64 = 67) keine Schwierigkeit; aber die Potenzen der Polynomien (hier 7, a) zeigten, auf dem gewöhnlichen Wege, desto größere, die sich noch um Vieles vermehrten, und so das Gesetz noch weit zusammengesetzter machten, wenn auch der Zähler eine Potenz eines Polynomiums ist (wie hier in 1). Daher auch dort (Introd. s. 68) die Behandlung solcher Reihen und die Auffindung ihrer Gesetze, als für die Analysis endlicher Größen zu schwierig, in die Differenzialrechnung (Lib. II. Cap. VIII. s. 198 = 207) verwiesen wird. Die Untersuchung daselbst schließt mit folgenden Worten: Hoc igitur modo doctrina de seriebus recurrentibus amplificatur, dum istum defectum suppleuimus, atque legem coefficientium definiuimus, si non solum denominator fractionis fuerit potestas quaecunque (hier 7, a) sed etiam numerator ex quotlibet terminis constet (3 und 4, a); ad quam legem detegendam sola inductio non sufficiebat (a. a. O. s. 208). Das wird hoffentlich die hier beygebrachte etwas ausführliche Auseinandersetzung entschuldigen, um so mehr,

da alles durch ganz einfache, auffallend leichte, in Lokalfunctionen ausgedrückte, Gesetze dargestellt und gegeben ist. Diese Gesetze sucht Euler für jeden einzelnen Fall insbesondere auf, und steigt so vom Speciellen auf das Allgemeine. Hier hingegen fließt alles aus der allgemeinen Aufgabe (1) und ihrer Auflösung (3 und 4, a) durch leichte Interpretation, und man hat nicht nöthig zu Logarithmen und ihren Differenzialien seine Zuflucht zu nehmen. Die Analysis endlicher Größen ist allein hinreichend, alle vorkommende Schwierigkeiten gründlich zu heben. Man darf nur an die Stelle der Logarithmen und ihrer Differenzialien, die gebraucht werden, das negotium perquam laborioſum (a. a. O. ſ. 200) der Potenziirung der Polynomien zu vermeiden, das combinatoriſche Verfahren ſetzen, das auch hier, wie anderwärts (Arch. H. III. S. 334, 23) als ein longe praeſtantiſſimum et fructuoſiſſimum compendium ſich bewährt. Für gegebene Reihen p und q, ſind nehmlich ihre Potenzen p^r, und q^s, mithin $p^r x$ (m+1); $q^s x$ (n+1) folglich auch $\frac{p^r}{q^s}$, und $\frac{p^r}{q^s} x$ (n+1) durch die combinatoriſche Methode mit Leichtigkeit gegeben (E. S. c. a. A. S. 235. §. 138, 139 ingl. §. 143, 144).

34. Auf dieſen und ähnlichen Forderungen (Ebend. S. 150. §. 15) gründen ſich die ſchönen, in Lokalzeichen durchgängig ausgedrückten, Auflöſungen verſchiedener, für die gewöhnliche Analysis ſchwierigen, Aufgaben Herrn Prof. Pfaffs (Ebend. S. 123–152; vergl. die Anmerk. S. 125, 126). Mehrere, noch verwickeltere Aufgaben dieſer Art ſind von Herrn Prof. Pfaff auch in dieſer zweyten Sammlung mitgetheilt worden.

35. Da die $p^r x1$, $p^r x2$, $p^r x3$ u. ſ. w. in den Auflöſungsformeln (3, a; 4, a) der Hauptaufgabe (1) unabhängig von einander gegeben ſind, ſo beruht alle Recurrenz lediglich

auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ u. s. w. Wie man auch diese aufheben, und so die Glieder independent von einander darstellen und finden könne, das zeigen die Formeln (3, b; 4, b) für welche die Lokalfunction $q^{-s}\varkappa(n+1)$ durch q eben so wie die $p^r\varkappa(n+1)$ durch p gegeben ist. Hieher gehört Folgendes.

B. Directe independente Form.

Beweis der Formeln 3, b und 4, b Taf. I. S. 5, 7.

36. I. Für $\frac{p^r}{q^s} = P$ ist (2, II.)

$$P = P\varkappa 1 x^{r\mu - s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu - s\nu + \delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \text{etc.}$$

II. Um nun die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . nicht (wie in 3, 4) durcheinander, sondern unabhängig von einander, auszudrücken, setze man $q^{-s}p^r = P$, also $P\varkappa 1 = (q^{-s}p^r)\varkappa 1$ und $P\varkappa 2 = (q^{-s}p^r)\varkappa 2$ und $P\varkappa 3 = (q^{-s}p^r)\varkappa 3$ u. s. w. Dadurch läßt sich die Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf die Auflösung des allgemeinen Productenproblems (Arch. der Math. Heft II. S. 224 u. f.) reduciren, wenn man statt der dortigen a, b hier r, — s setzt.

III. Demnach ist (a. a. O. S. 227, 8)

$$P\varkappa(n+1) = (q^{-s}p^r)\varkappa(n+1) = {}^{q^{-s}p^r}{}^{n+2}B$$

Daraus findet man den combinatorischen Ausdruck der Coëfficienten für $q^{-s}p^r$ in einzelnen Variationsklassen (wie in 3, b) wenn man in die obige Formel nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . statt n setzt; und hieraus ergiebt sich, statt der Variationsklassen ihre Werthe nach dem dortigen Zeiger für p^r und q^{-s} gesetzt, die Reihe für P oder $p^r q^{-s}$, wie solche,

mit der untergesetzten Scale für p und q, (in 4, b) befindlich ist.

IV. Weil für gegebene Reihen p, q, auch ihre Potenzen p^r, q^{-s}, durch die combinatorische Methode, und zwar von vorhergehenden Gliedern ganz unabhängig, gegeben sind, so ist durch die Formel (4, b) für $p^r\ q^{-s}$ die Evolution von $\frac{p^r}{q^s}$, auch von aller Abhängigkeit der Glieder von einander befreyt, und also die geforderte, und hier (in II) wiederholte, Bedingung vollständig erfüllt.

37. Was (in 18) von dem vortheilhaften Gebrauche der dortigen Variationsklassen und der Lokalwerthe für p^r, q^s, gesagt worden ist, das gilt auch von den hiesigen. Der Ausdruck für $P_{\varkappa}^{(n+1)}$ nach der hiesigen independenten Form (36, III) ist sogar einfacher, als der dortige (18) für die dependente.

38. Die Auflösung (4, b) dieser Aufgabe habe ich vorlängst (Infin. Dign. §. XXVI. p. 120 seq.) gegeben. Die hier gebrauchten Lokalausdrücke $p^r\varkappa 1$, $p^r\varkappa 2 \ldots$ $q^{-s}\varkappa 1$, $q^{-s}\varkappa 2 \ldots$ sind bequemer als die dortigen, willkührlich gewählten, ${}^{\mathrm{I}}A^m$, ${}^{\mathrm{II}}B^m \ldots$ ${}^{\mathrm{I}}A^{-\mu}$, ${}^{\mathrm{II}}B^{-\mu} \ldots$ (p. 122, 4; 123, 6). Die durch die Combinationsmethode bewärkte ganz einfache Darstellung in den gegebenen Coefficienten und Exponenten, steht daselbst (p. 123, 124, 8) und die recurrirende sehr verwickelte Euleriſche Formel zur Vergleichung (p. 125, 126, 9)

39. In der Lokalformel (4, b) sind zwey große Vortheile mit einander vereinigt: 1) ist selbige frey von aller Recurrenz, 2) führt sie die durch andere Verfahren so schwierige Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf Summen von

Producten zurück, deren Factoren $f^m x\ (n+1)$ für jedes m, also auch für r und — s, durch combinatorische Verfahren, ausser der Ordnung bequem sich darstellen lassen (E. S. c. a. A. S. 235). Diese Reduction ist vornehmlich wichtig; denn auf ihr beruht die große Leichtigkeit der Auflösung der, selbst nach Eulers Urtheile, so verwickelten Aufgabe (1) und dann giebt sie nicht selten beträchtliche Verkürzungen an die Hand, wo andere Vorschriften in unnöthige, oft in unübersehliche Weitläuftigkeiten führen. Die Fälle, wo dergleichen Verkürzungen eintreten, sind dieselben, wie ich bereits für die combinatorische Reversionsformel (Arch. d. Math. H. VII. S. 374; 10) angegeben habe.

Die Formel für $p^r q^{-s}$ (4, b) ist eben so mannichfaltiger Veränderungen, nach den verschiedenen Bestimmungen von p, q, μ, ν, δ, r, s, fähig, als jene für P (3, a; 4, a). Um $\left(\frac{p^r}{q^s}\right)^f$ ohne Recurrenz (die recurrirende Formel steht in 20) zu entwickeln, darf man nur $p^{fr} q^{-fs}$ darstellen, d. h. in der Formel für $p^r q^{-s}$ (4, b) überall fr, fs statt r, s setzen.

41. Für $r = s = 1$, oder für die Function $\frac{p}{q}$, enthält (5, b) die Entwickelung in combinatorischen Zeichen. Die dortige Formel ist nach a, b, c, d ... geordnet, und ihr Fortgangsgesetz fällt ohne Schwierigkeit in die Augen. Dieselbe, nur aber nach $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}$ ... geordnete, Formel habe ich bereits (Nov. Syst. Comb. p. LXXX) bekannt gemacht; die dasigen n^0, n^{-1}, n^{-2} ... sind den $p \times n$, $p \times (n-1)$, $p \times (n-2)$ ... gleichgeltend. Die Darstellung (5, b) zeigt zugleich (augenscheinlicher, als jene andere Nov. Syst. a. a. O.), daß in jedem folgenden Gliede alle

Combinationsklassen des nächstvorhergehenden Gliedes enthalten, sind, und daß man also, was man von diesen Classen für irgend ein Glied berechnet hat, für alle vorhergehende Glieder gebrauchen kann; nur werden die in einem spätern Gliede in b, c, d, e, f, g ... multiplicirten Combinationselemente $\left(\frac{a^n A}{\alpha^2}, \frac{b^n B}{\alpha^3}, \ldots\right)$, im nächstvorhergehenden in a, b, c, d, e, f ... multiplicirt. Und umgekehrt, wenn in einem Gliede die Combinationselemente $(a^{n-1}A, b^{n-1}B, \ldots \overset{-1}{n^{n-1}} \overset{-1}{N})$ oder ihre Stellvertreter $q^{-1}\varkappa n$, $q^{-1}\varkappa(n-1) \ldots q^{-1}\varkappa 1$, in $\overset{n-1}{a}, b \ldots a$ multiplicirt vorkommen: so kommen im nächstfolgenden Gliede dieselben Elemente, aber in $\overset{n-1}{b}, c \ldots b$, und noch überdies $q^{-1}\varkappa(n+1)$ in a multiplicirt, vor; wie aus (4, b) erhellet, wenn man dort $r = s = 1$ setzt. Hier zeigt sich also auch eine Recurrenz, aber keine der gemeinen so lästigen und beschwerlichen, sondern eine combinatorisch-involutorische der zusammenzusetzenden Elemente e), durch welche man jeden verlangten Coefficienten ausser der Ordnung mit Leichtigkeit schaffen kann, und zugleich, wie er mit den vorhergehenden und folgenden zusammenhängt, mit Deutlichkeit übersieht.

42. Die Formel für q^{-s} (in 7, b) läßt sich in Absicht auf die dortigen Binomialcoefficienten $^{-s}\mathfrak{A}$, $^{-s}\mathfrak{B}$, $^{-s}\mathfrak{C}$ ..., noch anders ausdrücken. Denn weil

e) Von solchen combinatorischen Dependenzen folgender Werthe oder Glieder von vorhergehenden, die aber, vermöge der ganz eigenen Art von Zusammensetzung der Elemente, absoluten Independenzen vollkommen gleichgültig sind, habe ich bereits anderwärts (Arch. der Math. H. III. S. 324) gesprochen und Beyspiele gegeben.

$$
\begin{array}{lllll}
{}^{-s}\mathfrak{A} & = & -\ {}^{s}\mathfrak{A} & = & -\ s \\
{}^{-s}\mathfrak{B} & = & +\ {}^{s+1}\mathfrak{B} & = & +\dfrac{s^{s+1}\mathfrak{A}}{2} \\
{}^{-s}\mathfrak{C} & = & -\ {}^{s+2}\mathfrak{C} & = & -\dfrac{s^{s+2}\mathfrak{B}}{3} \\
{}^{-s}\mathfrak{D} & = & +\ {}^{s+3}\mathfrak{D} & = & +\dfrac{s^{s+3}\mathfrak{C}}{4} \\
{}^{-s}\mathfrak{E} & = & -\ {}^{s+4}\mathfrak{E} & = & -\dfrac{s^{s+4}\mathfrak{D}}{5} \\
\text{u.} & & \text{s.} & & \text{w.}
\end{array}
$$

so ergiebt sich daraus, wenn man z. B. die letzten Coefficienten statt der ersten in die Formel (7, b) setzt, und den gemeinschaftlichen Factor absondert,

$$
\begin{aligned}
q^{-s} = {} & \frac{1}{\alpha^{s}} x^{-s\nu} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} a^{1} A x^{-s\nu+\delta} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} \left[a^{2} A - \frac{{}^{s+1}\mathfrak{A}b^{2}B}{2\alpha}\right] x^{-s\nu+2\delta} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} \left[a^{3} A - \frac{{}^{s+1}\mathfrak{A}b^{3}B}{2\alpha} + \frac{{}^{s+2}\mathfrak{B}c^{3}C}{3\alpha^{2}}\right] x^{-s\nu+3\delta} \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& \left(\begin{array}{cccc} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

43. Für die Evolution des Quotienten $\dfrac{1}{1-\beta x^{\delta}-\gamma x^{2\delta}-\text{etc.}}$ (10, a, b) hat unter andern auch Herr de la Grange eine Formel gegeben (Mem. de l'Ac. de Berlin, année 1768, p. 285, 286; vergl. Toepf. comb. Anal. S. 116—118).

Sie ist zusammengesetzter, als die hiesige (10, a), hat aber eine etwas weiter getriebene Analyse der dabey vorkommenden Coefficienten zum Zweck, die gleichwohl auf Substitutionen und Reductionen, wie die gewöhnliche, führt. Herr de la Grange empfiehlt daher in der Folge (Mem. §. 22. p. 291, 292) wegen des unendlichen Nutzens dieser Coefficienten bey so vielen Untersuchungen, ihre ausführliche Berechnung und Darstellung in den gegebenen ganz einfachen Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ Dies zeigt die große Wichtigkeit der so simpeln, von allen Substitutionen und Reductionen ganz freyen und unabhängigen combinatorischen Formel (10, b). Zur bessern Uebersicht des hier Gesagten vergleiche man Toepfer a. a. O. S. 119—123 und Arch. der Math. H. VII. S. 363, 364; 366, 367.

44. Die a^nA, b^nB, $c^nC \ldots$ bedeuten überhaupt, nach Classen zur Summe n combinatorisch geordnete, mit ihren Versetzungszahlen verbundene, Complexionen, sie mögen in ihrer Folge auf einander involutorisch dargestellt seyn, oder nicht. Verlangt man nun nicht blos combinatorische sondern zugleich involutorische Anordnungen dieser Coefficienten, so kann man dafür die j^nJ oder $j^n{}_n\mathfrak{J}^r$ gebrauchen, jene für die Classen- diese für die lexikographischen Involutionen (E. S. c. a. A. S. 266, 267). Das giebt für die involutorischen Formeln (10, b):

$$q^{-x} = 1 + j^1Jx^\delta + j^2Jx^{2\delta} + j^3Jx^{3\delta} + \text{etc. oder}$$

$$q^{-x} = 1 + j^1{}_1\mathfrak{J}^rx^\delta + j^2{}_2\mathfrak{J}^rx^{2\delta} + j^3{}_3\mathfrak{J}^rx^{3\delta} + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Entwickelung der Classeninvolution ^nJ und der lexikographischen $^n{}_n\mathfrak{J}^r$ (und zwar der leztern auf zwey verschiedene Arten) für bestimmte und unbestimmte Summenexponenten n, zeigen (E. S. c. a. A. S. 183. f. und S. 202,

204). Auch in dieser zweyten Sammlung wird Mehreres davon vorkommen.

45. Daraus folgt für (II, b) oder

$$\frac{p}{q} = \frac{a+bx+cx^2+\text{etc.}}{1-\beta x-\gamma x^2-\text{etc.}} = pq^{-1}.$$

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & a \\ & +[b+aj^1J]x \\ & +[c+bj^1J+aj^2J]x^2 \\ & +[d+cj^1J+bj^2J+aj^3J]x^3 \\ & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ & \left(\begin{matrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \cdots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \cdots\end{matrix}\right) \end{aligned}$$

Für $j^1J, j^2J \ldots$ kann man auch setzen $j^1\mathfrak{J}, j^2\mathfrak{J} \ldots$

46. Für die Evolution der Elementarfunction $\frac{1}{1-bx-cx^2-\text{etc.}}$ hat auch de Moivre zwo Formeln gegeben: eine recurrirende dependente (Misc. anal. p. 35, 36) die mit der hiesigen (10, a) bis auf die Zeichnung vollkommen übereinstimmt, und eine directe independente durch die Coefficienten b, c, d ... des Nenners unmittelbar ausgedrückte (ibid. p. 89. Coroll. I). Die Zusammensetzung der letzten folgt keinesweges, wie doch zu erwarten war, der unmittelbar vorher (auf derselben Seite) angegebenen Regulae producta literalia ex praecedentibus colligendi; auch hat de Moivre, welch anderes Gesetz dabey zum Grunde liege, nicht angegeben. Die Sache ist eine literarische Merkwürdigkeit, über welche ich in der Folge Aufschluß geben werde.

47. Auch hat Herr Professor Trembley zu Berlin in der folgenden Abhandlung über die wiederkehrenden Reihen

durch Evolution von $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - \text{etc.}}$

(worinn $\frac{1}{1 - ax + bx^2 - \text{etc.}}$ als Element enthalten ist)

mit vielem Scharfsinn eine Formel aufgefunden, deren Entwickelung, wie ich in der Folge zeigen werde, eine combinatorische Anordnung darstellt. Sie begreift zufälligerweise das oben (46) vermißte, von de Moivre nicht angegebene, Gesetz der Zusammensetzung jener Coefficienten vollständig in sich, und enthält so eine weitere Analyse der Moivrischen Anordnung jener Coefficienten. Aus dem ganzen Vortrage der Abhandlung selbst erhellet jedoch augenscheinlich, daß Herr Trembley, dem die unerwähnte de Moivrische Zusammensetzung der b, c, d ... vermuthlich gar nicht bekannt gewesen ist, seinen eigenen Weg eingeschlagen und verfolgt hat.

Zu unmittelbarer, in der Folge anzustellenden, Vergleichung der Trembleyischen Formeln und ihrer Auflösung, mit den combinatorisch-involutorischen, habe ich letztere (in 12, 13. Tafel III) vorgelegt, auch dieselben Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; a, b, c ... im Zähler und Nenner der gebrochenen Function $\frac{p}{q}$, wie bey Herrn Trembley, beybehalten. Da hier, wegen der Rechtfertigung der Formeln (12, 13) auf andere vorhergehende (36, III) von welchen sie abhängen, verwiesen wird: so wird es hoffentlich nicht überflüssig seyn, einen directen Beweis dieser Formeln hier beyzubringen. Bey aller Strenge läßt er sich ganz kurz fassen, und schafft den Vortheil, daß, wem blos um die Einsicht und Vergleichung der beyderley Formeln (der meinigen und der von Herrn Trembley) und ihres Gebrauchs in der Anwendung zu thun ist, dieser das Bisher Vorgetragene ganz übergehen, und sich nur mit dem zunächst Folgenden bekannt machen darf.

C. Directer Beweis der Formeln für q^{-1} und pq^{-1} (12, 13) nebst einigen Beyspielen zur Erläuterung.

a) Beweis der Formel für q^{-1} (12. Taf. III.)

49. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = q^{-1}$$

setze man $\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - {}'q}$, wo also ${}'q = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$

Nun ist

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + {}'q^1 + {}'q^2 + {}'q^3 + \text{etc.} = q^{-1}$$

$${}'q\,[a,\ b,\ c\ \ldots\ldots]$$

folglich, statt der Potenzen ${}'q^1$, ${}'q^2$, ${}'q^3$ ... ihre einzelnen in Combinationsclassen ausgedrückten Glieder (E. S. c. a. A. S. 232 §. 130) gesetzt,

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + a^1Ax + \left.\begin{matrix} a^2A \\ +b^2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} a^3A \\ +b^3B \\ +c^3C \end{matrix}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d \ldots\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots\ldots \end{matrix}\right)$$

woraus

$$q^{-1} \begin{cases} = 1 + j^1Jx^1 + j^2Jx^2 + j^3Jx^3 + \text{etc.} \\ = 1 + j^1\mathfrak{J}x^1 + j^2\mathfrak{J}x^2 + j^3\mathfrak{J}x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

(wie in 12, Taf. III) folgt, wenn man, nach der dortigen Erinnerung, statt der $a^nA + b^nB + c^nC + \text{etc.}$ die zugehörigen involutorischen Functionen j^nJ, $j^n\mathfrak{J}$, setzt (Ebend. S. 267).

da alles durch ganz einfache, auffallend leichte, in Lokalfunctionen ausgedrückte, Gesetze dargestellt und gegeben ist. Diese Gesetze sucht Euler für jeden einzelnen Fall insbesondere auf, und steigt so vom Speciellen auf das Allgemeine. Hier hingegen fließt alles aus der allgemeinen Aufgabe (1) und ihrer Auflösung (3 und 4, a) durch leichte Interpretation, und man hat nicht nöthig zu Logarithmen und ihren Differenzialien seine Zuflucht zu nehmen. Die Analysis endlicher Größen ist allein hinreichend, alle vorkommende Schwierigkeiten gründlich zu heben. Man darf nur an die Stelle der Logarithmen und ihrer Differenzialien, die gebraucht werden, das negotium perquam laboriosum (a. a. O. f. 200) der Potenziirung der Polynomien zu vermeiden, das combinatorische Verfahren setzen, das auch hier, wie anderwärts (Arch. H. III. S. 334, 23) als ein longe praestantissimum et fructuosissimum compendium sich bewährt. Für gegebene Reihen p und q, sind nehmlich ihre Potenzen p^r, und q^s, mithin $p^r x$ (m+1); $q^s x$ (n+1) folglich auch $\frac{p^r}{q^s}$, und $\frac{p^r}{q^s} x$ (n+1) durch die combinatorische Methode mit Leichtigkeit gegeben (E. S. c. a. A. S. 235. §. 138, 139 ingl. §. 143, 144).

34. Auf diesen und ähnlichen Forderungen (Ebend. S. 150. §. 15) gründen sich die schönen, in Lokalzeichen durchgängig ausgedrückten, Auflösungen verschiedener, für die gewöhnliche Analysis schwierigen, Aufgaben Herrn Prof. Pfaffs (Ebend. S. 123 - 152; vergl. die Anmerk. S. 125, 126). Mehrere, noch verwickeltere Aufgaben dieser Art sind von Herrn Prof. Pfaff auch in dieser zweyten Sammlung mitgetheilt worden.

35. Da die $p^r x1$, $p^r x2$, $p^r x3$ u. s. w. in den Auflösungsformeln (3, a; 4, a) der Hauptaufgabe (1) unabhängig von einander gegeben sind, so beruht alle Recurrenz lediglich

auf den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ u. ſ. w. Wie man auch dieſe aufheben, und ſo die Glieder independent von einander darſtellen und finden könne, das zeigen die Formeln (3, b; 4, b) für welche die Lokalfunction $q^{-s}\varkappa\,(n+1)$ durch q eben ſo wie die $p^r\varkappa\,(n+1)$ durch p gegeben iſt. Hieher gehört Folgendes.

B. Directe independente Form.

Beweis der Formeln 3, b und 4, b Taf. I. S. 5, 7.

36. I. Für $\frac{p^r}{q^s} = P$ iſt (2, II.)

$$P = P\varkappa 1 x^{r\mu - s\nu} + P\varkappa 2 x^{r\mu - s\nu + \delta} + P\varkappa 3 x^{r\mu - s\nu + 2\delta} + \text{etc.}$$

II. Um nun die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ . . . nicht (wie in 3, 4) durcheinander, ſondern unabhängig von einander, auszudrücken, ſetze man $q^{-s}p^r = P$, alſo $P\varkappa 1 = (q^{-s}p^r)\,\varkappa 1$ und $P\varkappa 2 = (q^{-s}p^r)\,\varkappa 2$ und $P\varkappa 3 = (q^{-s}p^r)\,\varkappa 3$ u. ſ. w. Dadurch läßt ſich die Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf die Auflöſung des allgemeinen Productenproblems (Arch. der Math. Heft II. S. 224 u. f.) reduciren, wenn man ſtatt der dortigen a, b hier r, — s ſetzt.

III. Demnach iſt (a. a. O. S. 227, 8)

$$P\varkappa(n+1) = (q^{-s}p^r)\varkappa(n+1) = {}^{q^{-s}p^r}{}^{n+2}B$$

Daraus findet man den combinatoriſchen Ausdruck der Coefficienten für $q^{-s}p^r$ in einzelnen Variationsklaſſen (wie in 3, b) wenn man in die obige Formel nach und nach 0, 1, 2, 3 . . . ſtatt n ſetzt; und hieraus ergiebt ſich, ſtatt der Variationsklaſſen ihre Werthe nach dem dortigen Zeiger für p^r und q^{-s} geſetzt, die Reihe für P oder $p^r q^{-s}$, wie ſolche,

mit der untergesetzten Scale für p und q, (in 4, b) befindlich ist.

IV. Weil für gegebene Reihen p, q, auch ihre Potenzen p^r, q^{-s}, durch die combinatorische Methode, und zwar von vorhergehenden Gliedern ganz unabhängig, gegeben sind, so ist durch die Formel (4, b) für $p^r\, q^{-s}$ die Evolution von $\frac{p^r}{q^s}$, auch von aller Abhängigkeit der Glieder von einander befreyt, und also die geforderte, und hier (in II) wiederholte, Bedingung vollständig erfüllt.

37. Was (in 18) von dem vortheilhaften Gebrauche der dortigen Variationsklassen und der Lokalwerthe für p^r, q^s, gesagt worden ist, das gilt auch von den hiesigen. Der Ausdruck für $P_{\varkappa}$ $(n+1)$ nach der hiesigen independenten Form (36, III) ist sogar einfacher, als der dortige (18) für die dependente.

38. Die Auflösung (4, b) dieser Aufgabe habe ich vorlängst (Infin. Dign. §. XXVI. p. 120 seq.) gegeben. Die hier gebrauchten Lokalausdrücke $p^r \varkappa 1$, $p^r \varkappa 2 \ldots q^{-s} \varkappa 1$, $q^{-s} \varkappa 2 \ldots$ sind bequemer als die dortigen, willkührlich gewählten, ${}^{\mathrm{I}}A^m$, ${}^{\mathrm{II}}B^m \ldots {}^{\mathrm{I}}A^{-\mu}$, ${}^{\mathrm{II}}B^{-\mu} \ldots$ (p. 122, 4; 123, 6). Die durch die Combinationsmethode bewärkte ganz einfache Darstellung in den gegebenen Coefficienten und Exponenten, steht daselbst (p. 123, 124, 8) und die recurrirende sehr verwickelte Eulerische Formel zur Vergleichung (p. 125, 126, 9)

39. In der Lokalformel (4, b) sind zwey große Vortheile mit einander vereinigt: 1) ist selbige frey von aller Recurrenz, 2) führt sie die durch andere Verfahren so schwierige Evolution der gebrochenen Function $\frac{p^r}{q^s}$ auf Summen von

Producten zurück, deren Factoren $f^{m}{}_{x}\,(n+1)$ für jedes m, also auch für r und — s, durch combinatorische Verfahren, ausser der Ordnung bequem sich darstellen lassen (E. S. c. a. A. S. 235). Diese Reduction ist vornehmlich wichtig; denn auf ihr beruht die große Leichtigkeit der Auflösung der, selbst nach Eulers Urtheile, so verwickelten Aufgabe (1) und dann giebt sie nicht selten beträchtliche Verkürzungen an die Hand, wo andere Vorschriften in unnöthige, oft in unübersehliche Weitläuftigkeiten führen. Die Fälle, wo dergleichen Verkürzungen eintreten, sind dieselben, wie ich bereits für die combinatorische Reversionsformel (Arch. d. Math. H. VII. S. 374; 10) angegeben habe.

Die Formel für $p^{r}\,q^{-s}$ (4, b) ist eben so mannichfaltiger Veränderungen, nach den verschiedenen Bestimmungen von p, q, μ, ν, δ, r, s, fähig, als jene für P (3, a; 4, a). Um $\left(\frac{p^{r}}{q^{s}}\right)^{f}$ ohne Recurrenz (die recurrirende Formel steht in 20) zu entwickeln, darf man nur $p^{fr}\,q^{-fs}$ darstellen, d. h. in der Formel für $p^{r}\,q^{-s}$ (4, b) überall fr, fs statt r, s setzen.

41. Für $r=s=1$, oder für die Function $\frac{p}{q}$, enthält (5, b) die Entwickelung in combinatorischen Zeichen. Die dortige Formel ist nach a, b, c, d ... geordnet, und ihr Fortgangsgesetz fällt ohne Schwierigkeit in die Augen. Dieselbe, nur aber nach $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^{2}}, \frac{1}{\alpha^{3}}$ ... geordnete, Formel habe ich bereits (Nov. Syst. Comb. p. LXXX) bekannt gemacht; die dasigen n^{0}, n^{-1}, n^{-2} ... sind den $p^{x}{}_{n}$, $p^{x}{}_{(n-1)}$, $p^{x}{}_{(n-2)}$ ... gleichgeltend. Die Darstellung (5, b) zeigt zugleich (augenscheinlicher, als jene andere Nov. Syst. a. a. O.), daß in jedem folgenden Gliede alle

Combinationsklassen des nächstvorhergehenden Gliedes enthalten, sind, und daß man also, was man von diesen Classen für irgend ein Glied berechnet hat, für alle vorhergehende Glieder gebrauchen kann; nur werden die in einem spätern Gliede in b, c, d, e, f, g ... multiplicirten Combinationselemente $\left(\frac{a^n A}{a^2}, \frac{b^n B}{a^3}, \ldots\right)$, im nächstvorhergehenden in a, b, c, d, e, f ... multiplicirt. Und umgekehrt, wenn in einem Gliede die Combinationselemente $(a^{n-1}A, b^{n-1}B, \ldots \overset{-1}{n^{n-1}} \overset{-1}{N})$ oder ihre Stellvertreter $q^{-1}\varkappa n$, $q^{-1}\varkappa (n-1) \ldots q^{-1}\varkappa 1$, in $a, b \ldots \overset{n-1}{a}$ multiplicirt vorkommen: so kommen im nächstfolgenden Gliede dieselben Elemente, aber in $b, c \ldots \overset{n-1}{b}$, und noch überdies $q^{-1}\varkappa (n+1)$ in a multiplicirt, vor; wie aus (4, b) erhellet, wenn man dort $r = s = 1$ setzt. Hier zeigt sich also auch eine Recurrenz, aber keine der gemeinen so lästigen und beschwerlichen, sondern eine combinatorisch-involutorische der zusammenzusetzenden Elemente [e]), durch welche man jeden verlangten Coefficienten ausser der Ordnung mit Leichtigkeit schaffen kann, und zugleich, wie er mit den vorhergehenden und folgenden zusammenhängt, mit Deutlichkeit übersieht.

42. Die Formel für q^{-s} (in 7, b) läßt sich in Absicht auf die dortigen Binomialcoefficienten $^{-s}\mathfrak{A}$, $^{-s}\mathfrak{B}$, $^{-s}\mathfrak{C}$ ..., noch anders ausdrücken. Denn weil

e) Von solchen combinatorischen Dependenzen folgender Werthe oder Glieder von vorhergehenden, die aber, vermöge der ganz eigenen Art von Zusammensetzung der Elemente, absoluten Independenzen vollkommen gleichgültig sind, habe ich bereits anderwärts (Arch. der Math. H. III. S. 324) gesprochen und Beyspiele gegeben.

$$
\begin{aligned}
{}^{-s}\mathfrak{A} &= -\,{}^{s}\mathfrak{A} = -s \\
{}^{-s}\mathfrak{B} &= +\,{}^{s+1}\mathfrak{B} = +\frac{s^{s+1}\mathfrak{A}}{2} \\
{}^{-s}\mathfrak{C} &= -\,{}^{s+2}\mathfrak{C} = -\frac{s^{s+2}\mathfrak{B}}{3} \\
{}^{-s}\mathfrak{D} &= +\,{}^{s+3}\mathfrak{D} = +\frac{s^{s+3}\mathfrak{C}}{4} \\
{}^{-s}\mathfrak{E} &= -\,{}^{s+4}\mathfrak{E} = -\frac{s^{s+4}\mathfrak{D}}{5}
\end{aligned}
$$

u. ſ. w.

ſo ergiebt ſich daraus, wenn man z. B. die letzten Coefficienten ſtatt der erſten in die Formel (7, b) ſetzt, und den gemeinſchaftlichen Factor abſondert,

$$
\begin{aligned}
q^{-s} = {} & \frac{1}{\alpha^{s}} x^{-sy} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} a^{1}A x^{-sy+\delta} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} [a^{2}A - \frac{s+1}{2\alpha} \mathfrak{A} b^{2} B] x^{-sy+2\delta} \\
& - \frac{s}{\alpha^{s+1}} [a^{3}A - \frac{s+1}{2\alpha} \mathfrak{A} b^{3} B + \frac{s+2}{3\alpha^{2}} \mathfrak{B} c^{3} C] x^{-sy+3\delta} \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}
$$

43. Für die Evolution des Quotienten $\frac{1}{1-\beta x^{\delta}-\gamma x^{2\delta}-\text{etc.}}$ (10, a, b) hat unter andern auch Herr de la Grange eine Formel gegeben (Mem. de l'Ac. de Berlin, année 1768, p. 285, 286; vergl. Toepf. comb. Anal. S. 116—118).

Sie ist zusammengesetzter, als die hiesige (10, a), hat aber eine etwas weiter getriebene Analyse der dabey vorkommenden Coefficienten zum Zweck, die gleichwohl auf Substitutionen und Reductionen, wie die gewöhnliche, führt. Herr de la Grange empfiehlt daher in der Folge (Mem. §. 22. p. 291, 292) wegen des unendlichen Nutzens dieser Coefficienten bey so vielen Untersuchungen, ihre ausführliche Berechnung und Darstellung in den gegebenen ganz einfachen Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ Dies zeigt die große Wichtigkeit der so simpeln, von allen Substitutionen und Reductionen ganz freyen und unabhängigen combinatorischen Formel (10, b). Zur bessern Uebersicht des hier Gesagten vergleiche man Toepfer a. a. O. S. 119—123 und Arch. der Math. H. VII. S. 363, 364; 366, 367.

44. Die a^nA, b^nB, $c^nC \ldots$ bedeuten überhaupt, nach Classen zur Summe n combinatorisch geordnete, mit ihren Versetzungszahlen verbundene, Complexionen, sie mögen in ihrer Folge auf einander involutorisch dargestellt seyn, oder nicht. Verlangt man nun nicht blos combinatorische sondern zugleich involutorische Anordnungen dieser Coefficienten, so kann man dafür die j^nJ oder $j^n{}_x^n\mathfrak{J}^r$ gebrauchen, jene für die Classen- diese für die lexikographischen Involutionen (E. S. c. a. A. S. 266, 267). Das giebt für die involutorischen Formeln (10, b):

$$q^{-1} = 1 + j^1 J x^\delta + j^2 J x^{2\delta} + j^3 J x^{3\delta} + \text{etc. oder}$$

$$q^{-1} = 1 + j^1{}_x^1\mathfrak{J}^r x^\delta + j^2{}_x^2\mathfrak{J}^r x^{2\delta} + j^3{}_x^3\mathfrak{J}^r x^{3\delta} + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Entwickelung der Classeninvolution ^nJ und der lexikographischen $^n_x\mathfrak{J}^r$ (und zwar der letztern auf zwey verschiedene Arten) für bestimmte und unbestimmte Summenexponenten n, zeigen (E. S. c. a. A. S. 183. f. und S. 20

204). Auch in dieser zweyten Sammlung wird Mehreres davon vorkommen.

45. Daraus folgt für (11, b) oder

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2 + \text{etc.}}{1 - \beta x - \gamma x^2 - \text{etc.}} = pq^{-1},$$

$$\begin{aligned} pq^{-1} = {} & a \\ & + [b + aj^1 J]\, x \\ & + [c + bj^1 J + aj^2 J]\, x^2 \\ & + [d + cj^1 J + bj^2 J + aj^3 J]\, x^3 \\ & \cdots \\ & \begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $j^1 L j^2 J \ldots$ kann man auch setzen $j^1 \mathfrak{J}^r, j^2 \mathfrak{J}^r \ldots$

46. Für die Evolution der Elementarfunction $\frac{1}{1 - bx - cx^2 - \text{etc.}}$ hat auch de Moivre zwo Formeln gegeben: eine recurrirende dependente (Misc. anal. p. 35, 36) die mit der hiesigen (10, a) bis auf die Zeichnung vollkommen übereinstimmt, und eine directe independente durch die Coefficienten b, c, d ... des Nenners unmittelbar ausgedrückte (ibid. p. 89. Coroll. I). Die Zusammensetzung der letzten folgt keinesweges, wie doch zu erwarten war, der unmittelbar vorher (auf derselben Seite) angegebenen Regulae producta literalia ex praecedentibus colligendi; auch hat de Moivre, welch anderes Gesetz dabey zum Grunde liege, nicht angegeben. Die Sache ist eine literarische Merkwürdigkeit, über welche ich in der Folge Aufschluß geben werde.

47. Auch hat Herr Professor Trembley zu Berlin in der folgenden Abhandlung über die wiederkehrenden Reihen

durch Evolution von $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - \text{etc.}}$

(worinn $\frac{1}{1 - ax + bx^2 - \text{etc.}}$ als Element enthalten ist)

mit vielem Scharfsinn eine Formel aufgefunden, deren Entwickelung, wie ich in der Folge zeigen werde, eine combinatorische Anordnung darstellt. Sie begreift zufälligerweise das oben (46) vermißte, von de Moivre nicht angegebene, Gesetz der Zusammensetzung jener Coefficienten vollständig in sich, und enthält so eine weitere Analyse der Moivrischen Anordnung jener Coefficienten. Aus dem ganzen Vortrage der Abhandlung selbst erhellet jedoch augenscheinlich, daß Herr Trembley, dem die unerwähnte de Moivrische Zusammensetzung der b, c, d . . . vermuthlich gar nicht bekannt gewesen ist, seinen eigenen Weg eingeschlagen und verfolgt hat.

Zu unmittelbarer, in der Folge anzustellenden, Vergleichung der Trembleyischen Formeln und ihrer Auflösung, mit den combinatorisch-involutorischen, habe ich letztere (in 12, 13. Tafel III) vorgelegt, auch dieselben Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; a, b, c . . . im Zähler und Nenner der gebrochenen Function $\frac{p}{q}$, wie bey Herrn Trembley, beybehalten. Da hier, wegen der Rechtfertigung der Formeln (12, 13) auf andere vorhergehende (36, III) von welchen sie abhängen, verwiesen wird: so wird es hoffentlich nicht überflüssig seyn, einen directen Beweis dieser Formeln hier beyzubringen. Bey aller Strenge läßt er sich ganz kurz fassen, und schafft den Vortheil, daß, wem blos um die Einsicht und Vergleichung der beyderley Formeln (der meinigen und der von Herrn Trembley) und ihres Gebrauchs in der Anwendung zu thun ist, dieser das Bisher Vorgetragene ganz übergehen, und sich nur mit dem zunächst Folgenden bekannt machen darf.

C. Directer Beweis der Formeln für q^{-x} und pq^{-x} (12, 13) nebst einigen Beyspielen zur Erläuterung.

a) Beweis der Formel für q^{-x} (12. Taf. III.)

49. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = q^{-x}$$

setze man $\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - {}'q}$, wo also ${}'q = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$

Nun ist

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + {}'q^1 + {}'q^2 + {}'q^3 + \text{etc.} = q^{-x}$$

$${}'q\,[a,\ b,\ c\ \ldots.]$$

folglich, statt der Potenzen ${}'q^1$, ${}'q^2$, ${}'q^3$ ... ihre einzelnen in Combinationsclassen ausgedrückten Glieder (E. S. c. a. A. S. 232 §. 130) gesetzt,

$$\frac{1}{1 - {}'q} = 1 + a^1Ax + \left.\begin{matrix} a^2A \\ + b^2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} a^3A \\ + b^3B \\ + c^3C \end{matrix}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots. \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots. \end{pmatrix}$$

woraus

$$q^{-x} \begin{cases} = 1 + j^1Jx^1 + j^2Jx^2 + j^3Jx^3 + \text{etc.} \\ = 1 + j^1{}^{n}\!J^{r}x^1 + j^2{}^{n}\!J^{r}x^2 + j^3{}^{n}\!J^{r}x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

(wie in 12, Taf. III) folgt, wenn man, nach der dortigen Erinnerung, statt der $a^nA + b^nB + c^nC + \text{etc.}$ die zugehörigen involutorischen Functionen j^nJ, $j^n{}^{n}\!J^{r}$, setzt (Ebend. S. 267).

b) Beweis der Formel für pq^{-1} (13, Taf. III)

50. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = pq^{-1}$$

ist $pq^{-1} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})\,(1 + j' \mathfrak{J}' x^1 + j^2 \mathfrak{J}' x^2 + \text{etc})$ wenn man q^{-1} durch involutorische Zeichen (nach 12 oder 49) ausdrückt. Daraus folgt, beyde Reihen mit einander multiplicirt,

$$pq^{-1} = \alpha + (\alpha j^1 \mathfrak{J}' + \beta) x^1 + \text{etc. (wie in 13)}$$

Statt der $j' \mathfrak{J}'$, $j^2 \mathfrak{J}' \ldots$ hätte man hier auch die $j^1 J, j^2 J \ldots$ setzen können. Auch ist das Fortschreitungsgesetz der Glieder für die Werthe von q^{-1} und pq^{-1} [in a) b)] so deutlich und einleuchtend, daß sich daraus die Werthe für die allgemeinen Glieder $q^{-1}\,7\,(n+1)$ und $(pq^{-1})\,7\,(n+1)$ in (12, 13) sogleich ergeben.

51. Man hat hier in wenig Zeilen einen bündigen vollständigen Beweis der Grundformeln für die Entwickelung und Darstellung der Glieder in wiederkehrenden Reihen. Ein neues Beyspiel, wie sehr nicht selten die Combinationslehre die Beweise zusammenzieht und verkürzt!

c) Einige Beyspiele zur Erläuterung.

52. Vorerinnerung. Es giebt mehrere Wege, auf welchen sich die involutorischen Functionen ${}^n J$ und ${}^n \mathfrak{J}'$ ausführen und in ihren Werthen darstellen lassen. Von diesen will ich hier nur beyspielsweise die drey Anordnungen anführen, die man (E. S. c. a. A. S. 183) zu unmittelbarer Vergleichung neben einander gestellt, findet: die Classen involution nehmlich und die beyden lexikographischen (die Moivrische und Boscowichsche). Die Da

ſtellung iſt dort zwar nur für $n = 7$ gegeben, aber die dafür beygebrachten Regeln ſind allgemein.

53. Von dieſen drey Anordnungen werde ich hier die erſte und letzte (die Claſſeninvolution und die lexikographiſche Boscowichſche) nicht gebrauchen: jene nicht, weil ich von ihr in meinen frühern Schriften und auch in der erſten Sammlung c. a. A. häufigen Gebrauch gemacht habe, und ſelbige unter den übrigen ſchon am meiſten bekannt iſt; die nicht, weil ſie bey der folgenden Abhandlung von Herrn Trembley am ſchicklichſten ihre Anwendung finden wird.

54. Anbetreffend die combinatoriſche Anordnung, deren ich mich hier zu Entwicklung der Complexionen für die Involution ${}^{n}\mathfrak{J}^{r}$ bedienen werde: ſo findet man (Tafel IV, 14, 15) zwey verſchiedene Darſtellungen davon, wo man wegen der erſten (14), außer den dort angeführten Stellen, auch im Arch. d. Math. H. IV. S. 393 nachſehen kann. Die zweyte (15) anlangend, ſo gehört hieher folgende Aufgabe.

55. Aufgabe. Die Involution ${}^{n}\mathfrak{J}^{r}_{\binom{a,\,b,\,c,\,d}{1,\,2,\,3,\,4}}$ auszuführen.

Auſl. 1) Man ſetze die drey erſten Complexionen $a^{n-1}[a]$, $a^{n-2}[b]$, $a^{n-3}[c]$, als für ſich gegeben, unter einander, und continuire die a^{n-4}, a^{n-5}, a^{n-6} ... im Voraus nach der Ordnung. Die Complexionen der zugehörigen Klammern werden nach einander beſtimmt, wie folget:

2. Allen in der vorletzten Klammer ſtehenden Complexionen ſetze man b vor

3. in denjenigen Complexionen der letzten Klammer, die entweder nur einen Buchſtaben oder zwey ungleiche An-

fangsbuchstaben haben, verwechsele man den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers.

So geben (2 und 3 zusammen) die Complexionen einer neuen oder folgenden Klammer, aus den beyden nächstvorhergehenden.

4. Führte die Verwechslung (3) auf einen Buchstaben der nicht im Zeiger steht (der hier nur a, b, c, d nicht aber e, f ... enthält) so übergeht man die Complexion ganz.

56. Das giebt für die Involution $\overset{n}{\mathfrak{J}}\binom{a, b, c, d}{1, 2, 3, 4}$ folgende Complexionen

a^{n-1} [a]
a^{n-2} [b]
a^{n-3} [c]
a^{n-4} [b^2, d]
a^{n-5} [bc]
a^{n-6} [b^3, bd, c^2]
a^{n-7} [b^2c, cd]
a^{n-8} [b^4, b^2d, bc^2, d^2]
a^{n-9} [b^3c, bcd, c^3]
a^{n-10} [b^5, b^3d, b^2c^2, bd^2, c^2d]
u. s. w.

Diese Involution, wo n allgemein jede ganze positive Zahl vorstellen kann, ist zwar in Absicht des Zeigers (der hier mit d abbricht) beschränkt; die oben gegebenen Regeln aber sind allgemein, wie Folgendes zeigen wird.

57. Die Complexionen der Involution $\overset{n}{\mathfrak{J}}\binom{a,b,c,d,e...}{1,2,3,4,5...}$ zu finden, für welche die Menge der Buchstaben a, b, c, d ... eben so, wie der Summenexponent n, ganz unbestimmt ist,

bedient man sich der Vorschriften 1, 2, 3 der vorigen Aufgabe (55) mit Uebergehung von No. 4; weil der dort angegebene Fall hier, wo es keinen letzten Buchstaben giebt, nicht eintreten kann. Die Ausführung einer solchen Involution (hier Taf. IV. 15. und E. S. c. a. A. S. 202). Ein besonderer Fall davon, für n = 10 (Ebendas. S. 280). Dort habe ich aus der Involution für eine unbestimmte Menge von Elementen, die für eine bestimmte abgeleitet. Hier habe ich umgekehrt, die Menge der Elemente a, b, c, d erst bestimmt angenommen (55), und gezeigt, wie die Regel, durch Aufhebung der Beschränkung, für jede unbestimmte Menge passe.

58. Aus $^{n}\mathfrak{J}$ und ihren Complexionen folgen unmittelbar die für $^{n-1}\mathfrak{J}$, $^{n-2}\mathfrak{J}$, $^{n-3}\mathfrak{J}$ . . . oder für $^{n+1}\mathfrak{J}$, $^{n+2}\mathfrak{J}$, $^{n+3}\mathfrak{J}$ . . . wenn man in der $^{n}\mathfrak{J}$ Potenzen von a, durchgängig n — 1, n — 2, n — 3, . . . oder n + 1, n + 2, n + 3, . . . statt n setzt, die nebenstehenden Complexionen in den Klammern aber ganz unverändert beybehält. Eben so folgen, für bestimmte n, z. B. aus $^{10}\mathfrak{J}$ (Ebend. S. 280, 281) die $^{9}\mathfrak{J}$, $^{8}\mathfrak{J}$, . . . oder die $^{11}\mathfrak{J}$, $^{12}\mathfrak{J}$, . . . durch successive Hinwegnahme oder Hinzuthuung eines oder mehrerer a zu den Potenzen von a in $^{10}\mathfrak{J}$, mit Beybehaltung der nebenstehenden Complexionen in den Klammern. Ueberall muß man diese Veränderung so weit treiben, bis man auf a^{0} verfällt; die in der Klammer neben a^{0} stehenden Complexionen sind nehmlich jederzeit die letzten der Involution. Die Darstellung einer einzelnen Involution kann so zur Grundlage von unzählich viel andern dienen, die man vorwärts und rückwärts daraus finden kann.

59. Die einzelnen Complexionen von $^{n}\mathfrak{J}$, mit den zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten i versehen, geben $j^{n}\mathfrak{J}$. Von diesen Zahlen (Infin. Dign.

§. XIII. auch Arch. d. Math. H. IV. S. 388, 4). Die Vorzeichen der einzelnen Complexionen beurtheilt man aus den Vorzeichen der einzelnen a, b, c, d ... im Zeiger, die denen im Nenner entgegen gesetzt sind (23).

60. Exempel 1. Das 10de Glied des Bruches

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4} = q^{-1}$$

zu finden, setze man (12) $n+1=10$, also $n=9$; das giebt

$$\frac{1}{q}\, 7\,(9+1) = \underset{\begin{pmatrix} +a, & -b, & +c, & -d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}}{j^9 \mathfrak{J}^r x^9}$$

Die Vorzeichen der a, b, c, d im Zeiger der Involution sind nehmlich denen im Nenner des Bruchs, wie so eben erinnert worden ist (59), entgegengesetzt.

Das verlangte Glied aus der involutorischen Function zu entwickeln, befolge man

1) wegen der einzelnen Complexionen für $^9\mathfrak{J}^r$; die Vorschriften 1, 2, 3, 4 in (55) nach welchen man aus a^8a, a^7b, a^6c die übrigen findet; oder, man setze $n=9$ in (56) und nehme alles, bis mit $a^{9-9}=a^0$, und was daneben in der Klammer steht (58)

2) wegen der beyzufügenden Versetzungszahlen; die bekannten und (59) nachgewiesenen Regeln;

3) wegen der Vorzeichen der einzelnen Complexionen; die Bemerkung ebendaselbst. Das giebt zusammen $q^{-1} \varkappa 10 . x^9$ d. i.

$$q^{-7}710=\left\{\begin{matrix}+11a^9-8a^7b+7a^6c+21a^5b^2-6a^5d-30a^4bc\\-20a^3b^3+20a^3bd+10a^3c^2+30a^2b^2c-12a^2cd+5a^1b^4\\-12a^1b^2d-12a^1bc^2+3a^1d^2-4a^0b^1c+6a^0bcd+1a^0c^3\end{matrix}\right\}x^9$$

61. Eben ſo fände man, für eben den Zeiger, $j^8\mathfrak{J}x^8$ oder $q^{-1}x9.x^8$ d. i.

$$q^{-1}79=\left\{\begin{matrix}+1a^8-7a^6b+6a^5c+15a^4b^2-5a^4d\\-20a^3bc-10a^2b^3+12a^2bd+6a^2c^2+12ab^2c\\-6acd+1a^0b^4-3a^0b^2d-3a^0bc^2+1a^0d^2\end{matrix}\right\}x^8$$

entweder unmittelbar (aus 55; 1, 2, 3, 4 und 59) oder mittelbar aus $q^{-1}710$ (58, 60)

62. Exempel 2. Das 10de Glied des Bruchs

$$\frac{p}{q}=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4}=pq^{-x}$$

zu finden!

Man ſetze (13) $n+1=10$, alſo $n=9$; das giebt

$$\frac{p}{q}7(9+1)=(\alpha j^9\mathfrak{J}+\beta j^8\mathfrak{J}+\gamma j^7\mathfrak{J}+\delta j^6\mathfrak{J})x^9$$

$$\begin{pmatrix}+a, & -b, & +c, & -d\\1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}$$

Die Entwickelung von $j^9\mathfrak{J}$, $j^8\mathfrak{J}$ ſteht im vorigen Exempel, (60, 61) und gilt auch für $j^7\mathfrak{J}$, $j^6\mathfrak{J}$. Mehrere involutoriſche Functionen können hier nicht vorkommen, weil die Coefficienten im Zähler des Bruchs mit dem vierten (δ) abbrechen. Die Multiplication in α, β, γ, δ hat keine Schwierigkeit; auch wäre es überflüſſig (wegen deſſen, was ſchon im Ex. 1 ſteht) die einzelnen Complexionen von $\frac{p}{q}710$ hier beſonders abzuſetzen.

63. Exempel 3. Das 7de Glied der gebrochenen Function

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + 3x + 3x^2}{1+x-2x^2-2x^3}$$ zu finden.

Für $\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1+ax-bx^2-cx^3}$ wäre (13) für $n=6$

$$(pq^{-1})\,7(6+1) = (\alpha j^6\mathfrak{J}^r + \beta j^5\mathfrak{J}^r + \gamma j^4\mathfrak{J}^r)\,x^6$$

$$\begin{pmatrix} -a, & +b, & +c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

folglich, die involutorischausgedrückten Glieder gehörig entwickelt (55 oder 56 und 59)

$$\begin{array}{lll} \alpha j^6\mathfrak{J}^r & \beta j^5\mathfrak{J}^r & \gamma j^4\mathfrak{J}^r \\ = & = & = \\ \left.\begin{array}{l} +1a^6 \\ +5a^4b \\ -4a^3c \\ +6a^2b^2 \\ -6a^1bc \\ +1a^0b^3 \\ +1a^0c^3 \end{array}\right\}\alpha & \left.\begin{array}{l} -1a^5 \\ -4a^3b \\ +3a^2c \\ -3a^1b^2 \\ +2a^0bc \end{array}\right\}\beta & \left.\begin{array}{l} +1a^4 \\ +3a^2b \\ -2a^1c \\ +1a^0b^2 \end{array}\right\}\gamma \end{array}$$

Setzt man hier, in Beziehung auf den gegebenen Bruch, $\alpha=1$; $\beta=3$; $\gamma=3$; und $a=1$; $b=2$; $c=2$; so findet man

$$(pq^{-1})7 = (15.1 - 7.3 + 7.3)\,x^6 = 15x^6$$

Es ist auch wirklich $\frac{1 + 3x + 3x^2}{1+x-2x^2-2x^3} = 1+2x+3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7 + 31x^8 + 17x^9 + 63x^{10} + \text{etc.}$

64. Bey der Anwendung auf bestimmte Fälle, kann man entweder (wie in vorhergehendem Exempel 3) die Vorzeichen der einzelnen Buchstabencomplexionen gleich so abändern, wie sie die Zeichen der Coefficienten im Zähler und Nenner bestimmen, oder man kann allen Buchstabencomplexionen das Vorzeichen + lassen (wie es sich für positive $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ im Zähler und für den Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3 -$ etc. gehört [21]) und die Aenderung der Zeichen erst mit der Substitution der Zahlen (wie in folgenden Exempel 4) vornehmen; wobey man nicht vergessen muß: die Zeichen der Zahlen im Zähler unverändert beyzubehalten, statt der Zeichen im Nenner aber die entgegengesetzten zu nehmen, und so die Zahlen zu substituiren. Wenn im Zähler oder Nenner des gegebenen Bruchs ein Zwischenglied fehlt, so wird der zugehörige Coefficient Null gesetzt.

65. Exempel 4. Für die gebrochene Function

$$\frac{p}{q} = \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 5x + x^2}$$

wäre das 6te Glied von $\frac{p}{q}$ d. i. $(pq^{-1})\,7\,(5+1)$

$$= (\alpha j^5 \mathfrak{J}' + \beta j^4 \mathfrak{J}' + \gamma j^3 \mathfrak{J}' + \delta j^2 \mathfrak{J}')\, x^5$$

$$= \left(2 \left\{ \begin{matrix} a^5 \\ 4a^3b \\ 3ab^2 \end{matrix} \right\} + 0 + 1 \left\{ \begin{matrix} a^3 \\ 2ab \end{matrix} \right\} - 3 \left\{ \begin{matrix} a^2 \\ b \end{matrix} \right\} \right) x^5$$

$$= [2\,(3125 - 500 + 15) + 1\,(125 - 10) - 3\,(25 - 1)]\, x^5$$

$$= (5280 + 115 - 72)\, x^5 = 5323 x^5$$

wenn man nämlich $\alpha = 2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\delta = -3$; und $a = 5$; $b = -1$ gehörig substituirt.

66. Das 6te Glied, das man hier (nach 55 oder durch Beyhülfe von 56) von den vorhergehenden unabhängig ge-

funden hat, fände man dependent von diesen, auf dem gewöhnlichen Wege, vermittelst der Beziehungsscale $+5-1$ (27) eben so. Es ist nämlich (11, a)

$$\begin{array}{lll}
 & P\varkappa 1 & = 2 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 1)x & = +10x \\
+(& 1 + 5P\varkappa 2 - 1P\varkappa 1)x^2 & = +49x^2 \\
+(& -3 + 5P\varkappa 3 - 1P\varkappa 2)x^3 & = +232x^3 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 4 - 1P\varkappa 3)x^4 & = +1111x^4 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 5 - 1P\varkappa 4)x^5 & = +5323x^5 \\
+ & \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Segner, der dieses Exempel unter mehrern (Elem. Anal. Infin. P. II. §. 568) nach der Beziehungsscale $+5-1$ berechnet, aufführt, hat durch einen Rechnungsfehler $4444x^5$ statt $5323x^5$ gesetzt.

Ferner: Der unächte Bruch des Exempels $\frac{-3x^3+x^2+2}{x^2-5x+1}$ enthält die ganze Function $-3x-14$ und den eigentlichen Bruch $\frac{16-67x}{1-5x+x^2} = 16+13x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5+$ etc. Jene und dieser zusammen, geben $2+10x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5+$ etc., wie vorhin.

67. Ich habe in dieser Abhandlung durchgängig, die recurrirende dependente Form, von der directen independenten, unterschieden. Nun kommen zwar in der letztern auch Recurrenzen vor (41), aber der Umstand, daß sie combinatorisch-involutorischer Art sind, macht sie ganz unschädlich und absoluten Independenzen vollkommen gleichgültig. Es wird der Mühe werth seyn, zum Schlusse noch die unmittelbare Verglei-

chung der beyderley Recurrenzen, der gemeinen und combinatoriſchen, an einem Beyſpiele vorzulegen.

68. Für $\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = P$

wäre

in dependenter Form u. gemein. Recurrenz	in independenter Form u. combinat. Recurrenz
P	oder pq^{-1}
$= \alpha$	$= \alpha q^{-1}\varkappa 1$
$+[\beta + aP\varkappa 1]\,x^1$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 2 + \beta q^{-1}\varkappa 1]\,x^1$
$+[\gamma + aP\varkappa 2 + bP\varkappa 1]\,x^2$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 3 + \beta q^{-1}\varkappa 2 + \gamma q^{-1}\varkappa 1]\,x^2$
$+[\delta + aP\varkappa 3 + bP\varkappa 2 + cP\varkappa 1]\,x^3$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 4 + \beta q^{-1}\varkappa 3 + \gamma q^{-1}\varkappa 2 + \delta q^{-1}\varkappa 1]\,x^3$
⁂	⁂

nach 4, a; 4, b; wenn man dort $r = s = 1$, und $p\varkappa 1 = \alpha$; $p\varkappa 2 = \beta$; $p\varkappa 3 = \gamma$; ... und $q\varkappa 1 = 1$; $q\varkappa 2 = a$; $q\varkappa 3 = b$; ... ſetzt.

69. Die Vergleichung beyder Darſtellungen zeigt folgendes:

1) In dem Werthe für P kommen, auſſer den a, b, c ... des Nenners, als den einzelnen Gliedern der Moivriſchen Beziehungsſcale (27) auch noch die α, β, γ, δ ... des Zählers vor. Der Ausdruck für P ſtellt demnach eine ſeriem recurrentem impuram (29) dar.

Der gleichgültige Ausdruck für pq^{-1} hingegen, hat ganz die Form von einer ſerie recurrente pura, wobey die α, β, γ, δ ... gleichſam die Stelle der einzelnen Glieder einer

Beziehungsscale vertreten, die man auch die Beziehungsscale für die combinatorische Recurrenz nennen könnte.

2) Der Ausdruck für P ist demnach zusammengesetzter, als der für pq^{-1}, und wird es dadurch noch mehr, daß in den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... die α, β, γ ... und a, b, c, ... unter einander gemengt vorkommen, die in den einzelnen Gliedern von pq^{-1} aufs deutlichste von einander gesondert sind. Von den hierbey aufgeführten Producten ist immer der erste Factor einer der Buchstaben α, β, γ ... aus der Reihe p, der andere Factor, als Coefficient von q^{-1}, bezieht sich blos auf 1, a, b, c ... und enthält nichts von α, β, γ ...

3) Diese größere Einfachheit im letztern Falle, hat ihren Grund vornehmlich in der weiter getriebenen Analyse der Reihe für pq^{-1}. Der Ausdruck für P zeigt nämlich blos, wie folgende Glieder der Reihe von vorhergehenden derselben Reihe abhängig sind. Eine ähnliche Dependenz der Glieder, aber auf die Elementarreihe q^{-1} bezogen, zeigt der Werth für pq^{-1}, der also weiter zerlegt ist, als jener für P. Endlich

4) Kann man die Coefficienten $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... für P, nach gemeiner Recurrenz, nicht anders als einen nach dem andern, keinen aber außer der Ordnung, durch die gegebenen α, β, γ ..., a, b, c ... ausdrücken. Die $q^{-1}\varkappa 1$, $q^{-1}\varkappa 2$, $q^{-1}\varkappa 3$ ... hingegen für pq^{-1}, lassen sich, nach combinatorischer Recurrenz, durch die $1, j^1\mathfrak{J}, j^2\mathfrak{J}$ ... (12; Taf. III) unabhängig von einander darstellen.

70. Setzt man die involutorischen Functionen (69, 4) statt jener Lokalzeichen in (68) so erhält man

$$
\begin{aligned}
pq^{-1} = {} & \alpha \\
& + [\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta] x^1 \\
& + [\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma] x^2 \\
& + [\alpha j^3 \mathfrak{J} + \beta j^2 \mathfrak{J} + \gamma j^1 \mathfrak{J} + \delta] x^3 \\
& \quad = \qquad = \qquad = \qquad = \\
& \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

alles, wie in 13; Taf. III. Für $j^0 \mathfrak{J}$, das hier auch in seiner Ordnung mit vorkommen könnte, ist überall sein Werth 1 gesetzt worden.

71. Die Vergleichung des Ausdrucks für P (68) mit dem für pq^{-1} (70) giebt

$$
\begin{aligned}
P\varkappa 1 &= \alpha & P\varkappa 4 &= a(\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma) \\
P\varkappa 2 &= a(\alpha) & &\quad + b(\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta) \\
&\quad + \beta & &\quad + c(\alpha) \\
P\varkappa 3 &= a(\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta) & &\quad + \delta \\
&\quad + b(\alpha) & & \\
&\quad + \gamma & & \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}
$$

So ließen sich also auch die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... (in 68) involutorisch zerlegen und independent darstellen. Dies nur, um zu zeigen, was man zu dieser Absicht für die dortigen $P\varkappa n$ thun könne; denn sonst wird man wohl keinen Augenblick anstehen, die viel kürzere Formel (70) der obigen weitläuftigern Zerlegung der höhern Summen in niedrigere in der Ausübung vorzuziehen.

Setzt man (in 68) $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta =$ etc. $= 0$, also $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$, so fällt in dem Ausdrucke für P die

Beziehungsscale vertreten, die man auch die Beziehungsscale für die combinatorische Recurrenz nennen könnte.

2) Der Ausdruck für P ist demnach zusammengesetzter, als der für pq^{-1}, und wird es dadurch noch mehr, daß in den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... die α, β, γ ... und a, b, c, ... unter einander gemengt vorkommen, die in den einzelnen Gliedern von pq^{-1} aufs deutlichste von einander gesondert sind. Von den hierbey aufgeführten Producten ist immer der erste Factor einer der Buchstaben α, β, γ ... aus der Reihe p, der andere Factor, als Coefficient von q^{-1}, bezieht sich blos auf 1, a, b, c ... und enthält nichts von α, β, γ ...

3) Diese größere Einfachheit im letztern Falle, hat ihren Grund vornehmlich in der weiter getriebenen Analyse der Reihe für pq^{-1}. Der Ausdruck für P zeigt nämlich blos, wie folgende Glieder der Reihe von vorhergehenden derselben Reihe abhängig sind. Eine ähnliche Dependenz der Glieder, aber auf die Elementarreihe q^{-1} bezogen, zeigt der Werth für pq^{-1}, der also weiter zerlegt ist, als jener für P. Endlich

4) Kann man die Coefficienten $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... für P, nach gemeiner Recurrenz, nicht anders als einen nach dem andern, keinen aber außer der Ordnung, durch die gegebenen α, β, γ ... a, b, c ... ausdrücken. Die $q^{-1}\varkappa 1$, $q^{-1}\varkappa 2$, $q^{-1}\varkappa 3$ ... hingegen für pq^{-1}, lassen sich, nach combinatorischer Recurrenz, durch die $1, j^1 \mathfrak{J}^r, j^2 \mathfrak{J}^r$ ... (12; Taf. III) unabhängig von einander darstellen.

70. Setzt man die involutorischen Functionen (69, 4) statt jener Lokalzeichen in (68) so erhält man

$$pq^{-1} = \alpha + [\alpha j^{1}\mathfrak{J} + \beta]x^{1} + [\alpha j^{2}\mathfrak{J} + \beta j^{1}\mathfrak{J} + \gamma]x^{2} + [\alpha j^{3}\mathfrak{J} + \beta j^{2}\mathfrak{J} + \gamma j^{1}\mathfrak{J} + \delta]x^{3} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

alles, wie in 13; Taf. III. Für $j^{0}\mathfrak{J}$, das hier auch in seiner Ordnung mit vorkommen könnte, ist überall sein Werth 1 gesetzt worden.

71. Die Vergleichung des Ausdrucks für P (68) mit dem für pq^{-1} (70) giebt

$$P\varkappa 1 = \alpha$$
$$P\varkappa 2 = a(\alpha) + \beta$$
$$P\varkappa 3 = a(\alpha j^{1}\mathfrak{J} + \beta) + b(\alpha) + \gamma$$
$$P\varkappa 4 = a(\alpha j^{2}\mathfrak{J} + \beta j^{1}\mathfrak{J} + \gamma) + b(\alpha j^{1}\mathfrak{J} + \beta) + c(\alpha) + \delta$$

u. s. w.

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

So ließen sich also auch die P×1, P×2, P×3 ... (in 68) involutorisch zerlegen und independent darstellen. Dies nur, um zu zeigen, was man zu dieser Absicht für die dortigen P×n thun könne; denn sonst wird man wohl keinen Augenblick anstehen, die viel kürzere Formel (70) der obigen weitläuftigern Zerlegung der höhern Summen in niedrigere in der Ausübung vorzuziehen.

Setzt man (in 68) $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta =$ etc. $= 0$, also $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$, so fällt in dem Ausdrucke für P die

§. XIII. auch Arch. d. Math. H. IV. S. 388, 4). Die Vorzeichen der einzelnen Complexionen beurtheilt man aus den Vorzeichen der einzelnen a, b, c, d ... im Zeiger, die denen im Nenner entgegen gesetzt sind (23).

60. Exempel 1. Das 10de Glied des Bruches

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4} = q^{-1}$$

zu finden, setze man (12) $n+1=10$, also $n=9$; das giebt

$$\frac{1}{q}\, 7\,(9+1) = \underset{\begin{pmatrix} +a, & -b, & +c, & -d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}}{j^9 \mathfrak{J}\, x^9}$$

Die Vorzeichen der a, b, c, d im Zeiger der Involution sind nehmlich denen im Nenner des Bruchs, wie so eben erinnert worden ist (59), entgegengesetzt.

Das verlangte Glied aus der involutorischen Function zu entwickeln, befolge man

1) wegen der einzelnen Complexionen für ${}^9\mathfrak{J}$; die Vorschriften 1, 2, 3, 4 in (55) nach welchen man aus a^8a, a^7b, a^6c die übrigen findet; oder, man setze $n=9$ in (56) und nehme alles, bis mit $a^{9-9}=a^0$, und was daneben in der Klammer steht (58)

2) wegen der beyzufügenden Versetzungszahlen; die bekannten und (59) nachgewiesenen Regeln;

3) wegen der Vorzeichen der einzelnen Complexionen; die Bemerkung ebendaselbst. Das giebt zusammen $q^{-1} \times 10 . x^9$ d. i.

$$q^{-7}7_{10}=\left\{\begin{matrix}+11a^9-8a^7b+7a^6c+21a^5b^2-6a^5d-30a^4bc\\-20a^3b^3+20a^3bd+10a^3c^2+30a^2b^2c-12a^2cd+5a^1b^4\\-12a^1b^2d-12a^1bc^2+3a^1d^2-4a^0b^1c+6a^0bcd+1a^0c^3\end{matrix}\right\}x^9$$

61. Eben so fände man, für eben den Zeiger, $j^8\mathfrak{J}x^8$ oder $q^{-1}x9.x^8$ d. i.

$$q^{-1}7_9=\left\{\begin{matrix}+1a^8-7a^6b+6a^5c+15a^4b^2-5a^4d\\-20a^3bc-10a^2b^3+12a^2bd+6a^2c^2+12ab^2c\\-6acd+1a^0b^4-3a^0b^2d-3a^0bc^2+1a^0d^2\end{matrix}\right\}x^8$$

entweder unmittelbar (aus 55; 1, 2, 3, 4 und 59) oder mittelbar aus $q^{-1}7_{10}$ (58, 60)

62. Exempel 2. Das 10de Glied des Bruchs

$$\frac{p}{q}=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4}=pq^{-1}$$

zu finden!

Man setze (13) $n+1=10$, also $n=9$; das giebt

$$\frac{p}{q}7_{(9+1)}=(\alpha j^9\mathfrak{J}^1+\beta j^8\mathfrak{J}+\gamma j^7\mathfrak{J}+\delta j^6\mathfrak{J})\,x^9$$

$$\begin{pmatrix}+a, & -b, & +c, & -d\\ 1, & 2, & 3, & 4\end{pmatrix}$$

Die Entwickelung von $j^9\mathfrak{J}$, $j^8\mathfrak{J}$ steht im vorigen Exempel, (60, 61) und gilt auch für $j^7\mathfrak{J}$, $j^6\mathfrak{J}$. Mehrere involutorische Functionen können hier nicht vorkommen, weil die Coefficienten im Zähler des Bruchs mit dem vierten (δ) abbrechen. Die Multiplication in α, β, γ, δ hat keine Schwierigkeit; auch wäre es überflüssig (wegen dessen, was schon im Ex. 1 steht) die einzelnen Complexionen von $\frac{p}{q}7_{10}$ hier besonders abzusetzen.

63. Exempel 3. Das 7de Glied der gebrochenen Function

$$\frac{p}{q} = \frac{1 + 3x + 3x^2}{1+x-2x^2-2x^3} \text{ zu finden.}$$

Für $\frac{p}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1+ax-bx^2-cx^3}$ wäre (13) für $n=6$

$$(pq^{-1})\,7(6+1) = (\alpha j^6 \mathfrak{J} + \beta j^5 \mathfrak{J} + \gamma j^4 \mathfrak{J})\,x^6$$

$$\begin{pmatrix} -a, & +b, & +c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

folglich, die involutorischausgedrückten Glieder gehörig entwickelt (55 oder 56 und 59)

$$\begin{array}{ccc} \alpha j^6 \mathfrak{J} & \beta j^5 \mathfrak{J} & \gamma j^4 \mathfrak{J} \\ = & = & = \\ \left.\begin{array}{l} +1a^6 \\ +5a^4b \\ -4a^3c \\ +6a^2b^2 \\ -6a^1bc \\ +1a^0b^3 \\ +1a^0c^2 \end{array}\right\}\alpha & \left.\begin{array}{l} -1a^5 \\ -4a^3b \\ +3a^2c \\ -3a^1b^2 \\ +2a^0bc \end{array}\right\}\beta & \left.\begin{array}{l} +1a^4 \\ +3a^2b \\ -2a^1c \\ +1a^0b^2 \end{array}\right\}\gamma \end{array}$$

Setzt man hier, in Beziehung auf den gegebenen Bruch, $\alpha=1$; $\beta=3$; $\gamma=3$; und $a=1$; $b=2$; $c=2$; so findet man

$$(pq^{-1})\,7\,7 = (15.1-7.3+7.3)\,x^6 = 15x^6$$

Es ist auch wirklich $\frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3} = 1+2x+3x^2 + 3x^3 + 7x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 9x^7 + 31x^8 + 17x^9 + 63x^{10} +$ etc.

64. Bey der Anwendung auf bestimmte Fälle, kann man entweder (wie in vorhergehendem Exempel 3) die Vorzeichen der einzelnen Buchstabencomplexionen gleich so abändern, wie sie die Zeichen der Coefficienten im Zähler und Nenner bestimmen, oder man kann allen Buchstabencomplexionen das Vorzeichen + lassen (wie es sich für positive $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ im Zähler und für den Nenner $1 - ax - bx^2 - cx^3 -$ etc. gehört [21]) und die Aenderung der Zeichen erst mit der Substitution der Zahlen (wie in folgenden Exempel 4) vornehmen; wobey man nicht vergessen muß: die Zeichen der Zahlen im Zähler unverändert beyzubehalten, statt der Zeichen im Nenner aber die entgegengesetzten zu nehmen, und so die Zahlen zu substituiren. Wenn im Zähler oder Nenner des gegebenen Bruchs ein Zwischenglied fehlt, so wird der zugehörige Coefficient Null gesetzt.

65. Exempel 4. Für die gebrochene Function

$$\frac{p}{q} = \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 5x + x^2}$$

wäre das 6te Glied von $\frac{p}{q}$ d. i. $(pq^{-1})\,7\,(5+1)$

$$= (\alpha j^5 \mathfrak{J} + \beta j^4 \mathfrak{J} + \gamma j^3 \mathfrak{J} + \delta j^2 \mathfrak{J})\, x^5$$

$$= \left(2 \left\{ \begin{matrix} a^5 \\ 4a^3b \\ 3ab^2 \end{matrix} \right\} + 0 + 1 \left\{ \begin{matrix} a^3 \\ 2ab \end{matrix} \right\} - 3 \left\{ \begin{matrix} a^2 \\ b \end{matrix} \right\} \right) x^5$$

$$= [2\,(3125 - 500 + 15) + 1\,(125 - 10) - 3\,(25 - 1)]\,x^5$$

$$= (5280 + 115 - 72)\,x^5 = 5323x^5$$

wenn man nämlich $\alpha = 2$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\delta = -3$; und $a = 5$; $b = -1$ gehörig substituirt.

66. Das 6te Glied, das man hier (nach 55 oder durch Beyhülfe von 56) von den vorhergehenden unabhängig ge-

funden hat, fände man dependent von diesen, auf dem gewöhnlichen Wege, vermittelst der Beziehungsscale $+5-1$ (27) eben so. Es ist nämlich (11, a)

$$\begin{array}{lll}
 & P\varkappa 1 & = 2 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 1)x & = +10x \\
+(& 1 + 5P\varkappa 2 - 1P\varkappa 1)x^2 & = +49x^2 \\
+(& -3 + 5P\varkappa 3 - 1P\varkappa 2)x^3 & = +232x^3 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 4 - 1P\varkappa 3)x^4 & = +1111x^4 \\
+(& 0 + 5P\varkappa 5 - 1P\varkappa 4)x^5 & = +5323x^5 \\
+ & \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Segner, der dieses Exempel unter mehrern (Elem. Anal. Infin. P. II. §. 568) nach der Beziehungsscale $+5-1$ berechnet, aufführt, hat durch einen Rechnungsfehler $4444x^5$ statt $5323x^5$ gesetzt.

Ferner: Der unächte Bruch des Exempels $\frac{-3x^3+x^2+2}{x^2-5x+1}$ enthält die ganze Function $-3x-14$ und den eigentlichen Bruch $\frac{16-67x}{1-5x+x^2} = 16+13x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5+$ etc. Jene und dieser zusammen, geben $2+10x+49x^2+232x^3+1111x^4+5323x^5+$ etc., wie vorhin.

67. Ich habe in dieser Abhandlung durchgängig, die recurrirende dependente Form, von der directen independenten, unterschieden. Nun kommen zwar in der letztern auch Recurrenzen vor (41), aber der Umstand, daß sie combinatorisch-involutorischer Art sind, macht sie ganz unschädlich und absoluten Independenzen vollkommen gleichgültig. Es wird der Mühe werth seyn, zum Schlusse noch die unmittelbare Verglei-

chung der beyderley Recurrenzen, der gemeinen und combinatorischen, an einem Beyspiele vorzulegen.

68. Für $\frac{P}{q} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.}} = P$

wäre

in dependenter Form u. gemein. Recurrenz	in independenter Form u. combinat. Recurrenz
P	oder pq^{-1}
$= \alpha$	$= \alpha q^{-1}\varkappa 1$
$+[\beta + aP\varkappa 1]\,x^1$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 2 + \beta q^{-1}\varkappa 1]\,x^1$
$+[\gamma + aP\varkappa 2 + bP\varkappa 1]\,x^2$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 3 + \beta q^{-1}\varkappa 2 + \gamma q^{-1}\varkappa 1]\,x^2$
$+[\delta + aP\varkappa 3 + bP\varkappa 2 + cP\varkappa 1]\,x^3$	$+[\alpha q^{-1}\varkappa 4 + \beta q^{-1}\varkappa 3 + \gamma q^{-1}\varkappa 2 + \delta q^{-1}\varkappa 1]\,x^3$
$\ldots$	$\ldots$

nach 4, a; 4, b; wenn man dort $r = s = 1$, und $p\varkappa 1 = \alpha$; $p\varkappa 2 = \beta$; $p\varkappa 3 = \gamma$; ... und $q\varkappa 1 = 1$; $q\varkappa 2 = a$; $q\varkappa 3 = b$; ... setzt.

69. Die Vergleichung beyder Darstellungen zeigt folgendes:

1) In dem Werthe für P kommen, ausser den a, b, c... des Nenners, als den einzelnen Gliedern der Moivrischen Beziehungsscale (27) auch noch die α, β, γ, δ... des Zählers vor. Der Ausdruck für P stellt demnach eine seriem recurrentem impuram (29) dar.

Der gleichgültige Ausdruck für pq^{-1} hingegen, hat ganz die Form von einer serie recurrente pura, wobey die α, β, γ, δ... gleichsam die Stelle der einzelnen Glieder einer

Beziehungsscale vertreten, die man auch die Beziehungsscale für die combinatorische Recurrenz nennen könnte.

2) Der Ausdruck für P ist demnach zusammengesetzter, als der für pq^{-1}, und wird es dadurch noch mehr, daß in den $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... die α, β, γ ... und a, b, c, ... unter einander gemengt vorkommen, die in den einzelnen Gliedern von pq^{-1} aufs deutlichste von einander gesondert sind. Von den hierbey aufgeführten Producten ist immer der erste Factor einer der Buchstaben α, β, γ ... aus der Reihe p, der andere Factor, als Coefficient von q^{-1}, bezieht sich blos auf 1, a, b, c ... und enthält nichts von α, β, γ ...

3) Diese größere Einfachheit im letztern Falle, hat ihren Grund vornehmlich in der weiter getriebenen Analyse der Reihe für pq^{-1}. Der Ausdruck für P zeigt nämlich blos, wie folgende Glieder der Reihe von vorhergehenden derselben Reihe abhängig sind. Eine ähnliche Dependenz der Glieder, aber auf die Elementarreihe q^{-1} bezogen, zeigt der Werth für pq^{-1}, der also weiter zerlegt ist, als jener für P. Endlich

4) Kann man die Coefficienten $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... für P, nach gemeiner Recurrenz, nicht anders als einen nach dem andern, keinen aber außer der Ordnung, durch die gegebenen α, β, γ ..., a, b, c ... ausdrücken. Die $q^{-1}\varkappa 1$, $q^{-1}\varkappa 2$, $q^{-1}\varkappa 3$ ... hingegen für pq^{-1}, lassen sich, nach combinatorischer Recurrenz, durch die $1, j^1 \mathrm{J}^r, j^2 \mathrm{J}^r$ ... (12; Taf. III) unabhängig von einander darstellen.

70. Setzt man die involutorischen Functionen (69, 4) statt jener Lokalzeichen in (68) so erhält man

$$pq^{-1} = \alpha$$
$$+ [\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta] x^1$$
$$+ [\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma] x^2$$
$$+ [\alpha j^3 \mathfrak{J} + \beta j^2 \mathfrak{J} + \gamma j^1 \mathfrak{J} + \delta] x^3$$
$$= \quad = \quad = \quad =$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

alles, wie in 13; Taf. III. Für $j^0 \mathfrak{J}$, das hier auch in seiner Ordnung mit vorkommen könnte, ist überall sein Werth 1 gesetzt worden.

71. Die Vergleichung des Ausdrucks für P (68) mit dem für pq^{-1} (70) giebt

$P\varkappa 1 = \alpha$
$P\varkappa 2 = a(\alpha) + \beta$
$P\varkappa 3 = a(\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta) + b(\alpha) + \gamma$
$P\varkappa 4 = a(\alpha j^2 \mathfrak{J} + \beta j^1 \mathfrak{J} + \gamma) + b(\alpha j^1 \mathfrak{J} + \beta) + c(\alpha) + \delta$
u. s. w.

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

So ließen sich also auch die $P\varkappa 1$, $P\varkappa 2$, $P\varkappa 3$ ... (in 68) involutorisch zerlegen und independent darstellen. Dies nur, um zu zeigen, was man zu dieser Absicht für die dortigen $P\varkappa n$ thun könne; denn sonst wird man wohl keinen Augenblick anstehen, die viel kürzere Formel (70) der obigen weitläuftigern Zerlegung der höhern Summen in niedrigere in der Ausübung vorzuziehen.

Setzt man (in 68) $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = \delta =$ etc. $= 0$, also $\frac{p}{q} = \frac{1}{q}$, so fällt in dem Ausdrucke für P die

ganze erſte Verticalreihe (das Glied $\alpha = 1$ ausgenommen) und in dem Werthe für q^{-1} die ganze zweyte Verticalreihe der Coefficienten weg. Im letztern Falle kommt pq^{-1}, das iſt hier,

$$q^{-1} \begin{cases} = q^{-1}\varkappa 1 + q^{-1}\varkappa 2.x^1 + q^{-1}\varkappa 3.x^2 + \text{etc.} \\ = 1 + j^1\mathfrak{J}^1 x^1 + j^2\mathfrak{J}^1 x^2 + \text{etc.} \end{cases}$$

vollkommen, wie in 12; Taf. III.

73. Für die combinatoriſche Anordnung der einzelnen Complexionen von ${}^n\mathfrak{J}^r$ habe ich bisher durchgängig die Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung (15; Taf. IV) benutzt; man kann aber auch dafür die Boscovich-Hindenburgiſche (16; Taf. IV, und Taf. V. Abh. III) gebrauchen. Davon mit mehrerm bey Gelegenheit der folgenden Abhandlung von Herrn Trembley.

74. Die Benennung Moivre-Hindenburgiſche Darſtellung rührt von Herrn Prof. Pfaff her, der ſelbige in ſeinen vortreflichen Disquiſitionibus analyticis (p. 300, 6 ſeq.) eingeführt und durchgängig gebraucht hat. Ich habe nehmlich das Moivriſche Geſetz [f]) der Buchſtabenproducte bey den Coefficienten des Polynomialtheorems weiter analyſirt und gezeigt, wie ſolches lexikographiſch ſich anordnen und involutoriſch vereinfachen (14; Taf. IV) auch zu einer Involution der vollkommenſten Art (15; Ebendaſ.) verarbeiten und erheben laſſe; und in dieſer eben ſo einfachen als allgemeinen Geſtalt verherrlicht ſich die LEX NATVRAE, wie ſie de Moivre nennt, durch ihre wunderthätige Kraft am meiſten.

f) Eine deutliche Darſtellung des Moivriſchen Geſetzes in der Kürze; Arch. der Math. H. IV. S. 387, 3. Eine weitere Analyſe deſſelben führt auf die involutoriſchen Darſtellungen (14, 15, Taf. IV).

75. Statt Boscowich-Hindenburgiſche, könnte man auch Boscowich-Trembleyiſche Darſtellung ſagen; denn ich werde in der Folge zeigen, daß das Reſultat der Trembleyiſchen Operationen mit dem der Boscovichſchen combinatoriſchen Anordnung Glied für Glied übereinſtimme, und nothwendig damit übereinſtimmen müſſe.

76. Ich habe (Nov. Syſt. Comb. p. LXXXI, 4) gezeigt, wie man auch gebrochene Functionen, wie

$$\frac{p}{q} = \frac{az^{\alpha} + bz^{b} + cz^{c} + \text{etc.}}{\alpha z^{\alpha} + \beta z^{\beta} + \gamma z^{\gamma} + \text{etc.}} = pq^{-1}$$

vermittelſt der ${}^{n}Az^{*}$, ${}^{n}Bz^{*}$, ${}^{n}Cz^{*}$ u. ſ. w. (Ebend. p. XLIV, 18) combinatoriſch darſtellen, und in Reihen entwickeln könne. Jener Quotient läßt ſich nehmlich auf

$$\frac{p}{q} = \frac{a+b+c+d+e+\text{etc.}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc.}} = pq^{-1}$$

zurückführen (Ebend. p. LXIV, 6 und Infin. Dign. p. 148 — 150). Ich will mich aber hier dabey nicht aufhalten.

II.

Verſuch eines leichten und bequemen Verfahrens, das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen zu finden; von Herrn Johann Trembley, ordentl. Mitgliede der Königl. Akad. der Wiſſenſch. zu Berlin.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Gegenwärtige Abhandlung eines ſcharfſinnigen, durch mehrere gründliche Schriften und einzelne akademiſche Abhandlungen rühmlichſt bekannten Analyſten, iſt ein wichtiges Aktenſtück für das Archiv der combinatoriſchen Analyſis. Sie verdient um ſo mehr ſorgfältig darinn aufbewahrt zu werden, da ſie eine höchſt ſeltene Erſcheinung darſtellt; indem aus der Art, wie hier der Gegenſtand behandelt wird, deutlich erhellet, daß der Verfaſſer derſelben zu den wenigen Geometern gehöre, welche den combinatoriſchen Involutionen mehr oder weniger nahe gekommen ſind, ſolche auch wohl, ohne im geringſten etwas davon zu ahnden, ſchon erreicht haben [a]). Auch haben Schriften dieſer Art, neben ihren eigenthümlichen Vorzügen, noch das beſondere Verdienſt, daß ſie recht dazu geeignet ſind, die Vortreflichkeit

a) Von dieſem äußerſt merkwürdigen Phänomen habe ich an verſchiedenen Orten ausführlich gehandelt. Die dahin gehörigen Stellen findet man (Erſte Samml. comb. anal. Abh. S. 303, 304) beyſammen angeführt. Die Reihen, die Herr Trembley für das allgemeine Glied findet, geben, wie ich zeigen werde, eine combinatoriſche Anordnung in aller Form.

der combinatorisch-analytischen Methode und ihrer Zeichnung, in das helleste Licht zu setzen, und alle Zweifel, die man wider sie, theils aus Unkunde theils aus nicht gnüglicher Bekanntschaft mit ihr, erhoben hat, zu tilgen und gänzlich zu zerstreuen. Zu vollständiger Erreichung dieser Absicht habe ich dieser Abhandlung verschiedene Erläuterungen, Vergleichungen und Nachweisungen, theils in Anmerkungen unmittelbar unter dem Text, theils in einem besondern Aufsatze (III) beygefügt; vornehmlich solchen Lesern zugefallen, welchen combinatorische Behandlungen, Darstellungen und Entwickelungen, noch nicht recht geläufig sind.

Der Hauptzweck, den Herr Professor Trembley in seinem Aufsatze über die widerkehrenden Reihen beabsichtiget, ist eben derselbe, den Herr Etatsrath Tetens in seiner Formula Polynomiorum [b]) sich vorgesetzt hatte: „Auffindung eines allgemeinen Gliedes der Reihe, auf einem leichtern und bequemern Wege, als die vorherbekannten; durch „Abwerfung der Fesseln der Dependenz folgender Glieder „von vorhergehenden, welche, wie die Erfahrung lehrt, besonders bey Reihen mit Buchstabencoefficienten, so lästig „und drückend sind; mit Vermeidung der gewöhnlichen so „beschwerlichen Substitutionen und Reductionen, vermittelst „regelmäßiger leicht zu formirender Reihen." Auch ist Herrn Trembley's Verfahren, in dem Sinne, in welchem Herr Tetens das Wort nimmt (E. S. c. a. A. S. 2, 3) völlig und durchaus analytisch; indem es keine besonderen, von den bisher üblichen analytischen Opera-

b) Ich habe sie, mit vielen erläuternden Anmerkungen versehen, in die Erste Sammlung comb. anal. Abhandlungen (S. 1—47) eingerückt. Auch ist solche aus dem Dänischen von Herrn Degen übersetzt, neuerlich wieder abgedruckt worden. (Physik. chem. naturhist. mathem. Abhandl. aus der neuen Sammlung der Schriften der Königl. Dän. Gesellsch. der Wiss. erst. Band. erste Abth. (S. 111—152) Kopenh. 1798).

tionen ganz verschiedenen Arbeiten (dahin Herr Tetens die combinatorischen Operationen und Involutionen rechnet) erfordert.

Bey dieser Uebereinstimmung in dem Hauptzwecke, unterscheiden sich doch beyde Abhandlungen in zwey Stücken sehr merklich von einander: Einmal, daß nach Herrn Trembley (was bey der Tetenschen formula polynomiorum nicht geschieht) zwey wesentlich von einander verschiedene Elemente, Buchstabencomplexionen und ihre Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten, ausdrücklich von einander geschieden, beyder Gesetze und Entwickelungen einzeln bestimmt, und so, durch eine weiter eindringende Analyse, die Endresultate, hier leichter als dort, gefunden werden und sich darstellen lassen. — Dann, daß in gegenwärtiger Abhandlung nirgends eine Vergleichung des darinn vorkommenden Verfahrens, mit dem combinatorischen angestellt, noch viel weniger nachtheilig darüber abgesprochen wird c). Herr Professor Trembley hat vermuthlich von meiner bereits 1781 bekanntgemachten combinatorischen Auflösung des Problems

c) Wie Herr Etatsrath Tetens in seinem Aufsatze gethan hat, in welchem (E. S. c. a. A. S. 4) ausdrücklich behauptet wird, die Combinationsmethode sey bey dem Polynomial- und andern analytischen Problemen, wo man seine Zuflucht zu ihr genommen habe, ganz entbehrlich. Ein anmaßendes, aus unzulänglicher Bekanntschaft mit der Sache gefälltes Urtheil! wie ich (E. S. c. a. A. S. 241 u. f.) unwidersprechlich dargethan habe, und jedem Kenner der combinatorischen Methode ohne Schwierigkeit von selbst einleuchtet. Man vergleiche (Arch. der Math. H. VII. S. 348, 349 und H. VIII. S. 495, 509, 510) die Aeusserungen dreyer scharfsinnigen Analysten, die meine Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis mit kritischen Augen geprüft und mit voller Ueberzeugung ihrer Güte und ihres Nutzens gebilliget haben. Herr Prof. Pfaff hat nachher, durch eigene Darstellung und Bearbeitung der ersten Gründe dieses neuen Zweigs der Analysis, selbst dazu beygetragen, die Kenntniß dieser Theorie und ihrer Zeichen, der lokalen so wie der combinatorischen, weiter zu verbreiten. Disquisitiones analyticae etc. pag. 260—333.

(Nov. Syſt. Comb. p. LXXX, 3 et LXXXII, 6) nichts erfahren, hat alſo ſelbige bey ſeiner im Jahre 1783 aufgeſetzten Abhandlung (die Herr Director Bernoulli aus deſſen franzöſiſcher Handſchrift überſetzt mir mitgetheilt hat) auch nicht vor Augen haben und vergleichen können.

Hindenburg.

Es iſt bekannt, daß das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe, die aus der Entwickelung des Bruches $\frac{\alpha}{1 - ax}$ entſtehet $= \alpha a^n x^n$ iſt. Man weiß auch, daß, um das allgemeine Glied einer jeden wiederkehrenden Reihe zu finden, folgendes zu beobachten iſt: „Man „macht den Nenner des Bruches, aus welchem ſie entſtehet „$= 0$; ſucht die Wurzeln dieſer Gleichung; erhebet jede „derſelben zu der Poteſtät n; multiplicirt jede mit einer „ſchicklichen beſtändigen Größe; und addirt alle dieſe Pro„ducte zuſammen“ [d]). Dieſe Methode iſt aber allen mit der Erforſchung der Wurzeln von Gleichungen verbundenen Unbequemlichkeiten unterworfen; und überdies kann die Geſtalt dieſer Wurzeln von der Art ſeyn, daß die Erhöhung derſelben zu der Poteſtät n ſehr beſchwerlich fällt [e]).

d) Dieſelbe Vorſchrift (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 225. vergl. mit §. 215) Das analytiſche Verfahren dafür hat de Moivre zuerſt angegeben (Miſcell. anal. L. II. p. 35).
Hindenburg.

e) Dieſe Beſchwerlichkeit lieſſe ſich allenfalls durch die combinatoriſche Methode bey dergleichen Potenzen, wenn auch nicht ganz heben, doch ſehr beträchtlich erleichtern; aber der erſte Umſtand, wegen Auffindung der Wurzeln, macht ein weniger ſchwieriges, keinem ſolchen Anſtoß ausgeſetztes, Verfahren wünſchenswerth.
H.

Ich werde hier eine Methode mittheilen, welche zu demselben Zweck führet, ohne daß nöthig ist die so eben erwähnten Wurzeln oder einfachen Factoren einzeln zu kennen [f]), und welche sogleich, mittelst regelmäßiger und leicht zu formirenden Reihen [g]) das gesuchte allgemeine Glied an die Hand giebt.

§. 1. Es sey der Bruch $\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2}$ gegeben, als der allgemeine ursprüngliche Bruch aller wiederkehrenden Reihen der zweyten Ordnung, das ist, aller solchen, wo ein jegliches Glied mittelst der zwey vorhergehenden gebildet wird. Es seyen m und p die Wurzeln der Gleichung $1-ax+bx^2=0$. Man mache, nach der gewöhnlichen Weise, die Brüche zu zergliedern,

$$\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2}=\frac{A}{1-mx}+\frac{B}{1-px}$$

so folgt daraus

f) Denselben Zweck hat schon Walmesley in seiner Maniere nouvelle de trouver le terme général des Séries recurrentes (Mem. de l'Ac. roy. de Berlin, année 1758. p. 271) sich vorgesetzt, wo (p. 281) das Problem vorkommt: Trouver le terme général d'une Série recurrente, sans avoir recours aux facteurs du nominateur de la fraction d'où elle tire son origine. Die dort angegebene Auflösung aber führt zu solchen Weitläuftigkeiten, daß ich zweifle, ob irgend ein Analyst jemals von ihr Gebrauch gemacht und ein Glied der wiederkehrenden Reihe darnach gesucht habe; daher ich auch das Walmsleyische Verfahren, unter den verschiedenen (I, 43-47) erwähnten Versuchen, nicht mit angeführt habe. H.

g) Sehr wahr! die leichte Formation der Trembleyischen Reihen gründet sich darauf, daß das dafür vorgeschriebene Verfahren, die Glieder in einer combinatorischen Unordnung der leichtesten Art darstellt. Kein Wunder also, wenn Herrn Trembley solches das gesuchte allgemeine Glied sogleich, das heißt hier, zwar nicht frey von aller, doch aber ohne beschwerliche, Substitution giebt. H.

$$A = \frac{\beta + \alpha m}{m - p}, \quad B = -\frac{(\beta + \alpha p}{m - p}$$

Auch hat man $m + p = a$, und $mp = b$.

Da nun das allgemeine $(n+1)$te Glied von solcher Art Reihen $= Am^n + Bp^n$ ist, wo n eine jegliche Zahl bedeutet, so mache ich, um das erste Glied der Reihe zu finden, $n = 0$, und dasselbe wird $= A + B = \frac{\alpha(m - p)}{m - p} = \alpha$.

Das zweyte Glied zu finden, setze ich $n = 1$, und dasselbe wird $= Am + Bp = \frac{\alpha(m^2 - p^2) + \beta(m - p)}{m - p}$

$= \alpha(m + p) + \beta = \alpha a + \beta$.

Das dritte Glied zu finden, setze ich $n = 2$, und dasselbe wird $= Am^2 + Bp^2 = \frac{\alpha(m^3 - p^3) + \beta(m^2 - p^2)}{m - p}$

$= \alpha(m^2 + mp + p^2) + \beta(m + p)$
$= \alpha(m + p)^2 - mp) + \beta(m + p) = \alpha(a^2 - b) + \beta a$.

Das vierte Glied zu finden, setze ich $n = 3$, und dasselbe wird $= Am^3 + Bp^3 = \frac{\alpha(m^4 - p^4) + \beta(m^3 - p^3)}{m - p}$

$= \alpha(m^3 + m^2p + mp^2 + p^3) + \beta(m^2 + mp + p^2)$
$= \alpha((m + p)^3 - 2(m + p)mp) + \beta((m + p)^2 - mp)$
$= \alpha(a^3 - 2ab) + \beta(a^2 - b)$.

Auf gleiche Weise wird man finden

Das fünfte Glied $= Am^4 + Bp^4$
$= \alpha(a^4 - 3a^2b + b^2) + \beta(a^3 - 2ab)$.

Das sechste Glied, $= Am^5 + Bp^5$
$= \alpha(a^5 - 4a^3b + 3ab^2) + \beta(a^4 - 3a^2b + b^2)$

Das ſiebente Glied $= Am^6 + Bp^6$
$= \alpha(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3) + \beta(a^5 - 4a^3b + 3ab^2)$.

Das achte Glied $= Am^7 + Bp^7$
$= \alpha(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3) + \beta(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3)$.

Das neunte Glied $= Am^8 + Bp^8$
$= \alpha(a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4)$
$+ \beta(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3)$.

Das Geſetz, welches dieſe Glieder befolgen, liegt nun am Tage; man ſiehet klar, daß überhaupt
das $(n+1)$te Glied $= Am^n + Bp^n$

$$= [\alpha(a^n - (n-1)a^{n-2}b + \frac{(n-3)(n-2)}{1.2}a^{n-4}b^2$$
$$- \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}a^{n-6}b^3$$
$$+ \frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3.4}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}]x^n$$
$$+ [\beta(a^{n-1} - (n-2)a^{n-3}b + \frac{(n-4)(n-3)}{1.2}a^{n-5}b^2$$
$$- \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3}a^{n-7}b^3$$
$$+ \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2.3.4}a^{n-9}b^4 + \text{etc.}]x^n$$

Dieſe Reihen ſetzt man fort, bis man zu Gliedern gelangt, welche $= 0$ ſind. Man bemerkt ſogleich, daß die zweyte Reihe, welche mit β multiplicirt iſt, dieſelbe als die erſte mit α multiplicirte iſt, wenn man nur $n-1$ anſtatt n ſetzt. Demnach hat man, mit Rückſicht auf dieſe Bemerkung, alles, was

ich von der ersten Reihe sagen werde, auch auf die zweyte anzuwenden [h]).

Das Gesetz der Glieder selbst der ersten Reihe, ist sehr einfach, wenn man von den Coefficienten abstrahiret; indem der Exponent von a bey jedem Gliede um 2 abnimmt, und dagegen der von b um 1 zunimmt. Was die numerischen Coefficienten anbetrifft, so sind diese so leicht zu bilden, daß man nicht nöthig hat, dieselben in der allgemeinen Formel hinzuschreiben; indem eine einzige Regel zu Formirung derselben hinreicht. Diese Regel ist, daß, wenn man das Glied $a^{\mu}b^{\nu}$ hat, der Coefficient dieses Gliedes gleich seyn wird, der Anzahl der Permutationen von $\mu+\nu$ Buchstaben, von denen μ die gleichen, und die übrigen ν auch die gleichen sind; welches durch die Lehre der Permutationen giebt $\frac{1.2.3....\mu+\nu}{1.2.3...\mu \times 1.2.3...\nu}$, das ist

$$\frac{\mu+1.\mu+2...\mu+\nu}{1.2.3...\nu} = \frac{\nu+1.\nu+2...\mu+\nu}{1.2.3...\mu}$$ [i])

h) Und in der Folge auch auf die dritte, vierte, fünfte ... Reihe, wenn man n-2, n-3, n-4, ... statt n in die erste setzt (§. 3). Die Glieder welche hier den Factor α vor sich haben, geben die erste; eben so die, welche den Factor β oder den Factor γ vor sich haben, die zweyte oder die dritte Reihe; u. s. w. bey den übrigen Factoren und Reihen. Herrn Trembley's Bemerkung, wie leicht alle folgende Reihen aus der ersten sich ableiten lassen, ist wichtig, und heißt eigentlich soviel: die erste Reihe involvire alle übrigen. Wie und woher das komme, zeigen die combinatorischen Anordnungen und Entwickelungen vorzüglich deutlich. Man vergleiche hiermit, was (I. 58) von der Involution $^{n}\mathfrak{J}^{x}$ gesagt wird, aus der sich die $^{n-1}\mathfrak{J}^{x}$, $^{n-2}\mathfrak{J}^{x}$ ... oder auch die $^{n+1}\mathfrak{J}^{x}$, $^{n+2}\mathfrak{J}^{x}$ ... mit größter Leichtigkeit ableiten und bestimmen lassen. Wegen der Trembleyischen Involutionen insbesondere, sehe man die folgende Abhandlung (III. §. 16).

i) Von der Formel für die Versetzungszahlen mehrerer, gleicher oder ungleicher, Factoren $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$... einer Comple-

So ist z. B. der Coefficient des 4ten Gliedes $a^{n-6}b^3 =$

$$\frac{1,2\ldots\ldots n-3}{1.2\ldots n-6 \times 1.2.3} = \frac{n-5.n-4.n-3}{1.2.3} = \frac{4.5\ldots n-3}{1.2\ldots n-6}$$

Der Coefficient des 5ten Gliedes $a^{n-8}b^4 =$

$$\frac{1.2.\ldots\ldots n-4}{1.2\ldots n-8 \times 1.2.3.4} = \frac{n-7.n-6.n-5.n-4}{1.2.3.4}$$

u. s. w. welches mit den Gliedern der weiter oben angebrachten Reihe übereinstimmt, die ich zuerst aus der Betrachtung hergeleitet hatte, daß die Coefficienten des ersten Gliedes die figurirten Zahlen der ersten Ordnung; die Coefficienten des 2ten Gliedes, die figurirten Zahlen der 2ten Ordnung, und überhaupt die Coefficienten des nten Gliedes die figurirten Zahlen der nten Ordnung seyen.

Wir können demnach bey Aufsuchung der allgemeinen Formel die Zahlencoefficienten aus der Acht lassen [k]), da sie allezeit durch die obige Regel für jedes Glied

rion, dergleichen auch hier in der Folge (§. 3 u. f.) vorkommen, meine Infinit. Dign. (§. XIII. p. 31. 32). Wie sich der numerische Werth dieser Formel für bestimmte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sogleich aus der Tafel der figurirten Zahlen (Inf. Dign. p. 162—165) nehmen lasse (Ebendas. p. 34. 35). Eine Tafel, wo bis mit der zehnten Dignität die Versetzungszahlen neben ihren Factoren stehen (Das. p. 168, 169). Von den Moivrischen Nuzen für die Buchstabencomplexionen des Polynomialtheorems (Arch. der Math. H. IV. S. 388). Schon Leibnitz, so wie Jac. und Joh. Bernoulli haben die Formel gekannt und gebraucht. Man sehe die von mir (Infin. Dign. §. XII.) citirten Stellen. H.

k) In zusammengesetztern Fällen, wo Producte, nicht blos, wie hier, von a und b, sondern von a, b, c, d... vorkommen, ist das noch weit vortheilhafter; daher auch Herr Trembley (§. 3) ausdrücklich erinnert: „wenn man die Versetzungszahlen „einstweilen weglasse, werde man das Gesetz der Glieder be„quem ausdrücken, und die Glieder selbst ohne Mühe fin„den können.“ Diese Absonderung der Zahlen- oder Polynomialcoefficienten von den Buchstabenproducten aus a, b, c, d... ist sehr wichtig (Arch. der Math. H. IV. 387, 2). Auf ihr beruht hier vornehmlich die große Leichtigkeit der Formirung der ersten und aller übrigen davon abhängenden

leicht können gefunden werden; und man bekommt, wenn $A^{(n)} = a^n - a^{n-2}b + a^{n-4}b^2 - a^{n-6}b^3 + a^{n-8}b^4 -$ etc. gesetzt wird, das $(n+1)$te Glied der wiederkehrenden Reihe der zweyten Ordnung $= (\alpha A^{(n)} + \beta A^{(n-1)})x^n$. [l])

(Note h) Reihen. Herrn Trembley sind hierinn bereits Jac. Bernoulli, Leibnitz, de Moivre (Arch. a. a. O. und H. VII. S. 368) vorangegangen; auch ich pflege bey analytischen Untersuchungen, wo dergleichen vorkommen, so, und nicht anders, zu verfahren. In meiner Darstellung des Polynomialtheorems ist Beydes deutlich von einander abgesondert und durch besondre Zeichen angedeutet und ausgedrückt. Daher eben die große Leichtigkeit in der Entwickelung durch ganz simple Combinationsverfahren. Herr Etatsrath Tetens, der in seiner formula Polynomiorum (E. S. c. a. A. S. 1 u. f.) den Schritt, dessen wichtige Folgen er nicht ganz übersehen hatte, wieder zurück that, und Buchstabencomplexionen nebst den zugehörigen Versetzungszahlen, wieder mit einander verbunden darstellte, verdunkelte dadurch seine Formel (Ebend. §. 8. S. 12, 13) und erschwerte ihren Gebrauch in der Anwendung. Eine Bestätigung dieses Ausspruchs von mehrern Analysten (Arch. der Math. H. VII. S. 348, 349 und die dortigen Anmerkungen). Das empfielt Herrn Trembley's Verfahren von dieser Seite um so mehr, da ihm zu der Zeit, wo er diese Abhandlung aufgesetzt hat, meine combinatorisch-analytische Methode, und die Behandlung seines Problems nach ihr, gar nicht bekannt gewesen ist. H.

l) Meine combinatorisch-involutorischen Zeichen statt der Trembleyischen gesetzt, wäre, für

$$\frac{\alpha + \beta x}{1 - ax - bx^2} = \frac{p}{q}, \text{ das allgemeine } (n+1) \text{ te Glied, oder}$$

$$(pq^{-1})\,7\,(n+1) = (\alpha j^n \mathfrak{J} + \beta j^{n-1} \mathfrak{J})x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

und statt der Gleichung für $A^{(n)}$ im Texte, käme bey mir

$$^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-2}\mathfrak{J}b + {}^{n-4}\mathfrak{J}b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}b^3 + \text{etc.}$$
$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sind nämlich die hier und in der Folge vorkommenden Zeichen, nach

Ich werde hier eine Methode mittheilen, welche zu demselben Zweck führet, ohne daß nöthig ist die so eben erwähnten Wurzeln oder einfachen Factoren einzeln zu kennen [f]), und welche sogleich, mittelst regelmäßiger und leicht zu formirenden Reihen [g]) das gesuchte allgemeine Glied an die Hand giebt.

§. 1. Es sey der Bruch $\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2}$ gegeben, als der allgemeine ursprüngliche Bruch aller wiederkehrenden Reihen der zweyten Ordnung, das ist, aller solchen, wo ein jegliches Glied mittelst der zwey vorhergehenden gebildet wird. Es seyen m und p die Wurzeln der Gleichung $1-ax+bx^2=0$. Man mache, nach der gewöhnlichen Weise, die Brüche zu zergliedern,

$$\frac{\alpha+\beta x}{1-ax+bx^2} = \frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px}$$

so folgt daraus

f) Denselben Zweck hat schon Walmesley in seiner Maniere nouvelle de trouver le terme général des Séries recurrentes (Mem. de l'Ac. roy. de Berlin, année 1758. p. 271) sich vorgesetzt, wo (p. 281) das Problem vorkommt: Trouver le terme général d'une Série recurrente, sans avoir recours aux facteurs du nominateur de la fraction d'où elle tire son origine. Die dort angegebene Auflösung aber führt zu solchen Weitläuftigkeiten, daß ich zweifle, ob irgend ein Analyst jemals von ihr Gebrauch gemacht und ein Glied der wiederkehrenden Reihe darnach gesucht habe; daher ich auch das Walmsleyische Verfahren, unter den verschiedenen (I, 43-47) erwähnten Versuchen, nicht mit angeführt habe. H.

g) Sehr wahr! die leichte Formation der Tremblepischen Reihen gründet sich darauf, daß das dafür vorgeschriebene Verfahren, die Glieder in einer combinatorischen Anordnung der leichtesten Art darstellt. Kein Wunder also, wenn Herrn Trembley solches das gesuchte allgemeine Glied sogleich, das heißt hier, zwar nicht frey von aller, doch aber ohne beschwerliche, Substitution giebt. H.

$$A = \frac{\beta + \alpha m}{m - p}, \quad B = -\frac{(\beta + \alpha p}{m - p}$$

Auch hat man $m + p = a$, und $mp = b$.

Da nun das allgemeine $(n+1)$te Glied von solcher Art Reihen $= Am^n + Bp^n$ ist, wo n eine jegliche Zahl bedeutet, so mache ich, um das erste Glied der Reihe zu finden, $n = 0$, und dasselbe wird $= A + B = \frac{\alpha(m-p)}{m-p} = \alpha$.

Das zweyte Glied zu finden, setze ich $n = 1$, und dasselbe wird $= Am + Bp = \frac{\alpha(m^2 - p^2) + \beta(m - p)}{m - p}$

$= \alpha(m + p) + \beta = \alpha a + \beta$.

Das dritte Glied zu finden, setze ich $n = 2$, und dasselbe wird $= Am^2 + Bp^2 = \frac{\alpha(m^3 - p^3) + \beta(m^2 - p^2)}{m - p}$

$= \alpha(m^2 + mp + p^2) + \beta(m + p)$
$= \alpha((m+p)^2 - mp) + \beta(m+p) = \alpha(a^2 - b) + \beta a$.

Das vierte Glied zu finden, setze ich $n = 3$, und dasselbe wird $= Am^3 + Bp^3 = \frac{\alpha(m^4 - p^4) + \beta(m^3 - p^3)}{m - p}$

$= \alpha(m^3 + m^2p + mp^2 + p^3) + \beta(m^2 + mp + p^2)$
$= \alpha((m+p)^3 - 2(m+p)mp) + \beta((m+p)^2 - mp)$
$= \alpha(a^3 - 2ab) + \beta(a^2 - b)$.

Auf gleiche Weise wird man finden

Das fünfte Glied $= Am^4 + Bp^4$
$= \alpha(a^4 - 3a^2b + b^2) + \beta(a^3 - 2ab)$.

Das sechste Glied, $= Am^5 + Bp^5$
$= \alpha(a^5 - 4a^3b + 3ab^2) + \beta(a^4 - 3a^2b + b^2)$

Das siebente Glied $= Am^6 + Bp^6$
$= \alpha(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3) + \beta(a^5 - 4a^3b + 3ab^2)$.

Das achte Glied $= Am^7 + Bp^7$
$= \alpha(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3) + \beta(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3)$.

Das neunte Glied $= Am^8 + Bp^8$
$= \alpha(a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4)$
$+ \beta(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3)$.

Das Gesetz, welches diese Glieder befolgen, liegt nun am Tage; man siehet klar, daß überhaupt
das $(n+1)$te Glied $= Am^n + Bp^n$

$$= [\alpha(a^n - (n-1)a^{n-2}b + \frac{(n-3)(n-2)}{1.2}a^{n-4}b^2 - \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}a^{n-5}b^3 + \frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3.4}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}]x^n$$

$$+ [\beta(a^{n-1} - (n-2)a^{n-3}b + \frac{(n-4)(n-3)}{1.2}a^{n-5}b^2 - \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3}a^{n-7}b^3 + \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2.3.4}a^{n-9}b^4 + \text{etc.}]x^n$$

Diese Reihen setzt man fort, bis man zu Gliedern gelangt, welche $= 0$ sind. Man bemerkt sogleich, daß die zweyte Reihe, welche mit β multiplicirt ist, dieselbe als die erste mit α multiplicirte ist, wenn man nur $n-1$ anstatt n setzt. Demnach hat man, mit Rücksicht auf diese Bemerkung, alles, was

ich von der ersten Reihe sagen werde, auch auf die zweyte anzuwenden [h]).

Das Gesetz der Glieder selbst der ersten Reihe, ist sehr einfach, wenn man von den Coefficienten abstrahiret; indem der Exponent von a bey jedem Gliede um 2 abnimmt, und dagegen der von b um 1 zunimmt. Was die numerischen Coefficienten anbetrifft, so sind diese so leicht zu bilden, daß man nicht nöthig hat, dieselben in der allgemeinen Formel hinzuschreiben; indem eine einzige Regel zu Formirung derselben hinreicht. Diese Regel ist, daß, wenn man das Glied $a^{\mu}b^{\nu}$ hat, der Coefficient dieses Gliedes gleich seyn wird, der Anzahl der Permutationen von $\mu+\nu$ Buchstaben, von denen μ die gleichen, und die übrigen ν auch die gleichen sind; welches durch die Lehre der Permutationen giebt $\frac{1.2.3\ldots\mu+\nu}{1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu}$, das ist

$$\frac{\mu+1.\mu+2\ldots\mu+\nu}{1.2.3\ldots\nu}=\frac{\nu+1.\nu+2\ldots\mu+\nu}{1.2.3\ldots\mu}$$ [i])

h) Und in der Folge auch auf die dritte, vierte, fünfte ... Reihe, wenn man n-2, n-3, n-4, ... statt n in die erste setzt (§. 3). Die Glieder welche hier den Factor α vor sich haben, geben die erste; eben so die, welche den Factor β oder den Factor γ vor sich haben, die zweyte oder die dritte Reihe; u. s. w. bey den übrigen Factoren und Reihen. Herrn Trembley's Bemerkung, wie leicht alle folgende Reihen aus der ersten sich ableiten lassen, ist wichtig, und heißt eigentlich soviel: die erste Reihe involvire alle übrigen. Wie und woher das komme, zeigen die combinatorischen Anordnungen und Entwickelungen vorzüglich deutlich. Man vergleiche hiermit, was (I. 58) von der Involution ${}^{n}\mathfrak{J}$ gesagt wird, aus der sich die ${}^{n-1}\mathfrak{J}$, ${}^{n-2}\mathfrak{J}$ ... oder auch die ${}^{n+1}\mathfrak{J}$, ${}^{n+2}\mathfrak{J}$ ... mit größter Leichtigkeit ableiten und bestimmen lassen. Wegen der Trembleyischen Involutionen insbesondere, sehe man die folgende Abhandlung (III. §. 16). H.

i) Von der Formel für die Versetzungszahlen mehrerer, gleicher oder ungleicher, Factoren $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ ... einer Comple-

So ist z. B. der Coefficient des 4ten Gliedes $a^{n-6}b^3 =$

$$\frac{1,2\ldots\ldots n-3}{1.2\ldots n-6 \times 1.2.3} = \frac{n-5.n-4.n-3}{1.2.3} = \frac{4.5\ldots n-3}{1.2\ldots n-6}$$

Der Coefficient des 5ten Gliedes $a^{n-8}b^4 =$

$$\frac{1.2.\ldots\ldots n-4}{1.2\ldots n-8 \times 1.2.3.4} = \frac{n-7.n-6.n-5.n-4}{1.2.3.4}$$

u. s. w. welches mit den Gliedern der weiter oben angebrachten Reihe übereinstimmt, die ich zuerst aus der Betrachtung hergeleitet hatte, daß die Coefficienten des ersten Gliedes die figurirten Zahlen der ersten Ordnung; die Coefficienten des 2ten Gliedes, die figurirten Zahlen der 2ten Ordnung, und überhaupt die Coefficienten des nten Gliedes die figurirten Zahlen der nten Ordnung seyen.

Wir können demnach bey Aufsuchung der allgemeinen Formel die Zahlencoefficienten aus der Acht lassen [k]), da sie allezeit durch die obige Regel für jedes Glied

rion, dergleichen auch hier in der Folge (§. 3 u. f.) vorkommen, meine Infinit. Dign. (§. XIII. p. 31. 32). Wie sich der numerische Werth dieser Formel für bestimmte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sogleich aus der Tafel der figurirten Zahlen (Inf. Dign. p. 162—165) nehmen lasse (Ebendas. p. 34. 35). Eine Tafel, wo bis mit der zehnten Dignität die Versetzungszahlen neben ihren Factoren stehen (Das. p. 168, 169). Von den Moivrischen Uuzen für die Buchstabencomplexionen des Polynomialtheorems (Arch. der Math. H. IV. S. 388). Schon Leibnitz, so wie Jac. und Joh. Bernoulli haben die Formel gekannt und gebraucht. Man sehe die von mir (Infin. Dign. §. XII.) citirten Stellen. H.

k) In zusammengesetztern Fällen, wo Producte, nicht blos, wie hier, von a und b, sondern von a, b, c, d... vorkommen, ist das noch weit vortheilhafter; daher auch Herr Trembley (§. 3) ausdrücklich erinnert: „wenn man die Versetzungszahlen „einstweilen weglasse, werde man das Gesetz der Glieder be„quem ausdrücken, und die Glieder selbst ohne Mühe fin„den können.“ Diese Absonderung der Zahlen- oder Polynomialcoefficienten von den Buchstabenproducten aus a, b, c, d... ist sehr wichtig (Arch. der Math. H. IV. 387, 2). Auf ihr beruht hier vornehmlich die große Leichtigkeit der Formirung der ersten und aller übrigen davon abhängenden

leicht können gefunden werden; und man bekommt, wenn $A^{(n)} = a^n - a^{n-2}b + a^{n-4}b^2 - a^{n-6}b^3 + a^{n-8}b^4 -$ etc. gesetzt wird, das $(n+1)$te Glied der wiederkehrenden Reihe der zweyten Ordnung $= (\alpha A^{(n)} + \beta A^{(n-1)})x^n$. l)

(Note h) Reihen. Herrn Trembley sind hierinn bereits Jac. Bernoulli, Leibnitz, de Moivre (Arch. a. a. O. und H. VII. S. 368) vorangegangen; auch ich pflege bey analytischen Untersuchungen, wo dergleichen vorkommen, so, und nicht anders, zu verfahren. In meiner Darstellung des Polynomialtheorems ist Beydes deutlich von einander abgesondert und durch besondre Zeichen angedeutet und ausgedrückt. Daher eben die große Leichtigkeit in der Entwickelung durch ganz simple Combinationsverfahren. Herr Etatsrath Tetens, der in seiner formula Polynomiorum (E. S. c. a. A. S. 1 u. f.) den Schritt, dessen wichtige Folgen er nicht ganz übersehen hatte, wieder zurück that, und Buchstabencomplexionen nebst den zugehörigen Versetzungszahlen, wieder mit einander verbunden darstellte, verdunkelte dadurch seine Formel (Ebend. §. 8. S. 12, 13) und erschwerte ihren Gebrauch in der Anwendung. Eine Bestätigung dieses Ausspruchs von mehrern Analysten (Arch. der Math. H. VII. S. 348, 349 und die dortigen Anmerkungen). Das empfielt Herrn Trembley's Verfahren von dieser Seite um so mehr, da ihm zu der Zeit, wo er diese Abhandlung aufgesetzt hat, meine combinatorisch-analytische Methode, und die Behandlung seines Problems nach ihr, gar nicht bekannt gewesen ist. H.

l) Meine combinatorisch-involutorischen Zeichen statt der Trembleyischen gesetzt, wäre, für

$$\frac{\alpha + \beta x}{1 - ax - bx^2} = \frac{p}{q}, \text{ das allgemeine } (n+1) \text{ te Glied, oder}$$

$$(pq^{-1})\,7\,(n+1) = (\alpha j^n \mathfrak{J} + \beta j^{n-1} \mathfrak{J})x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

und statt der Gleichung für $A^{(n)}$ im Texte, käme bey mir

$$^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-2}\mathfrak{J}b + {}^{n-4}\mathfrak{J}b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}b^3 + \text{etc.}$$
$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sind nämlich die hier und in der Folge vorkommenden Zeichen, nach

Diese letztere Form ist zwar in dem gegenwärtigen Falle, wo $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$ so leicht durch a, b sich ausdrücken lassen, entbehrlich; sie wird uns aber in mehr zusammengesetzten Fällen nützlich seyn.

§. 2. Ein Beyspiel[m]) von unserer Formel zu geben, nehme ich (aus Eulers Introd. in Anal. inf. T. I. p. 179) die wiederkehrende Reihe

Trembley $A^{(n)}$	$B^{(n)}$	$C^{(n)}$	$D^{(n)}$	etc.
und meine $j^n\mathfrak{T}$	$j^n\mathfrak{T}$	$j^n\mathfrak{T}$	$j^n\mathfrak{T}$	etc.
$\binom{a,\ b}{1,\ 2}$	$\binom{a,\ b,\ c}{1,\ 2,\ 3}$	$\binom{a,\ b,\ c,\ d}{1,\ 2,\ 3,\ 4}$	$\binom{a,\ b,\ c,\ d,\ e}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}$	etc.

gleichgeltend, und kann man (nach I. 52) für die $^n\mathfrak{T}$ die lexikographischen, Moivre-Hindenburgische (I. 14, 15, Taf. IV; 55—57 und mehrere Beyspiele 60—65) oder die Boscowich-Hindenburgische (Das. 16, Taf. IV. und auch Abh. III, Taf. V) Darstellung gebrauchen.

Gewöhnlich braucht Herr Trembley seine $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$ ... für die bloßen Buchstabencomplexionen $^n\mathfrak{T}$, ohne die Versetzungszahlen j; sollen diese beygefügt (die $j^n\mathfrak{T}$ ausgedrückt) werden, wie bey Anwendung der allgemeinen Formel auf Beyspiele nothwendig geschehen muß, so wird solches allemal ausdrücklich erinnert. Meine Zeichen weisen das, ohne alle weitere Erinnerung, jederzeit deutlich nach. Eben so auch der Zeiger, wie weit die Buchstaben a, b, c, d ... bey den Complexionen in Betrachtung zu ziehen sind. Eine nähere Vergleichung der ungleich leichtern Auflösung meiner Zeichen, als der Trembleyischen, in der folgenden Abhandlung §. 30. am Ende. H.

m) Um das Trembleyische Verfahren für dieses, und alle folgende Beyspiele vorläufig mit der Boscowichschen Anordnung unmittelbar vergleichen zu können, habe ich (S. 18. Taf. IV) die Darstellung für $^9\mathfrak{T}$ und den Zeiger $\binom{a,\ b,\ c\ \ldots\ i}{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ 9}$ gegeben, die alle niedrigern Involutionen $^8\mathfrak{T}$, $^7\mathfrak{T}$ ... in sich begreift, und für alle hier vorkommende Beyspiele hinreicht. Man darf nehmlich nur die Trembleyischen Zeichen in die meinigen übersetzen (Note l) und die zugehörigen Com-

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5$$
$$+29z^6+47z^7+\text{etc.}=\frac{1+2z}{1-z-zz}$$

Vergleicht man die Glieder dieses Urbruchs, mit den Gliedern unsers allgemeinen Bruches, so hat man

$$\alpha=1,\ \beta=2;\ a=1,\ b=-1$$

Um nun das 7te Glied zu finden, setze man $n+1=7$, demnach $n=6$; und wir haben

$$A^{(6)}=a^6-a^4b+a^2b^2-b^3$$

Kommen itzt die Coefficienten hinzu, so ist

$$A^{(6)}=a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3=1+5+6+1=13$$
$$A^{(5)}=a^5-4a^3b+3ab^2=1+4+3=8$$

Folglich das 7de Glied

$$(13\alpha+8\beta)z^6=(13+16)z^6=29z^6$$

wie es wirklich in obiger Reihe steht.

Desgleichen, das 8te Glied zu finden, machen wir $n=7$, und dann ist

plexionen aus ebenangeführter Tafel nehmen. So z. E. um hier $A^{(7)}=\underset{\binom{a,\ b}{1,\ 2}}{i^7\mathfrak{J}}$ aus $\underset{\binom{a,\ b,\ c\ \ldots\ i}{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ 9}}{{}^9\mathfrak{J}}$ zu nehmen, darf man von den dortigen Complexionen, die sich mit a oder b endigen (aber nicht weiter) und mit zwey oder mehrern a anfangen, zwey a vorn weglassen (weil $7=9-2$) und die Versetzungszahlen beyfügen; das giebt $A^{(7)}=i^7\mathfrak{J}=a^7+6a^5b+10a^3b^2+4ab^3$, wie oben im Texte; nur alles positiv, wenn der Nenner des Bruchs, wie bey mir $1-ax-bx^2$ (Note l). Wie man jede Involution nach Voscowich unabhängig darstellen könne (Arch der Math. H. IV. S. 404, 405 und hier, Abh. III, 11, 12, und Taf. V, VI, am Ende).

$A^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 = 1 + 6 + 10 + 4 = 21$;

Demnach, und weil $A^{(7)} = 21$; $A^{(6)} = 13$; ist das 8te Glied

$$(21\alpha + 13\beta)z^7 = (21 + 26)z^7 = 47z^7$$

vollkommen, wie in obiger Reihe.

Der Vortheil dieser Methode besteht zugleich darinn, daß sie dieselbe ist, die Wurzeln mögen gleich oder ungleich seyn [n]). Sucht man die Glieder mittelst des allgemeinen Gliedes, das Euler findet, so wird man bemerken, daß die Methode wenigstens um den ganzen Theil der Arbeit, die man braucht die Wurzeln der Beziehungsscale zu bestimmen, weitläufiger wird; und vergleicht man die Generalform, welche aus Eulers Methode (p. 180) entspringt, und nach unseren Benennungen diese ist:

$$\left(\frac{\alpha(\sqrt{aa+4ab}+a)+2\beta}{2\sqrt{aa+4b}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{aa+4b}}{2}\right)^n z^n$$
$$+\left(\frac{\alpha(\sqrt{aa+4b}-a)-2\beta}{2\sqrt{aa+4b}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{aa+4b}}{2}\right)^n z^n$$

so wird man sie gewiß verwickelter und unbequemer finden.

§. 3. Es sey der Urbruch $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - ax + bx^2 - cx^3}$, aus welchem alle wiederkehrenden Reihen der dritten Ordnung entstehen; wo nemlich jedes Glied mittelst der drey vorhergehenden gebildet wird. Es seyen m, p, q die Wurzeln der Gleichung $1 - ax + bx^2 - cx^3 = 0$; so mache ich nach dem gewöhnlichen Verfahren

n) Wie man sich bey zwey oder mehrern gleichen Wurzeln, nach der gewöhnlichen Vorschrift, zu verhalten habe (Eul. Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 225 vergl. mit §. 218, 45.) §.

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 - ax + bx^2 - cx^3} = \frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx},$$

und erhalte daraus $A = \frac{\gamma + \beta m + \alpha m^2}{(m-p)(m-q)}$;

$$B = \frac{-(\gamma + \beta p + \alpha p^2)}{(m-p)(p-q)}; \quad C = \frac{\gamma + \beta q + \alpha q^2}{(m-q)(p-q)}.$$

Auch ist

$$m+p+q = a; \quad mp+mq+pq = b; \quad mpq = c.$$

Das allgemeine Glied solcher Reihen ist $Am^n + Bp^n + Cq^n$. Um nun das erste Glied der Reihe zu erlangen, mache ich $n = 0$, und so wird dieses Glied

$$= A + B + C$$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} \gamma p + \beta mp + \alpha m^2 p + \gamma q + \beta pq \\ + \alpha p^2 q + \gamma m + \beta mq + \alpha mq^2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -[\gamma p + \beta pq + \alpha pq^2 + \gamma q + \beta mq] \\ -[\alpha m^2 q + \gamma m + \beta mp + \alpha mp^2] \end{matrix}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)}$$

$$= \frac{\alpha \left\{\begin{matrix} m^2 p - m^2 q - mp^2 \\ + p^2 q + mq^2 - pq^2 \end{matrix}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)} = \alpha$$

Das zweyte Glied zu finden, setze ich $n = 1$, und dasselbe wird

$$= \frac{\left\{\begin{matrix} \alpha[m^3 p - m^3 q - mp^3 + p^3 q + mq^3 - pq^3] \\ + \beta[m^2 p - m^2 q - mp^2 + p^2 q + mq^2 - pq^2] \end{matrix}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)}$$

$$= \alpha(m+p+q)+\beta = \alpha a+\beta$$

Das dritte Glied zu finden, wird $n=2$ gesetzt, und es wird

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}\alpha[m^4p-m^4q-mp^4+p^4q+mq^4-pq^4]\\ +\beta[m^3p-m^3q-mp^3+p^3q+mq^3-pq^3]\\ +\gamma[m^2p-m^2q-mp^2+p^2q+mq^2-pq^2]\end{array}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)}$$

$$= \alpha(m^2+mp+mq+p^2+pq+q^2)+\beta(m+p+q)+\gamma$$
$$= \alpha[(m+p+q)^2-(mp+mq+pq)]$$
$$+ \beta(m+p+q)+\gamma = \alpha(a^2-b)+\beta a+\gamma$$

Das vierte Glied zu finden, ſetze ich $n=3$, und daſſelbe wird

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}\alpha[m^5p-m^5q-mp^5+p^5q+mq^5-pq^5]\\ +\beta[m^4p-m^4q-mp^4+p^4q+mq^4-pq^4]\\ +\gamma[m^3p-m^3q-mp^3+p^3q+mq^3-pq^3]\end{array}\right\}}{(m-p)(m-q)(p-q)}$$

$$= \alpha(m^3+m^2p+mp^2+p^3+m^2q+mpq+p^2q+mq^2+pq^2+q^3)$$
$$+ \beta(m^2+mp+mq+p^2+pq+q^2)+\gamma(m+p+q)$$
$$= \alpha([m+p+q]^3-2(m+p+q)(mp+mq+pq)+mpq)$$
$$+ \beta([m+p+q]^2-(mp+mq+pq))+\gamma(m+p+q)$$
$$= \alpha(a^3-2ab+c)+\beta(a^2-b)+\gamma a$$

Eben ſo wird man das Vte, VIte, VIIte, VIIIte, IXte Glied finden:

Das Vte Glied $= Am^4+Bp^4+Cq^4$
$$= \alpha(a^4-3a^2b+b^2+2ca)+\beta(a^3-2ab+c)+\gamma(a^2-b)$$

Das VIte Glied $= Am^5+Bp^5+Cq^5$
$$= \alpha(a^5-4a^3b+3ab^2+c(3a^2-2b))$$
$$+\beta(a^4-3a^2b+b^2+2ca)+\gamma(a^3-2ab+c)$$

Das VIIte Glied $= Am^6 + Bp^6 + Cq^6$

$= \alpha(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3 + c(4a^3 - 6ab + c))$

$+ \beta(a^5 - 4a^3b + 3ab^2 + c(3a^2 - 2b)) + \gamma(a^4 - 3a^2b + b^2 + 2ca)$

Das VIIIte Glied $= Am^7 + Bp^7 + Cq^7$

$= \alpha(a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 + c(5a^4 - 12a^2b + 3b^2 + 3ca))$

$+ \beta(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3 + c(4a^3 - 6ab + c))$

$+ \gamma(a^5 - 4a^3b + 3ab + c(3a^2 - 2b))$

Das IXte Glied $= Am^8 + Bp^8 + Cq^8$

$= \alpha(a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4 + c(6a^5$

$- 20a^3b + 12ab^2 + c^2(6a^2 - 3b)) + \beta(a^7 - 6a^5b$

$+ 10a^3b^2 - 4ab^3 + c(5a^4 - 12a^2b + 3b^2 + 3c^2a))$

$+ \gamma(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3 + c(4a^3 - 6ab + c))$

u. s. w. Anitzt kann man schon das Gesetz der Glieder entdecken °), und man wird im Allgemeinen finden

Das $(n+1)$te Glied $= Am^n + Bp^n + Cq^n$

$$= \alpha\left(a^n - \frac{(n-1)}{1}a^{n-2}b + \frac{(n-3)(n-2)}{1.2}a^{n-4}b^2 - \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}a^{n-6}b^3 + \frac{(n-7)(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3.4}a^{n-8}b^4 + \text{etc.}\right)$$

o) Der Weg zu dieser Induction, durch die vorhergehenden weitläuftigen Rechnungen, ist nicht gering, und doch werden hier nur a, b, c mit einander verbunden. Das läßt auf die Verwickelung aus mehrern Buchstaben a, b, c, d... schließen; wovon auch in der Folge die Zwischenrechnungen nicht mit vorgelegt werden konnten, sondern (wie §. 9 ausdrücklich erinnert wird) der Kürze halber wegbleiben mußten. Das empfiehlt um so mehr den so simpeln directen Beweis der ganz allgemeinen Formel für $\underset{(a,b,c,d,e...)}{pq^{-1}}$ in (I. 50). Wie wohlthätig zeigt sich hier die combinatorische Methode! S.

$$+ c[(n-2)a^{n-3} - (n-4)(n-3)a^{n-5}b$$
$$+ \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2}a^{n-7}b^2 \cdot \frac{(n-8)(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2.3}a^{n-9}b^3 + \text{etc}]$$
$$+ c^2\Big[\frac{(n-5)(n-4)}{1.2}a^{n-6} - \frac{(n-7)(n-6)(n-5)}{1.2}a^{n-8}b$$
$$+ \frac{(n-9)(n-8)(n-7)(n-6)}{1.2.1.2}a^{n-10}b^2$$
$$- \frac{(n-11)(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)}{1.2.1.2.3}a^{n-12}b^3 \text{ etc.}]$$
$$+ c^3\Big[\frac{[(n-8)(n-7)(n-6)}{1.2.3}a^{n-9} - \frac{(n-10)(n-9)(n-8)(n-7)}{1.2.3}a^{n-11}b$$
$$+ \frac{(n-12)(n-11)(n-10)(n-9)(n-8}{1.2.3.1.2}a^{n-13}b^2 + \text{etc.}]$$
$$+ c^4 \text{ (etc.)} + \text{etc.)}$$

$+ \beta$ (Die Glieder, die mit β multiplicirt werden müſſen, ſind dieſelben als die vorigen, mit Verwandlung von n in n−1)

$+ \gamma$ (Die mit γ zu multiplicirenden Glieder ſind dieſelben als die vorigen, wenn man nur n in n−2 verwandelt)[p])

Man ſetzt die Glieder dieſer Reihen fort bis man zu o gelangt.

Das Geſetz der Zahlencoefficienten dieſer Reihen der **dritten** Ordnung iſt eben daſjenige, welches wir für die Reihen der zweyten Ordnung gefunden haben[q]); wie man

p) Wegen der hier in β und γ zu multiplicirenden Reihen, ſehe man die Note h. H.

q) Man ſehe §. 1 und die dortige Note i. H.

sogleich sehen wird. Wir wollen z. B. das Glied $a^{n-13}b^2c^3$ nehmen, so ist die Anzahl der Permutationen =

$$\frac{1.2.3\ .\ .\ .\ .\ .\ n-8}{1.2.3.\ .\ n-13\times 1.2\times 1.2.3} = \frac{n-12.n-11.n-10\ n-9.n-8}{1.2.3\times 1.2}$$, so

wie man in unserer Formel bemerkt; deshalben kann man von den Zahlencoefficienten abstrahiren, da sie sich leicht für jedes Glied bestimmen lassen, und wenn dies geschehen, wird man ohne Mühe das Gesetz der Glieder selbst finden r). Dieses darzuthun, wollen wir wieder den in der vorigen Aufgabe angegebenen Werth von $A^{(n)}$ zur Hand nehmen, und dann haben wir im Allgemeinen,

für das (n+1)te Glied der Reihen der dritten Ordnung

$$\alpha(A^{(n)}+cA^{(n-3)}+c^2A^{(n-6)}+c^3A^{(n-9)}+\text{etc.})$$
$$+\beta(A^{(n-1)}+cA^{(n-4)}+c^2A^{(n-7)}+c^3A^{(n-10)}+\text{etc.})$$
$$+\gamma(A^{(n-2)}+cA^{(n-5)}+c^2A^{(n-\ )}+c^3A^{(n-11)}+\text{etc.})$$

Man setzt die Werthe von $A^{(n)}$ fort, bis daß die Exponenten verneinend werden. Nunmehro mache man

$$B^{(n)}=A^{(n)}+A^{(n-3)}c+A^{(n-6)}c^2+A^{(n-9)}c^3+\text{etc.}$$

so entstehet

für das (n+1)te Glied der wiederkehrenden Reihen der dritten Ordnung die Formel

$$(\alpha B^{(n)}+\beta B^{(n-1)}+\gamma B^{(n-2)})x^n.$$ s)

r) Man vergleiche die Note k. H.

s) Diese Formel, in meinen Zeichen (Note l) ausgedrückt, giebt für $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1-ax-bx^2-cx^3}=\frac{p}{q}$, das (n+1)te Glied, oder

$$(pq^{-1})7(n+1)=(\alpha j^n\mathfrak{J}+\beta j^{n-1}\mathfrak{J}+\gamma j^{n-2}\mathfrak{J})x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

Eben so kommt, statt der Trembleyischen Gleichung für $B^{(n)}$, bey mi

Man braucht demnach nur die Glieder $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$ etc. zu formiren, sodann nach Anleitung dieser die Glieder $B^{(n)}$, $B^{(n-1)}$, $B^{(n-2)}$, etc, und im Fortschreiten den Zahlencoefficienten jedes Gliedes, nach der oben gegebenen Regel, zu bilden.

§. 4. Ein Beyspiel auch von dieser Formel zu geben, nehme ich in dem angeführten Eulerischen Werke p. 180, die wiederkehrende Reihe

$$1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6$$
$$+4z^7+\text{etc.} = \frac{1}{1-z-zz+z^3}$$

Vergleicht man den Urbruch mit dem unsrigen, so ergiebt sich $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$; $a=1$, $b=-1$, $c=-1$. Um nun das 7te Glied zu finden [t]), mache ich $n+1=7$,

$$\underset{\left(\begin{smallmatrix}a,b,c\\1,2,3\end{smallmatrix}\right)}{{}^{n}\mathfrak{J}} = \underset{\left(\begin{smallmatrix}a&,&b\\1&,&2\end{smallmatrix}\right)}{{}^{n}\mathfrak{J}} + {}^{n-3}\mathfrak{J}c + {}^{n-6}\mathfrak{J}c^2 + {}^{n-9}\mathfrak{J}c^3 + \text{etc.}$$

eine ähnliche Zerlegung der höhern Involutionen und Reihenordnungen in niedrigere, wie die (Arch. H. IV. S. 418, d) welcher sich Herr Trembley (ähnliche Reductionsformeln kommen bey den folgenden Ordnungen vor) dazu bedient, das Verfahren, durch Anwendung der Formeln der vorhergehenden Ordnungen, für die der folgenden, dadurch zu leiten.

Ich habe die c, c^2, c^3 . . . hinter die ${}^{n-3}\mathfrak{J}$, ${}^{n-6}\mathfrak{J}$, ${}^{n-9}\mathfrak{J}$ . . . gesetzt, die hier im Texte (§. 3. 4. 5) bald vor bald hinter den Involutionszeichen stehen. Das ist bey Herrn Trembley's Verfahren, der immer die Reductionsformeln im Auge hat, ganz gleichgültig; bey dem combinatorischen hingegen, wo die Functionen ${}^{n}\mathfrak{J}$, ${}^{n-m}\mathfrak{J}$ sich eben so leicht unabhängig darstellen lassen, muß man eins von beyden festsetzen.

t) Das 7te Glied der Reihe im Texte zu finden, wo $\alpha=1$; $\beta=\gamma=0$; ist nach der Formel (Note s) für $p=1$ u. $n=6$

$$(q^{-1})\,7(6+1) = \underset{\left(\begin{smallmatrix}a,&b,&c\\1,&2,&3\end{smallmatrix}\right)}{j^6\mathfrak{J}z^6}$$

also $n=6$, und unsere Formel wird

$$\alpha B^{(6)}=B^{(6)}=A^{(6)}+A^{(3)}c+c^2,$$

Da nun

$$A^{(6)}=a^6-a^4b+a^2b^2-b^3;\quad A^{(3)}=a^3-ab,$$

so ist

$$B^{(6)}=a^6-a^4b+a^2b^2-b^3+a^3c-abc+c^2,$$

und, wenn jetzt die Coefficienten hinzugebildet werden,

$$B^{(6)}=a^6-5a^4b+6a^2b^2-b^3+4a^3c-6abc+c^2$$
$$=1+5+6+1-4-6+1=4;$$

welches wirklich das 7te Glied ist.

§. 5. Ein zweytes Beyspiel zu geben, nehme ich die wiederkehrende Reihe

$$1+2x+3x^2+3x^3+7x^4+5x^5+15x^6+9x^7$$
$$+31x^8+17x^9+63x^{10}+\text{etc.}=\frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3}$$

Die Vergleichung dieses Urbruches mit dem unsrigen, giebt

$\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=3$; $a=-1$, $b=-2$, $c=2$.

Das 10te Glied zu finden, mache ich $n+1=10$, demnach $n=9$, und die Formel reducirt sich auf diese

und $B^{(6)}$ d. i. ${}^6\mathfrak{J}^r$ oder auch (Note l) $j^6\mathfrak{J}^r=a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3+4a^3c+6abc+c^2$, wie man (Note m) entweder unabhängig, oder von der Anordnung (I. 16. Taf. IV) dependent, findet, wenn man von den dortigen Complexionen für ${}^9\mathfrak{J}^r$, die sich auf a, b oder c endigen (aber nicht weiter) und mit drey oder mehrern a anfangen, drey a vorn wegläßt (weil $6=9-3$) und die Versetzungszahlen beyschreibt. Für $a=1$; $b=1$; $c=-1$; kommt $j^6\mathfrak{J}^r=1+5+6+1-4-6+1=4$, wie im Texte. Eine andere Anordnung für $j^6\mathfrak{J}^r$ steht in (I. 63). Die Tremblepische Anordnung kommt mit der Boscowichschen überein, deren rein-combinatorische Darstellung (III, 12) steht.

$$\alpha B^{(9)} + \beta B^{(8)} + \gamma B^{(7)}$$
$$= B^{(9)} + 3B^{(8)} + 3B^{(7)} \text{ u)}.$$

Nun finde ich $B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + c^3$;
$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)}c + A^{(2)}c^2$; $B^{(7)} = A^{(7)} + A^4c + A^{(1)}c^2$;
$A^{(9)} = a^9 - a^7b + a^5b^2 - a^3c^3 + ab^4$;
$A^6 = a^6 - a^4b + a^2b^2 - b^3$; $A^3 = a^3 - ab$.
Folglich $B^{(9)} = a^9 - a^7b + a^5b^2 - a^3b^3 + ab^4 + a^6c$
$- a^4bc + a^2b^2c - b^3c + a^3c^2 - abc^2 + c^3$
oder (wenn die Coefficienten formirt werden)
$= a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4 + 7a^6c$
$- 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2 + c^3$
$= -1 - 16 - 84 - 160 - 80 + 14 + 120 + 240$
$+ 64 - 40 - 96 + 8 = -31.$
Eben so bekommen wir $A^{(8)} = a^8 - a^6b + a^4b^2 - a^2b^3 + b^4$;
$A^{(5)} = a^5 - a^3b + ab^2$; $A^{(2)} = a^2 - b$; demnach, und

u) In meinen Zeichen (Note l) für $n = 9$; $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\gamma = 3$; ist

$$(pq^{-1})\,7(9+1) = (j^9\mathfrak{J} + 3j^8\mathfrak{J} + 3j^7\mathfrak{J})\,x^9$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

Hier kann nun ${}^9\mathfrak{J}$ geradezu aus (I. 16; Taf. IV) genommen werden, wenn man blos die auf a, b und c sich endenden Complexionen, mit Uebergehung der übrigen, beybehält, wie sie dort auf einander folgen. Die Beyfügung der Versetzungszahlen und die Bestimmung der Zeichen der einzelnen Complexionen, aus $a = -1$; $b = 2$; $c = 2$, giebt alles so, wie im Texte für $B^{(9)}$ steht. Daraus, wenn man, in den Complexionen die mit a anfangen, ein a wegläßt, findet man die Complexionen für $B^{(8)} = {}^8\mathfrak{J}$, und daraus weiter, auf eben dem Wege (durch abermalige Weglassung eines a) die Complexionen für $B^{(7)} = {}^7\mathfrak{J}$ (Note h, m, t) alles, wie im Texte.

H.

wenn sofort die Coefficienten mitgebildet werden,

$$B^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4$$
$$+ 6a^5c - 20a^3bc + 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2 = 1 + 14 + 60$$
$$+ 80 + 16 - 12 - 80 - 96 + 24 + 24 = 31.$$

Endlich haben wir auch

$A^{(7)} = a^7 - a^5b + a^3b^2 - ac^3$; $A^{(4)} = a^4 - a^2b + b^2$;

$A^{(1)} = a$. Demnach $B^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3$
$+ 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c + 3ac^2 = -1 - 12 - 40 - 32 + 10$
$+ 48 + 24 - 12 = -15$.

Das 10te Glied wird daher $= -31 + 3.31 - 3.15$
$= 93 - 76 = 17$, wie es in der That seyn soll.

§. 6. Man habe $\dfrac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4}$, welches der Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der vierten Ordnung ist, das heißt, aller derjenigen, wo jedes Glied mittelst der vier vorhergehenden gebildet wird, so findet man, durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren (welches ich aber Kürze halber hier weglasse) daß, wenn man für $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$ die obigen Werthe beybehält, und $C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)}d + B^{(n-8)}d^2 - B^{(n-12)}d^3 + B^{(n-16)}d^4$ etc. macht, sodann im Allgemeinen, das $(n+1)$te Glied einer wiederkehrenden Reihe der 4ten Ordnung $=$

$(\alpha C^{(n)} + \beta C^{(n-1)} + \gamma C^{(n-2)} + \delta C^{(n-3)})x^n$ wird. v)

v) In meinen Zeichen (Note l) und

für $\dfrac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4} = \dfrac{p}{q}$, ist

$$(pq^{-1})/(n+1) = (\alpha j^n \mathfrak{J} + \beta j^{n-1} \mathfrak{J} + \gamma j^{n-2} \mathfrak{J} + \delta j^{n-3} \mathfrak{J})x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

Dieſes auf ein Beyſpiel w) anzuwenden, ſey die Reihe

$$1+x+x^2+2x^3+4x^4+6x^5+7x^6+7x^7$$
$$+7x^8+8x^9+\text{etc} = \frac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x+x^4},$$

ſo giebt die Vergleichung dieſes Urbruches mit unſrem allgemeinen Bruche, $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=0$; $a=3$, $b=4$, $c=3$, $d=1$.

Das 10te Glied zu finden, ſetzen wir $n+1=10$, oder $n=9$, und dieſes Glied wird $=C^{(9)}-2C^{(8)}+2C^{(7)}$. Nun haben wir $C^{(9)}=B^{(9)}-B^{(5)}d+B^{(1)}d^2$; $C^{(8)}=B^{(8)}-B^{(4)}d+d^2$; $C^{(7)}=B^{(7)}-B^{(3)}d$.

und ſtatt der Gleichung für $C^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$${}^{n}\mathfrak{T}^{r} = {}^{n}\mathfrak{T}^{r}+{}^{n-4}\mathfrak{T}^{r}d+{}^{n-8}\mathfrak{T}^{r}d^2+{}^{n-12}\mathfrak{T}^{r}d^3+\text{etc.}$$
$$\binom{a,b,c,d}{1,2,3,4} \qquad \binom{a,\ b,\ c,}{1,\ 2,\ 3,}$$

Meine Zeichen vor den involutoriſchen Functionen ſind nicht abwechſelnd, wie in Herrn Trembley's Werthe von $C^{(n)}$, weil bey mir in dem Nenner $1-ax-bx^2-cx^3\ldots$ die a, b, c . . keine abwechſelnden Zeichen haben. Warum Herr Trembley den Gliedern der Nenner ſeiner Urbrüche abwechſelnde Zeichen gegeben hat; davon die Note zu §. 28 der folgenden Abhandlung. H.

w) Dieſes Beyſpiel wird in dem folgenden Aufſatze (III, §. 3) als Muſter des Trembleyiſchen Verfahrens ausführlich betrachtet werden. Hier genügt es anzumerken, daß man, wie im vorhergehenden Exempel (Note u) für $B^{(9)}$ geſchehen, auch hier die Complexionen für $C^{(9)}$ unmittelbar aus ${}^{9}\mathfrak{T}^{r}$ (I, 16; Taf. IV, nehmlich hier die auf a, b, c und d ſich endenden nehmen, und daraus weiter $C^{(8)}={}^{8}\mathfrak{T}^{r}$ und $C^{(7)}={}^{7}\mathfrak{T}^{r}$, wie im ſo eben angeführten Exempel, aus den mit a anfangenden Complexionen, durch ſucceſſive Weglaſſung von a, ſchaffen und herleiten kann. H.

Man hat aber ferner, wie in der vorigen Aufgabe,

$B^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4$
$+ 7a^6c - 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2 + c^3$
$B^{(5)} = a^5 - a^3b + ab^2 + a^2c - bc;$

Demnach (mit Bildung der Coefficienten)

$B^{(5)}d = 6a^5d - 20a^3bd + 12ab^2d + 12a^2cd - 6bcd;$
$B^{(1)} = a$, und $B^{(1)}d^2 = 3ad^2$; folglich,
$C^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4$
$+ 7a^6c - 30a^4bc + 30a^2b^2c - 4b^3c + 10a^3c^2 - 12abc^2$
$+ c^3 - 6a^5d + 20a^3bd - 12ab^2d - 12a^2cd + 6bcd + 3ad^2$
$= 19683 - 69984 + 81648 - 34560 + 3840 + 15309$
$- 29160 + 12960 - 768 + 2430 - 1296 + 27 - 1458$
$+ 2160 - 576 - 324 + 72 + 9 = 12.$

Auch ist $B^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4$
$+ 6a^5c - 20a^3bc + 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2;$
$B^{(4)} = a^4 - a^2b + b^2 + ac$; daher
$B^{(4)}d = 5a^4d - 12a^2bd + 3b^2d + 6acd$; demnach
$C^{(8)} = a^8 - 7a^6b + 15a^4b^2 - 10a^2b^3 + b^4 + 6a^5c - 20a^3bc$
$+ 12ab^2c + 6a^2c^2 - 3bc^2 - 5a^4d + 12a^2bd - 3b^2d - 6acd + d^2$
$= 6561 - 20412 + 9440 - 5760 + 256 + 4374 - 6480$
$+ 1728 + 486 - 108 - 405 + 432 - 48 - 54 + 1 = 11.$

Endlich hat man

$B^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 + 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c + 3ac^2,$
$B^{(3)} = a^3 - ab + c$; daher $B^{(3)}d = 4a^3d - 6abd + 2cd$; demnach
$C^{(7)} = a^7 - 6a^5b + 10a^3b^2 - 4ab^3 + 5a^4c - 12a^2bc + 3b^2c$
$+ 3ac^2 - 4a^3d + 6abd - 2cd$
$= 2187 - 5832 + 4320 - 768 + 1215 - 1296$
$+ 144 + 81 - 108 + 72 - 6 = 9.$

Demnach $C^{(9)} - 2\,C^{(8)} + 2\,C^{(7)} = 12 - 22 + 18 = 8$, und dies ist wirklich das 10te Glied.

§. 7. Man habe $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4-ex^5}$ als den Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der fünften Ordnung: man lasse $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ die oben gefundenen Werthe, und setze

$$D^{(n)}=C^{(n)}+C^{(n-5)}e+C^{(n-10)}e^2+C^{(n-15)}e^3+\text{etc.},$$

so findet man überhaupt das (n+1)te Glied einer wiederkehrenden Reihe der fünften Ordnung =

$$(\alpha D^{(n)}+\beta D^{(n-1)}+\gamma D^{(n-2)}+\delta D^{(n-3)}+\varepsilon D^{(n-4)})x^n.\ ^{x)}$$

Ein Beyspiel davon zu berechnen, nehme ich (aus Eulers Introd. in Anal. Inf. p. 188) die Reihe

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7$$
$$+7z^8+8z^9+\text{etc.}=\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}.$$

x) In meinen Zeichen (Note l) ist, für

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{1-ax-bx^2-cx^3-dx^4-ex^5}=\frac{p}{q},$$

$$(pq^{-1})\ \underline{\underline{7}}\ (n+1)$$

$$(\alpha\,{}_{\mathfrak{j}}^{n}\mathfrak{J}+\beta\,{}_{\mathfrak{j}}^{n-1}\mathfrak{J}+\gamma\,{}_{\mathfrak{j}}^{n-2}\mathfrak{J}+\delta\,{}_{\mathfrak{j}}^{n-3}\mathfrak{J}+\varepsilon\,{}_{\mathfrak{j}}^{n-4}\mathfrak{J})x^n$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$$

und, statt der Gleichung für $D^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$${}^{n}\mathfrak{J}={}^{n}\mathfrak{J}+{}^{n-5}\mathfrak{J}e+{}^{n-10}\mathfrak{J}e^2+{}^{n-15}\mathfrak{J}e^3+\text{etc.},$$

$$\begin{pmatrix} a,b,c,d,e \\ 1,2,3,4,5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

Was das im Text aufgeführte Beyspiel anbetrifft, so gilt hier für die $D^{(9)}$, $D^{(8)}$, $D^{(7)}$, was (Note w) von $C^{(9)}$, $C^{(8)}$, $C^{(7)}$ ist erinnert worden. Für jene werden alle Complexionen aus (I, 16; Taf. IV) nach der Ordnung aufgeführt, die sich mit a, b, c, d, e endigen, mit Weglassung aller übrigen.

5.

Die Vergleichung dieses Urbruches mit unserm allgemeinen, giebt $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\delta=0$, $\varepsilon=0$; $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=-1$, $e=-1$. Das 10te Glied zu finden, wird $n+1=10$. oder $n=9$ gesetzt, und das gesuchte Glied durch $D^{(9)}+D^{(8)}+D^{(7)}$ ausgedrückt. Nun haben wir

$D^{(9)}=C^{(9)}+C^{(8)}e$; $D^{(8)}=C^{(8)}+C^{(7)}e$; $D^{(7)}=C^{(7)}+C^{(6)}e$.

Es ist aber $C^{(9)}=B^{(9)}-B^{(5)}d+B^{(1)}d^2$; $C^{(8)}=B^{(8)}-d$;

$B^{(9)}=A^{(9)}=a^9$; $B^{(8)}=A^{(8)}=a^8$;

folglich $C^{(9)}=a^9-a^5d+ad^2$; $C^{(8)}e=a^8-de$, und

$D^{(9)}=a^9-6a^5d+3ad^2+5a^4e-2de=1+6+3-5-2=3$.

Ingleichem hat man $C^{(8)}=B^{(8)}-B^{(4)}d+d^2=a^8-a^4d+d^2$;

$C^{(7)}=B^{(7)}=a^7$; $C^{(7)}e=a^7e$; demnach

$D^{(8)}=a^8-5a^4d+d^2+4a^3e=1+5+1-4=3$. Endlich

$C^{(7)}=B^{(7)}-B^{(3)}d=a^7-a^3d$; $C^{(6)}=B^{(6)}=a^6$; daher

$D^{(7)}=a^7-4a^3d+3a^2e=1+4-3=2$. Das 10te Glied wird demnach seyn $=D^{(9)}+D^{(8)}+D^{(7)}=3+3+2=8$, wie es auch wirklich ist.

§. 8. Der Bruch $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\phi x^5}{1-ax+bx^2-cx^3+dx^4-ex^5+fx^6}$ ist der Urbruch aller wiederkehrenden Reihen der sechsten Ordnung. Behält man die vorigen Werthe von $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$ und setzt

$E^{(n)}=D^{(n)}-D^{(n-6)}f+D^{(n-12)}f^2-D^{(n-18)}f^3+$ etc.

so wird das $(n+1)$te Glied einer solchen wiederkehrenden Reihe

$$=(\alpha E^{(n)}+\beta E^{(n-1)}+\gamma E^{(n-2)}+\delta E^{(n-3)}+\varepsilon E^{(n-4)}+\phi E^{(n-5)})x^n.$$ y)

y) In meinen Zeichen (Note l) ist, für

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\phi x^5}{1-ax-bx^2-cx^3-dx^4-ex^5-fx^6}=\frac{P}{Q},$$

Ein Beyspiel zu geben, nehme ich in dem angezogenen Werke von Euler, (p. 186) die Reihe

$$1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7$$
$$+10z^8+12z^9+\text{etc} = \frac{1}{1-z-z^2+z^4+z^5-z^6}$$

Vergleichen wir diesen Urbruch mit unserm allgemeinen, so ist $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$, $\varepsilon=0$, $\varphi=0$; $a=1$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$, $e=-1$, $f=-1$.

Das 10te Glied zu finden, wird $n=9$ gesetzt, und dasselbe wird $= E^{(9)}$. Allein $E^{(9)} = D^{(9)} - D^{(3)}f$; $D^{(9)} = C^{(9)} + C^{(4)}e$; $D^{(3)} = C^{(3)}$; $C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2$; $C^{(4)} = B^{(4)} - d$; $C^{(3)} = B^{(3)}$, $B^{(9)} = A^{(9)}$; $B^{(5)} = A^{(5)}$; $B^{(1)} = A^{(1)}$; $B^{(4)} = A^{(4)}$; $B^{(3)} = A^{(3)}$; daher $C^{(9)} = a^9 - a^7b + a^5b^2 - a^3b^3 + ab^4 - a^5d + a^3bd - ab^2d + ad^2 =$ (mit Zuziehung der Coefficienten) $a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4 - 6a^5d + 20a^3bd - 12ab^2d + 3ad^2$.

$$(pq^{-1})\mathcal{J}(n+1) = \left\{ \begin{matrix} \alpha j^n \mathcal{J} + \beta j^{n-1} \mathcal{J} + \gamma j^{n-2} \mathcal{J} \\ + \delta j^{n-3} \mathcal{J} + \varepsilon j^{n-4} \mathcal{J} + \varphi j^{n-5} \mathcal{J} \end{matrix} \right\} x^n$$
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}$$

und statt der Gleichung für $E^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$${}^n\mathcal{J} = {}^n\mathcal{J} + {}^{n-6}\mathcal{J}f + {}^{n-12}\mathcal{J}f^2 + {}^{n-18}\mathcal{J}f^3 + \text{etc.}$$
$$\begin{pmatrix} a,b,c,d,e,f \\ 1,2,3,4,5,6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$$

Warum bey mir im letzten Ausdrucke für ${}^n\mathcal{J}$, nicht wie bey Herrn Trembley für $E^{(n)}$, die Zeichen abwechseln (Note v). Für das folgende Exempel im Texte können, wegen $n=9$, die Complexionen für $E^{(9)}$ sogleich aus (I, 16; Taf. IV) nach der Ordnung genommen werden, die sich auf a, b, d, e, f endigen, mit Weglassung derer, in welchen c (weil hier $c=0$) oder g, h, i vorkommt.

Eben so erhält man $C^{(4)}e = 5a^4e - 12a^2be + 3b^2e - 2de$. Endlich ist auch $D^{(3)}f = 4a^3f - 6abf$. Diese Werthe vereinigt, geben

$$E^{(9)} = a^9 - 8a^7b + 21a^5b^2 - 20a^3b^3 + 5ab^4 - 6a^5d + 20a^3bd - 12ab^2d + 3ad^2 + 5a^4e - 12a^2be + 3b^2e - 2de - 4a^3f + 6abf$$
$$= 1 + 8 + 21 + 20 + 5 - 6 - 20 - 12 + 3 - 5 - 12 - 3 + 2 + 4 + 6 = 12$$

wie auch wirklich herauskommen sollte.

§. 9. Das allgemeine Glied der Reihen von der siebenden Ordnung, von welchen der Urbruch

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \varphi x^5 + \chi x^6}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - ex^5 + fx^6 - gx^7}$$

ist, zu finden, muß man (mit Beybehaltung aller vorigen Benennungen)

$$F^{(n)} = E^{(n)} + E^{(n-7)}g + E^{(n-14)}g^2 + E^{(n-21)}g^3 + \text{etc.}$$

setzen, und hat dann im Allgemeinen das $(n+1)$te Glied einer wiederkehrenden Reihe der siebenden Ordnung

$$= (\alpha F^{(n)} + \beta F^{(n-1)} + \gamma F^{(n-2)} + \delta F^{(n-3)} + \varepsilon F^{(n-4)} + \varphi F^{(n-5)} + \chi F^{(n-6)})x^n. \quad z)$$

z) Das ist, in meinen Zeichen (Note l) und wenn

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \varphi x^5 + \chi x^6}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5 - fx^6 - gx^7} = \frac{p}{q};$$

$$(pq^{-1})\ 7\ (n+1)$$

$$= \left(\alpha j^{n}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \beta j^{n-1}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \gamma j^{n-2}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \delta j^{n-3}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \varepsilon j^{n-4}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \varphi j^{n-5}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r} + \chi j^{n-6}\,{}^{\alpha}\!\!\int^{r}\right)x^n$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \end{pmatrix}$$

§. 10. Das Geſetz dieſer Progreſſionen liegt nun am Tage, und man ſiehet klar, daß, wenn man fortfährt nach eben dem Geſetze Quantitäten zu bilden, man das allgemeine Glied einer jeden Reihe haben werde. Es ſey demnach der Urbruch aus welchem ſie entſtehet

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots + \pi x^{m-1}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 \ldots\ldots \pm p x^m}$$

(wo das Zeichen + ſtatt findet wenn m gerade, und das Zeichen — wenn m ungerade iſt); und man formire nun die im nachſtehenden Schema vorgeſtellten Quantitäten,

$$A^{(n)} = a^{(n)} - a^{(n-2)}b + a^{(n-4)}b^2 - a^{(n-6)}b^3 + \text{etc}$$
$$B^{(n)} = A^{(n)} + A^{(n-3)}c + A^{(n-6)}c^2 + A^{(n-9)}c^3 + \text{etc}$$
$$C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)}d + B^{(n-8)}d^2 - B^{(n-12)}d^3 + \text{etc}$$
$$D^{(n)} = C^{(n)} + C^{(n-5)}e + C^{(n-10)}e^2 + C^{(n-15)}e^3 + \text{etc}$$
$$E^{(n)} = D^{(n)} - D^{(n-6)}f + D^{(n-12)}f^2 - D^{(n-18)}f^3 + \text{etc}$$

$$M^{(n)} = K^{(n)} \pm K^{(n-m)}p + K^{(n-2m)}p^2 \pm K^{(n-3m)}p^3 + \text{etc} \quad \text{aa})$$

und ſtatt der Gleichung für $F^{(n)}$ im Texte, kommt bey mir

$${}^{n}\mathfrak{J}^{r} = {}^{n}\mathfrak{J}^{r} + {}^{n-7}\mathfrak{J}^{r}g + {}^{n-14}\mathfrak{J}^{r}g^2 + {}^{n-21}\mathfrak{J}^{r}g^3 + \text{etc.}$$
$$\binom{a,b,c,d,e,f,g}{1,2,3,4,5,6,7} \qquad \binom{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}$$ §.

aa) Die obigen Reductionsgleichungen für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $F^{(n)}$, der höhern Ordnungen auf niedrigere, in meinen ${}^{n}\mathfrak{J}^{r}$ ausgedrückt, ſind ſchon in den Noten (l, s, v, x, y, z) einzeln vorhanden. Hier fände man noch für die Gleichung der unbeſtimmten Ordnung

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x^{m-1}}{1 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4 - ex^5 - \ldots - \alpha^{m-1} x^m} = \frac{p}{q},$$

Ich nenne hier $K^{(n)}$ die Größen, welche den wiederkehrenden Reihen der Ordnung $m-1$ entsprechen. Wenn m ungerade ist, sind alle Glieder bejahend; ist m gerade, so sind sie wechselsweise bejahend und verneinend. Dies habe ich durch die unbestimmten doppelten Zeichen [bb]) des Wer-

das allgemeine $(n+1)$te Glied, oder

$$(pq^{-1})\,7\,(n+1)$$

$$=$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha j^{n}\mathfrak{J}+\beta j^{n-1}\mathfrak{J}+\gamma j^{n-2}\mathfrak{J}+\delta j^{n-3}\mathfrak{J} \\ +\varepsilon j^{n-4}\mathfrak{J}\ldots\ldots+\overset{m-1}{\alpha}\, j^{n-m+1}\mathfrak{J} \end{array}\right\} x^{n}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e\ldots\ldots & \overset{m-1}{a} \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\ldots\ldots & m \end{pmatrix}$$

und der Werth für $M^{(n)}$, die Reductionsgleichung der $m$ten auf die $(m-1)$te Ordnung, d. i.

$${}^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{J}+{}^{n-m}\mathfrak{J}\,{}^{m-1}_{a}+{}^{n-2m}\mathfrak{J}\left({}^{m-1}_{a}\right)^{2}+{}^{n-3m}\mathfrak{J}\left({}^{m-1}_{a}\right)^{3}+\text{etc}$$

$$\begin{pmatrix} a,b,c,d,e\ldots & \overset{m-1}{a} \\ 1,2,3,4,5\ldots & m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e\ldots & \overset{m-2}{a} \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\ldots & m-1 \end{pmatrix}$$

H.

bb) Wegen meines Nenners $1-ax-bx^{2}-\text{etc}$ wechseln bey mir in dem Werthe für ${}^{n}\mathfrak{J}$ die Zeichen nicht so, wie für $A^{(n)}$, $C^{(n)}$, $E^{(n)}\ldots M^{(n)}$ oben im Texte, ab (Note v). Das erspart Aufmerksamkeit, und schafft Bequemlichkeit, weil sich, wenn es zur Anwendung kommt, alles auf die leichte Regel reducirt: „Die Vorzeichen der einzelnen a, „b, c, d ... im Zeiger, denen im Nenner q der gegebe„nen gebrochenen Function $\frac{p}{q}$ entgegengesetzt zu neh„men.“ (I. 23, 59 und die Exempel 60—64)

Der im folgenden Beyspiele angenommene Werth für $m=7$, giebt $\overset{m-1}{\alpha}=\overset{m-1}{\chi}$; $a=g$; daraus folgen $(qq^{-1})\,7\,(n+1)$ und $j^{n}\mathfrak{J}$, beyde wie in Note z. Für $m=10=n+1$ oder $n=9$, kämen für ${}^{9}\mathfrak{J}$, auf den Zeiger $\begin{pmatrix} a, b, c\ldots h, i \\ 1, 2, 3\ldots 9, 10 \end{pmatrix}$ bezogen, nach Herrn Trembley's Verfahren, vermittelst

thes von $M^{(n)}$ angezeigt, welches die den wiederkehrenden Reihen der Ordnung m entsprechende Größe ist.

Nunmehro hat man überhaupt das (n+1)te Glied einer solchen Reihe von der $m$ten Ordnung

$$= (\alpha M^{(n)} + \beta M^{(n-1)} + \gamma M^{(n-2)} + \delta M^{(n-3)} \ldots + \pi M^{(n-m+1)}) x^n$$

Z. B. wenn $m = 7$ gesetzt wird, hat man

$\pi = \chi$, $p = g$, $K^{(n)} = E^{(n)}$; $M^{(n)} = F^{(n)}$; daher

$F^{(n)} = E^{(n)} + E^{(n-7)}g + E^{(n-14)}g^2 + E^{(n-21)}g^3 + E^{(n-28)}g^4 +$ etc

und das (n+1)te Glied wird im Allgemeinen

$$= (\alpha F^{(n)} + \beta F^{(n-1)} + \gamma F^{(n-2)} + \delta F^{(n-3)} + \ldots + \chi F^{(n-6)}) x^n$$

welches eben die weiter oben (§. 9) gefundene Formel ist. Diese einzige allgemeine Formel kann uns demnach dienen alle Particularformeln zu finden, indem man von m bis 1 herabgehet.

§. 11. Das Verfahren, welches ich in dieser Abhandlung befolgt habe, dünkt mir das einzige schickliche zu seyn, um einen allgemeinen Ausdruck für das allgemeine Glied einer widerkehrenden Reihe, von welcher Ordnung sie sey, zu schaffen, nach welchem jedes verlangte Glied eines gegebenen Bruchs sich leicht finden und darstellen lasse [cc].

seiner Reductionsformeln dieselben Complexionen in derselben Ordnung und Lage, wie sie in (l. 16; Tab. IV) stehen.

cc) Der Trembleyische Ausdruck für das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen jeder Ordnung ist in der That so kurz und expressiv, als möglich; auch befolgen die zugehörigen Reductionsgleichungen ein sehr einfaches Gesetz, nach welchem man das verlangte Glied durch leichte Substitutionen findet. Kennte man diese Substitutionen, die freylich für etwas hohe Glieder und Ordnungen sehr zahlreich sind, beträcht-

Denn weil die gewöhnliche Methode erfordert, daß man die Wurzeln der Beziehungsscale finde, so liegt am Tage, daß man mittelst derselben einen solchen allgemeinen Ausdruck nicht finden kann, indem man zu dem Ende die Gleichungen von allen Graden müßte auflösen können, welches ein in dem dermaligen Zustande der Analysis annoch unauflösbares Problem ist. dd)

lich vermindern, oder wohl gar aufheben: so bliebe dabey nichts weiter zu hoffen und zu wünschen übrig. Was die Combinationslehre durch eine weiter getriebene Analyse hier vermag, erhellet zum Theil aus (I, 14, 15; Taf. IV und 55, 56 und den dortigen Exempeln 60—64), und wird in der Folge (Abh. III) noch umständlicher dargelegt werden. H.

dd) Eine Anwendung seiner Methode und Formeln für das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihen, hat Herr Prof. Trembley durch Auflösung eines Problems aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben, die im 10den Hefte des Archivs der reinen und angewandten Mathematik (S. 123. u. f.) eingerückt befindlich ist. H.

III.

Das Trembleyische Reductionsverfahren (Abh. II) ist mit der Boscowichschen combinatorischen Anordnung, in Absicht auf Inhalt und Folge der Complexionen, vollkommen gleichgültig. Allgemeines Glied der Boscowichschen Involution und rein-combinatorische Darstellung derselben. Vergleichung der Moivrischen und Boscovichschen Formeln und ihrer Entwickelung; hierbey eine literarische Merkwürdigkeit; Convergenz und Divergenz der entwickelten Reihen; Entwickelung solcher Brüche, die keine veränderliche Größe enthalten; von C. F. Hindenburg.

1.

Bey Vergleichung der Trembleyischen und Boscowichschen Entwickelung der Complexionen muß ich voraussetzen, daß die dabey vorkommenden Zeichen aus der vorhergehenden Abhandlung und den Anmerkungen bekannt seyen.

Herrn Trembley's Substitutionsverfahren für das allgemeine Glied bey wiederkehrenden Reihen [a]).

2. Es beruht auf folgendem:

a) Ich habe hier vornehmlich auf die Ausdrücke durch die Trembleyischen Ordnungszeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$... und dieser Zeichen Verhalten gegen einander, gesehen. Das Wesentliche der ganzen Methode, vom Anfange herein, ha-

I. Die zu entwickelnde gebrochene Function sey

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + dx^4 - ex^5 + \text{etc}}$$

das allgemeine (n+1)te Glied aller Ordnungen der wiederkehrenden Reihen ist: für die

erste $= \alpha a^n x^n$

zweyte $= (\alpha A^{(n)} + \beta A^{(n-1)}) x^n$

dritte $= (\alpha B^{(n)} + \beta B^{(n-1)} + \gamma B^{(n-2)}) x^n$

vierte $= (\alpha C^{(n)} + \beta C^{(n-1)} + \gamma C^{(n-2)} + \delta C^{(n-3)}) x^n$

u. s. w. für die übrigen Ordnungen.

II. Die $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . (in I) werden durch folgende Reductionsgleichungen bestimmt:

$A^{(n)} = a^{(n)} - a^{(n-2)} b + a^{(n-4)} b^2 - a^{(n-6)} b^3 + \text{etc}$

$B^{(n)} = A^{(n)} + A^{(n-3)} c + A^{(n-6)} c^2 + A^{(n-9)} c^3 + \text{etc}$

$C^{(n)} = B^{(n)} - B^{(n-4)} d + B^{(n-8)} d^2 - B^{(n-12)} d^3 + \text{etc}$

$D^{(n)} = C^{(n)} + C^{(n-5)} e + C^{(n-10)} e^2 + C^{(n-15)} e^3 + \text{etc}$

etc etc etc etc etc

(Abh. II. §. 1, 3, 6, 7, 10). Durch diese Formeln lassen sich die Reihen höherer Ordnungen auf die der niedrigern bringen, jene durch diese ausdrücken.

III. Die Reihe für $A^{(n)}$ (II) ist durch a und b auf die leichteste Art gegeben. Daraus werden $B^{(n)}$, und aus beyden $C^{(n)}$ u. s. w. durch Beyhülfe von c, d; u. s. w. ohne Schwierigkeit abgeleitet. Wegen der Reihen für spätere Ordnungen muß man daher die aller frühern und vorhergefundenen (z. B. wegen $D^{(n)}$, die vorherbestimmten $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$; Ebend. §. 7) beybehalten und benutzen.

be ich unten (28) wo ich es nöthig brauchte, in möglichster Kürze, aufgestellt.

IV. Wenn, nach Vorschrift dieser Reihen, zuletzt alles, in den gegebenen einfachen a, b, c, d ... und ihren Potenzen, ausgedrückt worden ist, so werden den daher entstandenen einzelnen Complexionen oder Gliedern die zugehörigen numerischen Coefficienten oder Versetzungszahlen (Ebend. §. 1. 3) beygefügt, und die Factoren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gehörig (nach I) vorgesetzt.

3. Exempel. Dafür will ich Herrn Trembley's Beyspiel (§. 6 seiner Abh.) wählen:

Das 10te Glied der Reihe für $\frac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x^3+x^4}$ zu finden.

Hier ist $n+1=10$, also $n=9$; $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=0$; $a=3$, $b=4$, $c=3$, $d=1$; und der gegebene Bruch führt auf eine Reihe der vierten Ordnung, für welche also (2, I)

$$\text{Das 10de Glied} = (C^{(9)} - 2C^{(8)} + 2C^{(7)})x^9.$$

Die Reihen für C werden dann, nach obigen Reductionsformeln, mittelbar durch B und A ausgedrückt. Am besten und bequemsten auf die Art, wie nachstehende Entwürfe zeigen. Es sind nähmlich

a) für $n=9$ (2, II)

$$C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2$$

$$B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + A^{(0)}c^3$$

$$B^{(5)} = A^{(5)} + A^{(2)}c$$

$$B^{(1)} = A^{(1)}$$

$$A^{(m)} = a^m - a^{m-2}b + a^{m-4}b^2 - a^{m-6}b^3 + \text{etc}$$

b) Für n=8 (2, II)

$C^{(8)} = B^{(8)} - B^{(4)}d + B^{(0)}d^2$

$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)}c + A^{(2)}c^2$

$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}c$

$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$

$A^{(m)}$ = wie vorher

c) Für n=7 (2, II)

$C^{(7)} = B^{(7)} - B^{(3)}d$

$B^{(7)} = A^{(7)} + A^{(4)}c + A^{(1)}c^2$

$B^{(3)} = A^{(3)} + A^{(0)}c$

$A^{(m)}$ = wie vorher

Setzt man hier überall die a, b, c, d, oder ihre obigen Werthe 3, 4, 3, 1, in die für C entwickelten einzelnen Glieder von A, B, nach vorſtehendem Schema, mit Beyfügung der zugehörigen Verſetzungszahlen, ſo kommt alles wie bey Herrn Trembley a. a. O. Die Sache hat keine Schwierigkeit; ich will mich alſo dabey nicht aufhalten.

4. Eben ſo wäre, für eine Reihe der 5ten Ordnung und n=9 (2, II),

$D^{(9)} = C^{(9)} + C^{(4)}e$

$C^{(9)} = B^{(9)} - B^{(5)}d + B^{(1)}d^2$

$C^{(4)} = B^{(4)} - B^{(0)}d$

$B^{(9)} = A^{(9)} + A^{(6)}c + A^{(3)}c^2 + A^{(0)}c^3$

$B^{(5)} = A^{(5)} + A^{(2)}c \quad | \quad B^{(1)} = A^{(1)} = a$

$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}c \quad | \quad B^{(0)} = A^{(0)} = 1$

$A^{(m)} = a^m - a^{m-2}b + a^{m-4}b^2 - \text{etc}$

Für das Trembleyiſche Exempel (dort §. 7) wo $b = c = 0$, fielen alle Glieder und Reihen weg, in denen b und c als Factoren vorkommen, und ſo wäre, mit Beyfügung der Verſetzungszahlen,

$$D^{(9)} = a^9 - 6a^5d + 3ad^2 + 5a^4e - 2de$$

hier vollkommen ſo, wie dort.

5. Aus der gegebenen Reihe für $A^{(n)}$, ſind die für B, und aus dieſen die für C, und ſo weiter für D, ꝛc. beſtimmt; und ſo legen die Schemata (3, 4) aufs deutlichſte dar, was man zu ſuchen und woraus man es zu finden habe. Auch wird man ohne Schwierigkeit zugeben, daß die dabey vorkommenden Subſtitutionen ſo leicht ſind, als man nur immer erwarten kann. Die Combinationslehre macht gleichwohl alle dieſe Subſtitutionen, die bey höhern Ordnungen und ſpätern Gliedern immer zahlreicher werden, durchaus entbehrlich, und ſo wird das Trembleyiſche Verfahren, durch weitere combinatoriſche Analyſe deſſelben, ganz ſimplificirt.

6. Eine genquere Betrachtung der Entwürfe (3, 4) verglichen mit Note 1 der vorhergehenden Abhandlung, dient hierbey als Vorbereitung, die Folgendes lehrt:

I. Wenn man die Buchſtaben a, b, c, d . . . zeigermäßig auf 1, 2, 3, 4 . . . bezieht, wie bey combinatoriſchen Verfahren gewöhnlich iſt, ſo ſtellen die Buchſtaben der einzelnen Glieder der Reihen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . ſämtlich Complexionen dar, die zur Summe n gehören.

II. Enthalten $A^{(n)}$, alle auf a und b,
$B^{(n)}$, alle auf a, b und c,
$C^{(n)}$, alle auf a, b, c und d,
u. ſ. w.

nach der Folge der Buchstaben, sich endenden, zur gedachten Summe gehörigen, Complexionen.

III. Werden, unter den überhaupt

in b sich endenden, auch die in b^2, b^3, b^4...

" c " " " " c^2, c^3, c^4...

" d " " " " d^2, d^3, d^4...

u. s. w. sich endenden, nach der Ordnung ihrer Potenzen, so weit die Summenzahl n es verstattet, mit begriffen seyn. Hierdurch sind also die Complexionen nach Summe und Inhalt der einzelnen Elemente bestimmt.

7. Das führt auf nachstehende combinatorische Verkürzung der Darstellung für $D^{(9)}$ (4), die hier statt aller übrigen als Beyspiel dienen mag. In dieser hat man nicht, D auf C, und C auf B, und B auf A, von oben herab, zerfällt, sondern alles durch A, von unten heraufgehend, ausgedrückt. Die auf a, b, c, d, e sich endenden Complexionen sind zugleich, der Deutlichkeit wegen, durch Queerstriche von einander gesondert. Man findet so

$$D^{(9)} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{A^{(9)}} \\ \overline{A^{(6)}c;\ A^{(3)}c^2;\ A^{(0)}c^3} \\ \overline{A^{(5)}d,\ A^{(2)}cd;\ A^{(1)}d^2} \\ A^{(4)}e,\ A^{(1)}ce,\ A^{(0)}de \end{array} \right.$$

Diese Darstellung von $D^{(9)}$ ist offenbar viel weniger zusammengesetzt und verwickelt, als die durch C, B, A (in 4) ausgedrückte. Auch bezieht sie sich nicht (wie jene in 4) auf den Nenner $1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}$ (2, I) mit abwechselnden Zeichen, sondern auf $1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc}$. Dadurch wird (und das ist ein zweyter Vortheil) die an sich schon kürzere Formel, auch von abwechselnden Zeichen befreyt. Von dieser Bequemlichkeit und ihren Folgen sehe

man die Note bb) der vorhergehenden Abhandlung und die dort citirten Stellen.

8. Das combinatorische Gesetz des in A dargestellten Werthes von $D^{(9)}$ (in 7) für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{smallmatrix}\right)$ ist folgendes:

I. Wie $A^{(6)}c$; $A^{(3)}c^2$; $A^{(0)}c^3$ aus $A^{(9)}$ folgt, ist für sich klar; und man kann überhaupt $A^{(n)}$, $A^{(n-3)}c$, $A^{(n-6)}c^2$; $A^{(n-9)}c^3$, ... (2, II) als gegeben ansehen.

II. Aus den auf c sich endenden Verbindungen der zweyten Abtheilung, entstehen die auf d, d^2, d^3, d^4, ... sich endenden der dritten, auf folgende Art:

a) Für die auf Ein d sich endenden Verbindungen, vermindert man in den auf c sich endenden den Summenexponenten von A um 1 (so lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und statt des letzten c setzt man nun d. Aus $A^{(6)}c$ wird $A^{(5)}d$; aus $A^{(3)}cc$ wird $A^{(2)}cd$. Hingegen läßt sich $A^{(0)}ccc$ nicht weiter so verändern, da $A^{(-1)}c^2d$ keine Bedeutung hat.

b) Aus denen in d sich endenden Verbindungen findet man die in dd; aus denen in d^3 die in dddd; u. s. w. sich endenden Verbindungen derselben (dritten) Abtheilung, wenn man den Summenexponenten von A der zugehörigen vorhergefundenen Verbindungen um 4 (wegen d) vermindert (so lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und statt d nun d^2, statt d^2 nun d^3, statt d^3 nun d^4 u. s. w. setzt. Aus $A^{(5)}d$ folgt $A^{(1)}d^2$; aber $A^{(2)}cd$ darf man nicht in $A^{(-2)}cd^2$ umsetzen. Eben so wenig darf man $A^{(1)}d^2$ in $A^{(-3)}d^3$ verändern. Die dritte Abtheilung von $D^{(9)}$ bricht also mit $A^{(1)}d^2$ ab, und von Verbindungen, die sich auf d^3, d^4 ... endeten, kann hier nichts vorkommen.

II. Eben so findet man, aus der dritten Abtheilung die vierte, aus der vierten die fünfte ... aus der (n−1)ten die nte. Aus $A^{(5)}d$ wird $A^{(4)}e$; aus $A^{(2)}dd$ wird $A^{(1)}ce$; aus $A^{(1)}ddd$ wird $A^{(0)}de$, wenn man mit d für e eben so verfährt, wie vorher (II, a) mit c für d. Auf e^2, e^3, ... sich endende Verbindungen giebt's hier nicht, weil der Abzug der Zahl 5 (wegen e) auf eine negative Zahl führen, $A^{(4)}e$ z. B. $A^{(-1)}ee$ geben) würde; folglich (II, b) sich hier nicht anwenden läßt.

9. Die combinatorische Verkürzung (7), nach welcher man für jede höhere Ordnung $M^{(n)}$, alle Zwischenordnungen B, C, D, E, u. s. w. entbehren, und alles durch A unmittelbar ausdrücken kann, ist wichtig. Könnte man auch noch diese vorläufige Darstellung in A überspringen, und $M^{(n)}$ sogleich in den einfachen a, b, c, d, ... selbst ausdrücken: so würde man dadurch ungleich mehr gewinnen. Dies bewirkt unter andern

Boscovich's combinatorische Anordnung für Complexionen zu bestimmten Summen.

10. Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen zu finden.

11. Erste Auflösung, in Zahlen [b]; als Stellvertretern der Buchstaben: z. B. die Summe 9 aus den Zahlen

b) Die folgende Auflösung in Zahlen ist von Boscovich selbst, der die Aufgabe so angiebt: Trovare tutte le maniere, nelle quali possa un numero dato esser formato di parti, che contengano numeri interi. (Arch. d. Math. H. IV. S. 403 u. f.) Ich habe diese Auflösung in Zahlen des Zusammenhangs wegen hier wiederholt, und die Buchstabencomplexionen unmittelbar daneben gesetzt. Die letztern sind nicht etwa aus den Zahlencomplexionen übersetzt, sondern sind unab-

1, 2, 3, 4, 5 darzuſtellen; oder, in meinen Zeichen ausgedrückt:

Auflöſung für $^{9}\mathfrak{J}$
(1, 2, 3, 4, 5)

$$\left.\begin{array}{r} 111111111 = a^9 \\ \hline 11111112 = a^7b \\ 11111122 = a^5b^2 \\ 11112222 = a^3b^3 \\ 12222 = a^1b^4 \end{array}\right\} = A^{(9)} \text{ c)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1111113 = a^6c \\ 111123 = a^4bc \\ 11223 = a^2b^2c \\ 2223 = b^3c \end{array}\right\} = A^{(6)}c$$

$$\left.\begin{array}{r} 11133 = a^3c^2 \\ 1233 = abc^2 \end{array}\right\} = A^{(3)}c^2$$

$$333 = c^3 \;] = A^{(0)}c^3$$

$$\left.\begin{array}{r} 111114 = a^5d \\ 11124 = a^3bd \\ 1224 = ab^2d \end{array}\right\} = A^{(5)}d$$

$$\left.\begin{array}{r} 1134 = a^2cd \\ 234 = bcd \end{array}\right\} = A^{(2)}cd$$

$$144 = ad^2 \;] = A^{(1)}d^2$$

hängig von jenen gefunden worden, wie die Auflöſung (12) zeigt. Dies rechtfertigt die Benennung Boscowich-Hindenburgiſche (S. 18) Involution.

c) Wegen der hier zugleich mit beygefügten Ausdrücke durch A ſehe man (15). Die daneben ſtehenden Complexionen geben zuſammen das Tremblepiſche $D^{(9)}$, wie aus (7) erhellet.

$$\left.\begin{array}{r} 11115 = a^4e \\ 1125 = a^2be \\ 225 = b^2e \end{array}\right\} = A^{(4)}e$$

$$135 = ace \;] = A^{(1)}ce$$

$$45 = de \;] = A^{(0)}de$$

I. Man schreibe für die erste Complexion so viel Einheiten (Einsen) in einer Reihe nach einander, als die gegebene Zahl (hier 9) enthält.

II. Darunter schreibe man für die zweyte Complexion rechter Hand am Ende, eine 2 mit den übrigen Einheiten zur Linken, und für die folgende zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. s. w. so lange sich die gegebene Summe auf diese Art durch Setzung von 2en und 1sen hervorbringen und darstellen läßt.

III. Sind die 2en abgelaufen, so schreibe man für die folgenden Complexionen rechter Hand am Ende, eine 3 nebst den übrigen Einheiten zur Linken; dann eine 3 nebst zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. s. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebst einer 2... und so geht es weiter auf die 4 und 5 (und folgende Zahlen, wenn mehrere gegeben sind) fort, nach Beschaffenheit der Summe; so, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum erstenmale rechter Hand am Ende vorkommt (von den niedrigsten Zahlen jedesmal anfangend) erst lauter Einsen zur Linken als Ergänzung nimmt, dann für die folgenden Complexionen neben dieser Endzahl eine 2, dann zwey, und so mehrere 2en, beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einsen ergänzt; dann weiter eine, und so in der Folge mehrere 3en damit verbindet, und so ferner andere Zahlen, nur keine Zahl die größer wäre, als die Endzahl der Complexion, die man eben bearbeitet.

Die vorstehende Darstellung zeigt die leichte Anwendung der ganz einfachen Regel, nach welcher jede folgende Complexion aus der nächstvorhergehenden sich ableiten läßt, sehr deutlich. Sie bricht mit der Endzahl 5 (der höchsten nehmlich der gegebenen Zahlen) ab, hätte aber eben so leicht auch auf die höhern Zahlen 6, 7, 8, 9 weiter erstreckt werden können. Diese will ich in der nächstfolgenden Auflösung mitnehmen, und darinn die Buchstabencomplexionen zugleich so aufführen, wie sie sich, mit ihren Wiederholungsexponenten versehen, nach einander bestimmen lassen; wodurch die Darstellung gegen die vorige (11) zugleich an Kürze und Deutlichkeit gewinnt.

12. Zweyte Auflösung. Für dieselbe Summe 9, in Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In meinen Zeichen:

Auflösung für $^{9}\mathfrak{J}\begin{pmatrix} a, b, c \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9 \end{pmatrix}$

Sie befolgt genau das von mir bereits in (8) angegebene combinatorische Gesetz, wenn man, was dort von A und den zugehörigen Summenexponenten gesagt wird, hier auf a und den zugehörigen Potenzexponenten anwendet. Auch will ich die Befolgung des Gesetzes hier noch frühzeitiger (vom ersten Gliede a^9 an, das man sich als $a^8.a$ vorstellen kann) nachweisen, ohne weiter etwas als gegeben anzunehmen. Nämlich

I. Als erste Complexion setze man $a^9 = a^8a$, die einzige auf a sich endende Verbindung oder Complexion.

II. Die auf b, b^2, b^3 ... sich endenden Complexionen findet man so:

a) Man vermindert in a^8a den Exponenten von a^8 um 1, und schreibt statt des folgenden a nun b. Das giebt a^7b, die einzige auf Ein b sich endende Verbindung.

b) Das gefundene a^7b giebt weiter, wenn man den Exponenten von a um 2 vermindert, und statt b nun b^2 schreibt, a^5b^2; und daraus findet man auf eben die Art (den Exponenten von a^5 wieder um 2 vermindert und dafür ein b mehr geschrieben) a^3b^3; und daraus weiter a^1b^4.

Das giebt zusammen a^7b, a^5b^2, a^3b^3, a^1b^4., für die zweyte Abtheilung, aller auf b, b^2, b^3... sich endenden Verbindungen.

III. Durch weitere Anwendung des Verfahrens (in II) und Erstreckung der Regeln von b auf c (wo, wie vorher b auf die Zahl 2, sich nun c auf 3, und in der Folge d auf 4, und e auf 5, u. s. w. bezieht) findet man alle, auf c, c^2, c^3... sich endenden Verbindungen; und so auch alle auf die folgenden Buchstaben und ihre Potenzen sich endenden Complexionen der folgenden Abtheilungen.

Die Anwendung der Vorschriften (a, b in II) erstreckt sich blos auf die mit einem oder mehrern a anfangenden Complexionen, alle übrigen, die kein a haben, werden dabey übergangen. Da aber die Verminderung der Exponenten von a, bis auf und mit a^0 statt hat, so können diese Regeln, ob sie schon auf Verbindungen die kein a enthalten, nicht angewendet werden, gleichwohl dergleichen geben.

13. Die sämtlichen Complexionen der Auflösung (12) nach der Ordnung sind folgende:

$$\mathfrak{J}^{9}\begin{pmatrix} a, & b, & c \ldots, & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3 \ldots, & 7, & 8, & 9 \end{pmatrix}$$

a^8a

a^7b; a^5b^2; a^3b^3; a^1b^4

a^6c, a^4bc, a^2b^2c, b^3c;
a^3c^2, abc^2;
c^3

a^5d, a^3bd, ab^2d, a^2cd, bcd;
ad^2

a^4e, a^2be, b^2e, ace, de

a^3f, abf, cf

a^2g, bg

ah

i

14. Eine leichtere Darstellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer Ordnungen, von einander, läßt sich nicht gedenken. Sie bedarf keiner Vorbereitung (wie die in 3, 4, 7) stellt die Buchstaben, sogleich mit ihren Exponenten versehen, auf, und ist frey von allen Substitutionen complexer Zeichen. Ihre rein-combinatorische Anordnung beruht ganz auf einer äußerst leichten Umtauschung der Buchstaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glieder zu schreiben. Alles wird gleich so und an dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern oder zu verrücken, zusammengesetzt, wie und wo man es zum Gebrauch nützlich findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexionen unter oder nebeneinander oder in welcher andern Lage man sie schreiben will,

Hier habe ich sie mit Fleiß, etwas weitläuftiger, so abgesetzt, wie man das Gesetz ihrer Ableitung und Abhängigkeit von einander am deutlichsten übersieht. So werde ich mich auch für ähnliche Fälle in der Folge verhalten. Es ist eine übel angebrachte Sparsamkeit, mit Aufopferung solcher Vortheile — peritura parcere chartae.

15. Die Entwickelung der Complexionen (in 13) enthält die (hier in 5 und S. 84, 85 Note cc) versprochene Simplification des Trembleyischen Substitutionsverfahrens (3, 4): Den Uebergang von diesem auf jene macht die (in 7) aufgestellte, und durch A ausgedrückte, combinatorische Verkürzung, die aber von der (in 13) noch weit übertroffen wird: Zur unmittelbaren Vergleichung und Nachweisung, daß die Boscovichsche Darstellung die Complexionen vollkommen in eben der Ordnung und Folge aufeinander, wie das Trembleyische Substitutionsverfahren, giebt, habe ich in dem Schema (11) dafür, den Ausdruck durch A den in a, b, c, d, e entwickelten Gliedern, rechter Hand beygefügt. Bey andern Entwickelungen, in der Folge, werde ich ihn (wie auch schon hier in (13) geschehen ist) als vollkommen entbehrlich, weglassen.

Mehrere Darstellungen verschiedener Summen, in Zahlen und Buchstaben, sind zu unmittelbarem Gebrauche in der Anwendung, am Ende der Abhandlung besonders (in Tafel V) aufgestellt.

16. Bey der Moivrischen Entwickelung der Involution $^{n}\mathfrak{J}$, ist (S. 43. §. 58) erinnert und gezeigt worden, wie sich daraus die Involutionen $^{n-1}\mathfrak{J}$ und $^{n+1}\mathfrak{J}$ und anderer Summen, rück- und vorwärts finden lassen. Es werden aber die niedrigern Summen aus höhern, bey der Boscovichschen Darstellung aus eben denselben Complexionen (der

Ordnungen a oder a^2 oder a^3 . . .) wie bey der Moivriſchen, abgeleitet, auch kommen Exempel und Nachweiſungen davon in der vorhergehenden Abhandlung (Note h, m, t, u, w) vor. Das Verfahren, die Complexionen niedrigerer Summen aus denen für höhere abzuleiten, hat auch Herr Trembley S. 60, 61 §. 1 und die dortige Note h) bemerkt. Es wird alſo nicht überflüſſig ſeyn, auch den entgegengeſetzten Fall zu berühren, und zu zeigen, wie man aus den Complexionen für $^{n}\mathfrak{J}$ die für $^{n+1}\mathfrak{J}$ finde, zumal da die Boscowichſche Anordnung dafür von der Moivriſchen hier ganz abweichend iſt.

17. Aufgabe. Die Complexionen der Summe $n+1$ aus den gegebenen Complexionen der nächſtvorhergehenden Summe n zu finden. d)

Auflöſung. I. Man ſetze allen einzelnen Complexionen der Summe n den Buchſtaben a vor.

II. Man vertauſche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe n, bey denen die beyden erſten Buchſtaben nicht einerley, ſondern verſchieden ſind) den erſten Buchſtaben ſolcher Complexionen, mit dem nächſtfolgenden ſpätern, und füge ſolchem die übrigen Buchſtaben der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen, die I und II geben, miſche man ſo unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I, die aus II ſetzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nämlich der Complexion zur Summe n erſte beyde Buchſtaben nicht verſchieden ſind) ſo ſetzt man blos die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe n fort.

d) Dieſe Aufgabe und ihre Auflöſung in Buchſtabencomplexionen, iſt mit der (im Arch. d. Math. H. IV, S. 405, 406) für die Zahlencomplexionen gleichgültig. Sie ſteht auch (E. S. t. a. A. S. 185).

18. Exempel für n=9; oder, aus den gegebenen Complexionen für $^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (13) die für $^{10}\mathfrak{J}^{r}$ abzuleiten.

Hier ist (nach 17, 18, aus 13)

$$^{10}\mathfrak{J}^{r}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots, & h, & i, & k \\ 1, & 2, & 3, & \ldots, & 8, & 9, & 10 \end{pmatrix}$$

a^9a

$a^8b;\ a^6b^2;\ a^4b^3;\ a^2b^4;\ b^5$

$a^7c,\ a^5bc,\ a^3b^2c,\ ab^3c;$
$a^4c^2,\ a^2bc^2,\ b^3c^2;$
ac^3

$a^6d,\ a^4bd,\ a^2b^2d,\ b^3d,\ a^3cd,\ abcd,\ c^2d;$
$a^2d^2,\ bd^2$

$a^5e,\ a^3be,\ ab^2e,\ a^2ce,\ bce,\ ade;$
e^2

$a^4f,\ a^2bf,\ b^2f,\ acf,\ df$

$a^3g,\ abg,\ cg$

$a^2h,\ bh$

ai

k

alles rein-combinatorisch abgeleitet und dargestellt.

Weil hier, um $^{10}\mathfrak{J}^{r}$ aus $^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (13) anzuordnen, allen Complexionen in $^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (nach Aufl. I) a vorgesetzt wird, und (Aufl. II) keine mit a anfangenden (zur Ordnung a gehörigen) Complexionen geben kann: so rechtfertigt dies zugleich die Vorschrift (16), nach welcher man, um $^{9}\mathfrak{J}^{r}$ aus $^{10}\mathfrak{J}^{r}$

man die Note bb) der vorhergehenden Abhandlung und die dort citirten Stellen.

8. Das combinatorische Gesetz des in A dargestellten Werthes von $D^{(9)}$ (in 7) für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{smallmatrix}\right)$ ist folgendes:

I. Wie $A^{(5)}c$; $A^{(3)}c^2$; $A^{(0)}c^3$ aus $A^{(9)}$ folgt, ist für sich klar; und man kann überhaupt $A^{(n)}$, $A^{(n-3)}c$, $A^{(n-5)}c^2$; $A^{(n-9)}c^3$, ... (2, II) als gegeben ansehen.

II. Aus den auf c sich endenden Verbindungen der zweyten Abtheilung, entstehen die auf d, d^2, d^3, d^4, ... sich endenden der dritten, auf folgende Art:

a) Für die auf Ein d sich endenden Verbindungen, vermindert man in den auf c sich endenden den Summenexponenten von A um 1 (so lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und statt des letzten c setzt man nun d. Aus $A^{(6)}c$ wird $A^{(5)}d$; aus $A^{(3)}cc$ wird $A^{(2)}cd$. Hingegen läßt sich $A^{(0)}ccc$ nicht weiter so verändern, da $A^{(-1)}c^2d$ keine Bedeutung hat.

b) Aus denen in d sich endenden Verbindungen findet man die in dd; aus denen in d^3 die in dddd; u. s. w. sich endenden Verbindungen derselben (dritten) Abtheilung, wenn man den Summenexponenten von A der zugehörigen vorhergefundenen Verbindungen um 4 (wegen d) vermindert (so lange man dadurch nicht auf eine negative Zahl verfällt) und statt d nun d^2, statt d^2 nun d^3, statt d^3 nun d^4 u. s. w. setzt. Aus $A^{(5)}d$ folgt $A^{(1)}d^2$; aber $A^{(2)}cd$ darf man nicht in $A^{(-2)}cd^2$ umsetzen. Eben so wenig darf man $A^{(1)}d^2$ in $A^{(-3)}d^3$ verändern. Die dritte Abtheilung von $D^{(9)}$ bricht also mit $A^{(1)}d^2$ ab, und von Verbindungen, die sich auf d^3, d^4 ... endeten, kann hier nichts vorkommen.

II. Eben so findet man, aus der dritten Abtheilung die vierte, aus der vierten die fünfte ... aus der (n−1)ten die nte. Aus $A^{(5)}d$ wird $A^{(4)}e$; aus $A^{(2)}cd$ wird $A^{(1)}ce$; aus $A^{(1)}dd$ wird $A^{(0)}de$, wenn man mit d für e eben so verfährt, wie vorher (II, a) mit c für d. Auf e^2, e^3, ... sich endende Verbindungen giebt's hier nicht, weil der Abzug der Zahl 5 (wegen e) auf eine negative Zahl führen, $A^{(4)}e$ z. B. $A^{(-1)}ee$ geben) würde; folglich (II, b) sich hier nicht anwenden läßt.

9. Die combinatorische Verkürzung (7), nach welcher man für jede höhere Ordnung $M^{(n)}$, alle Zwischenordnungen B, C, D, E, u. s. w. entbehren, und alles durch A unmittelbar ausdrücken kann, ist wichtig. Könnte man auch noch diese vorläufige Darstellung in A überspringen, und $M^{(n)}$ sogleich in den einfachen a, b, c, d, ... selbst ausdrücken: so würde man dadurch ungleich mehr gewinnen. Dies bewirkt unter andern

Boscovich's combinatorische Anordnung für Complexionen zu bestimmten Summen.

10. Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen zu finden.

11. Erste Auflösung, in Zahlen [b]; als Stellvertretern der Buchstaben: z. B. die Summe 9 aus den Zahlen

b) Die folgende Auflösung in Zahlen ist von Boscovich selbst, der die Aufgabe so angiebt: Trovare tutte le maniere, nelle quali possa un numero dato esser formato di parti, che contengano numeri interi. (Arch. d. Math. H. IV. S. 403 u. f.) Ich habe diese Auflösung in Zahlen des Zusammenhangs wegen hier wiederholt, und die Buchstabencomplexionen unmittelbar daneben gesetzt. Die letztern sind nicht etwa aus den Zahlencomplexionen übersetzt, sondern sind unab-

1, 2, 3, 4, 5 darzuſtellen; oder, in meinen Zeichen ausgedrückt:

Auflöſung für $^{9}\mathfrak{J}$
(1, 2, 3, 4, 5)

$$\left.\begin{array}{r} 111111111 = a^9 \\ \hline 11111112 = a^7b \\ 11111122 = a^5b^2 \\ 111122 = a^3b^3 \\ 12222 = a^1b^4 \end{array}\right\} = A^{(9)} \text{ c)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 111113 = a^6c \\ 11112 3 = a^4bc \\ 11223 = a^2b^2c \\ 2223 = b^3c \end{array}\right\} = A^{(6)}c$$

$$\left.\begin{array}{r} 11133 = a^3c^2 \\ 1233 = abc^2 \end{array}\right\} = A^{(3)}c^2$$

$$\left.\begin{array}{r} 333 = c^3 \end{array}\right] = A^{(0)}c^3$$

$$\left.\begin{array}{r} 111114 = a^5d \\ 11124 = a^3bd \\ 1224 = ab^2d \end{array}\right\} = A^{(5)}d$$

$$\left.\begin{array}{r} 1134 = a^2cd \\ 234 = bcd \end{array}\right\} = A^{(2)}cd$$

$$\left.\begin{array}{r} 144 = ad^2 \end{array}\right] = A^{(1)}d^2$$

hängig von jenen gefunden worden, wie die Auflöſung (12) zeigt. Dies rechtfertigt die Benennung Boscowich-Hindenburgiſche (S. 18) Involution.

c) Wegen der hier zugleich mit beygefügten Ausdrücke durch A ſehe man (15). Die daneben ſtehenden Complexionen geben zuſammen das Trembleyiſche $D^{(9)}$, wie aus (7) erhellet.

$$\left.\begin{array}{r} 11115 = a^4e \\ 1125 = a^2be \\ 225 = b^2e \end{array}\right\} = A^{(4)}e$$

$$135 = ace\ ] = A^{(1)}ce$$

$$45 = de\ ] = A^{(0)}de$$

I. Man schreibe für die erste Complexion so viel Einheiten (Einsen) in einer Reihe nach einander, als die gegebene Zahl (hier 9) enthält.

II. Darunter schreibe man für die zweyte Complexion rechter Hand am Ende, eine 2 mit den übrigen Einheiten zur Linken, und für die folgende zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. s. w. so lange sich die gegebene Summe auf diese Art durch Setzung von 2en und 1sen hervorbringen und darstellen läßt.

III. Sind die 2en abgelaufen, so schreibe man für die folgenden Complexionen rechter Hand am Ende, eine 3 nebst den übrigen Einheiten zur Linken; dann eine 3 nebst zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. s. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebst einer 2... und so geht es weiter auf die 4 und 5 (und folgende Zahlen, wenn mehrere gegeben sind) fort, nach Beschaffenheit der Summe; so, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum erstenmale rechter Hand am Ende vorkommt (von den niedrigsten Zahlen jedesmal anfangend) erst lauter Einsen zur Linken als Ergänzung nimmt, dann für die folgenden Complexionen neben dieser Endzahl eine 2, dann zwey, und so mehrere 2en, beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einsen ergänzt; dann weiter eine, und so in der Folge mehrere 3en damit verbindet, und so ferner andere Zahlen, nur keine Zahl die größer wäre, als die Endzahl der Complexion, die man eben bearbeitet.

1, 2, 3, 4, 5 darzuſtellen; oder, in meinen Zeichen ausgedrückt:

Auflöſung für $^{9}\mathfrak{J}$
(1, 2, 3, 4, 5)

$$\left.\begin{array}{r} 111111111 = a^9 \\ \hline 11111112 = a^7b \\ 11111122 = a^5b^2 \\ 111122 = a^3b^3 \\ 12222 = a^1b^4 \end{array}\right\} = A^{(9)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1111113 = a^5c \\ 111123 = a^4bc \\ 11223 = a^2b^2c \\ 2223 = b^3c \end{array}\right\} = A^{(6)}c$$

$$\left.\begin{array}{r} 11133 = a^3c^2 \\ 1233 = abc^2 \end{array}\right\} = A^{(3)}c^2$$

$$\left.\begin{array}{r} 333 = c^3 \end{array}\right] = A^{(0)}c^3$$

$$\left.\begin{array}{r} 111114 = a^5d \\ 11124 = a^3bd \\ 1224 = ab^2d \end{array}\right\} = A^{(5)}d$$

$$\left.\begin{array}{r} 1134 = a^2cd \\ 234 = bcd \end{array}\right\} = A^{(2)}cd$$

$$\left.\begin{array}{r} 144 = ad^2 \end{array}\right] = A^{(1)}d^2$$

hängig von jenen gefunden worden, wie die Auflöſung (12) zeigt. Dies rechtfertigt die Benennung Boscowich-Hindenburgiſche (S. 18) Involution.

c) Wegen der hier zugleich mit beygefügten Ausdrücke durch A ſehe man (15). Die daneben ſtehenden Complexionen geben zuſammen das Tremblepiſche $D^{(9)}$, wie aus (7) erhellet.

$$\left.\begin{array}{r} 11115 = a^4e \\ 1125 = a^2be \\ 225 = b^2e \end{array}\right\} = A^{(4)}e$$

$$135 = ace \;] = A^{(1)}ce$$

$$45 = de \;] = A^{(0)}de$$

I. Man schreibe für die erste Complexion so viel Einheiten (Einsen) in einer Reihe nach einander, als die gegebene Zahl (hier 9) enthält.

II. Darunter schreibe man für die zweyte Complexion rechter Hand am Ende, eine 2 mit den übrigen Einheiten zur Linken, und für die folgende zwey 2en mit den übrigen Einheiten, und dann drey 2en u. s. w. so lange sich die gegebene Summe auf diese Art durch Setzung von 2en und 1sen hervorbringen und darstellen läßt.

III. Sind die 2en abgelaufen, so schreibe man für die folgenden Complexionen rechter Hand am Ende, eine 3 nebst den übrigen Einheiten zur Linken; dann eine 3 nebst zwey 2en und den übrigen Einheiten; u. s. w. dann zwey 3en und die übrigen Einheiten; und zwey 3en nebst einer 2... und so geht es weiter auf die 4 und 5 (und folgende Zahlen, wenn mehrere gegeben sind) fort, nach Beschaffenheit der Summe; so, daß man immer bey der Complexion, wo eine Zahl zum erstenmale rechter Hand am Ende vorkommt (von den niedrigsten Zahlen jedesmal anfangend) erst lauter Einsen zur Linken als Ergänzung nimmt, dann für die folgenden Complexionen neben dieser Endzahl eine 2, dann zwey, und so mehrere 2en, beyfügt, und, wenn und was noch übrig bleibt, mit Einsen ergänzt; dann weiter eine, und so in der Folge mehrere 3en damit verbindet, und so ferner andere Zahlen, nur keine Zahl die größer wäre, als die Endzahl der Complexion, die man eben bearbeitet.

Die vorſtehende Darſtellung zeigt die leichte Anwendung der ganz einfachen Regel, nach welcher jede folgende Complexion aus der nächſtvorhergehenden ſich ableiten läßt, ſehr deutlich. Sie bricht mit der Endzahl 5 (der höchſten nehmlich der gegebenen Zahlen) ab, hätte aber eben ſo leicht auch auf die höhern Zahlen 6, 7, 8, 9 weiter erſtreckt werden können. Dieſe will ich in der nächſtfolgenden Auflöſung mitnehmen, und darinn die Buchſtabencomplexionen zugleich ſo aufführen, wie ſie ſich, mit ihren Wiederholungsexponenten verſehen, nach einander beſtimmen laſſen; wodurch die Darſtellung gegen die vorige (11) zugleich an Kürze und Deutlichkeit gewinnt.

12. Zweyte Auflöſung. Für dieſelbe Summe 9, in Buchſtaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In meinen Zeichen:

Auflöſung für $\left(\begin{matrix} a, b, c \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9 \end{matrix}\right)^9 \mathfrak{J}$

Sie befolgt genau das von mir bereits in (8) angegebene combinatoriſche Geſetz, wenn man, was dort von A und den zugehörigen Summenexponenten geſagt wird, hier auf a und den zugehörigen Potenzexponenten anwendet. Auch will ich die Befolgung des Geſetzes hier noch frühzeitiger (vom erſten Gliede a^9 an, das man ſich als $a^8.a$ vorſtellen kann) nachweiſen, ohne weiter etwas als gegeben anzunehmen. Nämlich

I. Als erſte Complexion ſetze man $a^9 = a^8a$, die einzige auf a ſich endende Verbindung oder Complexion.

II. Die auf b, b^2, b^3 ... ſich endenden Complexionen findet man ſo:

a) Man vermindert in a^8a den Exponenten von a^8 um 1, und schreibt statt des folgenden a nun b. Das giebt a^7b, die einzige auf Ein b sich endende Verbindung.

b) Das gefundene a^7b giebt weiter, wenn man den Exponenten von a um 2 vermindert, und statt b nun b^2 schreibt, a^5b^2; und daraus findet man auf eben die Art (den Exponenten von a^5 wieder um 2 vermindert und dafür ein b mehr geschrieben) a^3b^3; und daraus weiter a^1b^4.

Das giebt zusammen a^7b, a^5b^2, a^3b^3, a^1b^4., für die zweyte Abtheilung, aller auf b, b^2, b^3 ... sich endenden Verbindungen.

III. Durch weitere Anwendung des Verfahrens (in II) und Erstreckung der Regeln von b auf c (wo, wie vorher b auf die Zahl 2, sich nun c auf 3, und in der Folge d auf 4, und e auf 5, u. s. w. bezieht) findet man alle, auf c, c^2, c^3 ... sich endenden Verbindungen; und so auch alle auf die folgenden Buchstaben und ihre Potenzen sich endenden Complexionen der folgenden Abtheilungen.

Die Anwendung der Vorschriften (a, b in II) erstreckt sich blos auf die mit einem oder mehrern a anfangenden Complexionen, alle übrigen, die kein a haben, werden dabey übergangen. Da aber die Verminderung der Exponenten von a, bis auf und mit a^0 statt hat, so können diese Regeln, ob sie schon auf Verbindungen die kein a enthalten, nicht angewendet werden, gleichwohl dergleichen geben.

13. Die sämtlichen Complexionen der Auflösung (12) nach der Ordnung sind folgende:

$$\left(\begin{matrix} a, & b, & c \ldots, & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3 \ldots & 7, & 8, & 9 \end{matrix}\right)^{9}$$

a^8a

a^7b; a^5b^2; a^3b^3; a^1b^4

a^6c, a^4bc, a^2b^2c, b^3c;
a^3c^2, abc^2;
c^3

a^5d, a^3bd, ab^2d, a^2cd, bcd;
ad^2

a^4e, a^2be, b^2e, ace, de

a^3f, abf, cf

a^2g, bg

ah

i

14. Eine leichtere Darstellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer Ordnungen, von einander, läßt sich nicht gedenken. Sie bedarf keiner Vorbereitung (wie die in 3, 4, 7) stellt die Buchstaben, sogleich mit ihren Exponenten versehen, auf, und ist frey von allen Substitutionen complexer Zeichen. Ihre rein-combinatorische Anordnung beruht ganz auf einer äußerst leichten Umtauschung der Buchstaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glieder zu schreiben. Alles wird gleich so und an dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern oder zu verrücken, zusammengesetzt, wie und wo man es zum Gebrauch nützlich findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexionen unter oder nebeneinander oder in welcher andern Lage man sie schreiben will,

Hier habe ich sie mit Fleiß, etwas weitläuftiger, so abgesetzt, wie man das Gesetz ihrer Ableitung und Abhängigkeit von einander am deutlichsten übersieht. So werde ich mich auch für ähnliche Fälle in der Folge verhalten. Es ist eine übel angebrachte Sparsamkeit, mit Aufopferung solcher Vortheile — peritura parcere chartae.

15. Die Entwickelung der Complexionen (in 13) enthält die (hier in 5 und S. 84, 85 Note cc) versprochene Simplification des Trembleyischen Substitutionsverfahrens (3, 4): Den Uebergang von diesem auf jene macht die (in 7) aufgestellte, und durch A ausgedrückte, combinatorische Verkürzung, die aber von der (in 13) noch weit übertroffen wird. Zur unmittelbaren Vergleichung und Nachweisung, daß die Boscovichsche Darstellung die Complexionen vollkommen in eben der Ordnung und Folge aufeinander, wie das Trembleyische Substitutionsverfahren, giebt, habe ich in dem Schema (11) dafür, den Ausdruck durch A den in a, b, c, d, e entwickelten Gliedern, rechter Hand beygefügt. Bey andern Entwickelungen, in der Folge, werde ich ihn (wie auch schon hier in (13) geschehen ist) als vollkommen entbehrlich, weglassen.

Mehrere Darstellungen verschiedener Summen, in Zahlen und Buchstaben, sind zu unmittelbarem Gebrauche in der Anwendung, am Ende der Abhandlung besonders (in Tafel V) aufgestellt.

16. Bey der Moivrischen Entwickelung der Involution $^{n}\mathfrak{J}$, ist (S. 43. §. 58) erinnert und gezeigt worden, wie sich daraus die Involutionen $^{n-1}\mathfrak{J}$ und $^{n+1}\mathfrak{J}$ und anderer Summen, rück- und vorwärts finden lassen. Es werden aber die niedrigern Summen aus höhern, bey der Boscovichschen Darstellung aus eben denselben Complexionen (der

Ordnungen a oder a^2 oder a^3 . . .) wie bey der Moivrischen, abgeleitet, auch kommen Exempel und Nachweisungen davon in der vorhergehenden Abhandlung (Note h, m, t, u, w) vor. Das Verfahren, die Complexionen niedrigerer Summen aus denen für höhere abzuleiten, hat auch Herr Trembley S. 60, 61 §. 1 und die dortige Note h) bemerkt. Es wird also nicht überflüssig seyn, auch den entgegengesetzten Fall zu berühren, und zu zeigen, wie man aus den Complexionen für $^{n}\mathfrak{J}$ die für $^{n+1}\mathfrak{J}$ finde, zumal da die Boscowichsche Anordnung dafür von der Moivrischen hier ganz abweichend ist.

17. Aufgabe. Die Complexionen der Summe $n+1$ aus den gegebenen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe n zu finden. d)

Auflösung. I. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe n den Buchstaben a vor.

II. Man vertausche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe n, bey denen die beyden ersten Buchstaben nicht einerley, sondern verschieden sind) den ersten Buchstaben solcher Complexionen, mit dem nächstfolgenden spätern, und füge solchem die übrigen Buchstaben der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen, die I und II geben, mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I, die aus II setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nämlich der Complexion zur Summe n erste beyde Buchstaben nicht verschieden sind) so setzt man blos die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe n fort.

d) Diese Aufgabe und ihre Auflösung in Buchstabencomplexionen, ist mit der (im Arch. d. Math. H. IV. S. 405, 406 für die Zahlencomplexionen gleichgültig. Sie steht auch (E S. t. a. A. S. 185).

18. Exempel für n=9; oder, aus den gegebenen Complexionen für ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (13) die für ${}^{10}\mathfrak{J}^{r}$ abzuleiten.

Hier iſt (nach 17, 18, aus 13)

$${}^{10}\mathfrak{J}^{r}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots, & h, & i, & k \\ 1, & 2, & 3, & \ldots, & 8, & 9, & 10 \end{pmatrix}$$

a^9a

a^8b; a^6b^2; a^4b^3; a^2b^4; b^5

a^7c, a^5bc, a^3b^2c, ab^3c;
a^4c^2, a^2bc^2, b^2c^2;
ac^3

a^6d, a^4bd, a^2b^2d, b^3d, a^3cd, $abcd$, c^2d;
a^2d^2, bd^2

a^5e, a^3be, ab^2e, a^2ce, bce, ade;
e^2

a^4f, a^2bf, b^2f, acf, df

a^3g, abg, cg

a^2h, bh

ai

k

alles rein-combinatoriſch abgeleitet und dargeſtellt.

Weil hier, um ${}^{10}\mathfrak{J}^{r}$ aus ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (13) anzuordnen, allen Complexionen in ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ (nach Aufl. 1) a vorgeſetzt wird, und (Aufl. 11) keine mit a anfangenden (zur Ordnung a gehörigen) Complexionen geben kann: ſo rechtfertigt dies zugleich die Vorſchrift (16), nach welcher man, um ${}^{9}\mathfrak{J}^{r}$ aus ${}^{10}\mathfrak{J}^{r}$

(die Complexionen einer niedrigern Summe aus denen der nächsthöhern) zu finden, alle Complexionen der Ordnung a der letztern, um ein a vermindert, die übrigen aber ganz übergeht.

Combinationen zu unbestimmten Summen n.

19. Die Darstellungen (13, 18) führen unmittelbar darauf.

Hierher gehören die beyden Formeln:

$$\begin{array}{c} {}^{n}\mathfrak{J} \\ \begin{pmatrix} a, b, c \ldots\ldots & \overset{m-3}{a}, & \overset{m-2}{a}, & \overset{m-1}{a} \\ 1, 2, 3 \ldots\ldots & m-2, & m-1, & m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$=$$

$$\underset{(a)}{{}^{n-1}\mathfrak{J}a} + \underset{(a,b)}{{}^{n-2}\mathfrak{J}b} + \underset{(a,b,c)}{{}^{n-3}\mathfrak{J}c} + \underset{(a,b,c,d)\ldots}{{}^{n-4}\mathfrak{J}d} + \text{etc}$$

$$=$$

$$\begin{array}{l} {}^{n}\mathfrak{J} + {}^{n-2}\mathfrak{J}b + {}^{n-4}\mathfrak{J}b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}b^3 + \text{etc}\ (a) \\ \quad + {}^{n-3}\mathfrak{J}c + {}^{n-6}\mathfrak{J}c^2 + {}^{n-9}\mathfrak{J}c^3 + \text{etc}\ (a, b) \\ \quad + {}^{n-4}\mathfrak{J}d + {}^{n-8}\mathfrak{J}d^2 + {}^{n-12}\mathfrak{J}d^3 + \text{etc}\ (a,b,c) \\ \quad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \end{array}$$ e)

die weitere Fortsetzung hat keine Schwierigkeit und findet sich in Tafel VI am Ende dieser Abhandlung.

20. Zu bemerken:

e) Raum zu ersparen, sind hier die (a); (a, b); (a, b, c) . . . neben den combinatorischen Gliedern, nicht wie sonst gewöhnlich darunter, gesetzt, auch den Buchstaben a, b, c . . . nicht ihre Lokalwerthe beygefügt worden; welches um so füglicher geschehen konnte, da sie oben unter ${}^{n}\mathfrak{J}$ im Zeiger beysammen stehen.

I. Die erste Formel gründet sich darauf, daß nach der Boscovichschen Anordnung, die auf einerley Buchstaben sich endenden Complexionen durchgängig beysammen stehen, und nach der Ordnung der Buchstaben a, b, c, d . . . auf einander folgen (11, 13, 18); die zweyte Formel unterscheidet hierbey noch die Potenzen b, b^2, b^3 . . .; c, c^2, c^3 . . . u. s. w. der Endbuchstaben (Ebendas. und 6, III). Durch sie werden die einzelnen Glieder der ersten weiter zerlegt.

Die Aehnlichkeit dieser zweyten Formel mit den Tremhleyischen Reductionsformeln (2, II) fällt in die Augen; nur werden hier, statt jener complexen von einander abhängigen Zeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . ., die simpeln, unabhängigen, combinatorisch leicht auszuführenden ${}^{n}\mathfrak{J}_{a}$, ${}^{n-2}\mathfrak{J}_{a}$, ${}^{n-3}\mathfrak{J}_{a}$ u. s. w. gebraucht. Die Reduction der Trembleyischen Gleichungen (2, II) auf die hiesigen combinatorischen Formeln, erhellt aus Note 1 der vorhergehenden Abhandlung. Man vergleiche ferner Note s, v, x, y, z, aa, die mehrere Beyspiele enthalten.

II. In der ersten Formel sind die Buchstaben a, b, c . . . unter die involutorischen Zeichen zeigermäßig untergesetzt; in der zweyten am Ende jeder Reihe beygefügt. Jene gehören zu dem Gliede, unter welchem; diese, zu der Reihe, neben welcher, sie stehen.

III. Das mte Glied der ersten Formel, ist

$$\left(a,\ b,\ c\ \ldots\ {}^{n-m}\mathfrak{J}_{a}^{m-1}\,a,\ {}^{m-2}a^{m-1}\right).$$

Die (m−1)te Horizontalreihe der zweyten Formel, ist

$$\underset{(a,\,b,\,c\,\ldots\,\overset{m-3}{a},\,\overset{m-2}{a})}{{}^{n-m}_{a}\mathfrak{J}^{m-1}} + {}^{n-2m}_{a}\mathfrak{J}[{}^{m-1}_{a}]^{2} + {}^{n-3m}_{a}\mathfrak{J}[{}^{m-1}_{a}]^{3} \ldots + {}^{n-rm}_{a}\mathfrak{J}[{}^{m-1}_{a}]^{r}$$

IV. In der Anwendung, wofür die Darstellungen (13, 18) als Beyspiele (für $n=9$; $n=10$) dienen können, fallen viele von den in der allgemeinen (zweyten) Formel aufgeführten Potenzen der Endbuchstaben weg, in sofern selbige durch die Größe der Summenzahl n beschränkt und ausgeschlossen werden (6, III). So kommen (für $n=9$, in 13) keine Endpotenzen b^5, c^4, d^3, und noch viel weniger höhere vor; eben so fallen bey den Buchstaben e, f, g, h, i alle Potenzen, außer der ersten, ganz weg.

V. Auch die zeigermäßig unter und neben den involutorischen Zeichen geschriebenen Buchstaben a, b, c ... (II) kommen in der Anwendung bey beyden Formeln nicht immer alle vor. Auf den Fall nämlich, wenn der Summenexponent $n-m$ oder $n-rm$ **kleiner** ist, als die im Zeiger angegebene Menge der Buchstaben, werden **nur so viel** Buchstaben a, b, c .... gebraucht, als der kleinere Summenexponent Einheiten hat.

Das in IV und V) Gesagte ist blos nachrichtlich hier beygebracht, und soll keineswegs dem Gedächtnisse zur Last fallen. Denn wenn es zur wirklichen Anwendung kommt, ergiebt sich das alles von selbst, ohne Schwierigkeit. So z. B. ist

$$\underset{\binom{a,b,\ldots i,k}{1,2,\ldots 9,10}}{{}^{10}_{a}\mathfrak{J}} = \underset{(a)}{{}^{9}_{a}\mathfrak{J}a} + \underset{(a,b)}{{}^{8}_{a}\mathfrak{J}b} + \underset{(a,b,c)}{{}^{7}_{a}\mathfrak{J}c} + \underset{(a,b,c,d)}{{}^{6}_{a}\mathfrak{J}d} + \underset{(a,b,c,d,e}{{}^{5}_{a}\mathfrak{J}e}$$

$$+ \underset{(a,b,c,d)}{{}^{4}_{a}\mathfrak{J}f} + \underset{(a,b,c)}{{}^{3}_{a}\mathfrak{J}g} + \underset{(a,b)}{{}^{2}_{a}\mathfrak{J}h} + \underset{(a)}{{}^{1}_{a}\mathfrak{J}i} + \underset{(1)}{{}^{0}_{a}\mathfrak{J}k}$$

Es können nehmlich im Zeiger keine Buchstaben vorkommen, deren Lokalwerthe größer wären, als der oben linker Hand stehende Summenexponent von $\mathfrak{T}$.

VI. Die Formeln (19) geben jede Abtheilung der auf bestimmte Buchstaben sich endenden Complexionen, von allen übrigen unabhängig.

21. Aufgabe und Exempel. Die Complexionen der Endordnung d von ${}^{12}_{a}\mathfrak{T}^{c}$ für den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ anzugeben.

Auf. Für den Lokalwerth 4 von d ist, nach der ersten Formel (19), ${}^{12-4}_{a}\mathfrak{T}^{c}d$, oder

$$\begin{matrix} {}^{8}_{a}\mathfrak{T}^{c}d \\ (a, b, c, d) \end{matrix} = \begin{Bmatrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c. & a^2c^2, & bc^2 \\ a^4d, & a^2bd, & b^2d, & acd, & d^2 \end{Bmatrix} d$$

Die andere Formel gäbe eben das so:

$${}^{8}_{a}\mathfrak{T}^{c}d + {}^{4}_{a}\mathfrak{T}^{c}d^2 + {}^{0}_{a}\mathfrak{T}^{c}d^3 \ (a, b, c)$$

$$= \begin{pmatrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c, & a^2c^2, & bc \end{pmatrix} d$$

$$(a^4, a^2b, b^2, ac)\ d^2, \ 1.d^3$$

Die Complexionen für ${}^{8}_{a}\mathfrak{T}^{c}$, ${}^{4}_{a}\mathfrak{T}^{c}$ kann man entweder (nach 11 oder 12) unmittelbar construiren, oder vermittelst (13) nach (16) herstellen, oder endlich aus Tafel V, hier am Ende, abschreiben.

22. Die Boscovichsche Darstellung giebt die Complexionen in rückwärts-lexikographischer Ord-

nung [1]). Man könnte aber auch die $^{n-m}\mathfrak{J}$ z. B. die $^{8}\mathfrak{J}$ und $^{9}\mathfrak{J}$ (in 21) nach de Moivre (S. 41-43) entwickeln, und den einzelnen Complexionen den Endfactor d, oder die d, d^2, d^3 zuletzt beyfügen. Dadurch würde die ganze Abtheilung der in d sich endenden Complexionen in direct lexikographischer Ordnung erscheinen.

Vergleichung der Moivrischen involutorischen Anordnung mit der Boscovichschen.

23. Etwas darüber findet sich bereits (Arch. der Math. H. IV, S. 409, 410). Hier kann man nun aus Vergleichung von Taf. III, IV, V, VI und den zugehörigen Erläuterungen im Texte, die Sache noch genauer übersehen:

a) Die Regeln für beyde Verfahren, die Complexionen für bestimmte Summen zu finden, sind unstreitig gleich leicht. Ihre Complexionen sind beyderseits lexikographisch, vorwärts die einen, rückwärts die andern, nach Anfangs- und Endbuchstaben, und ihren Potenzen, geordnet.

b) Die Boscovichsche Vorschrift (hier 11) ist gleichwohl nicht rein-combinatorisch, wie die Moivrische (E. S. c. a. A. S. 184, 43). Beyde Darstellungen stehen (Ebend. S. 183) neben einander.

[1]) Nach der gewöhnlichen (Arch. d. Math. H. IV. S. 404, a, b) auch hier (in 11 und anderwärts) durchgängig beobachteten Anordnung. In der Folge hat Boscovich selbst die größern Zahlen vorangestellt, und dadurch die rückwärts-lexikographische Folge der Complexionen in eine direct-lexikographische verwandelt (Arch. a. a. O. S. 421; Exempel davon, Ebend. S. 409, 410). Die Involution (S. 409) zeigt zugleich, wie man jede Complexion aus der nächstvorhergehenden ableiten könne, wenn man die äußerste höchste Zahl als abgesondert betrachtet, und mit den übrigen nach Boscovichs Regel (11) verfährt.

c) Es läßt sich zwar, wie ich (in 12) gezeigt habe, die Boscovichsche Folge der Complexionen auch rein-combinatorisch anordnen. Aber die Darstellung selbst ist doch von der Beschaffenheit, daß sich aus ihr, nicht so unmittelbar wie aus der Moivrischen, die Involutionen niedrigerer Summen durch bloße Winkel absondern und ausschneiden, so, wie die der höhern Summen durch bloßes Ansetzen des Ermangelnden an die niedrigern, hervorbringen lassen. Im letztern Falle muß man, bey Befolgung der Vorschrift (17) die höhere Summe nothwendig besonders absetzen.

d) Eben so ist auch die Handhabung der Formeln (19) für die unbestimmte Summe n nach Boscovichs Anordnung, nicht so einfach und geschmeidig, wie die der Moivrischen (E. S. c. a. A. S. 202 und hier Abh. I. S. 17. Taf. IV, 15).

e) Eine Folge (aus c und d) ist: Die Boscovichsche Darstellung ist, in Absicht auf höhere und niedrigere Summen, nicht in so hohem Grade involutorisch, als die Moivrische.

f) Die lexikographischen Complexionen nach de Moivre lassen sich sogleich, nach meiner Anordnung, in Classen zusammenfassen, und so eine Involution in die andere umformen (E. S. c. a. A. S. 195, 60). Nicht so die Complexionen nach Boscovich [g].

g) Eine ähnliche Umformung meiner Classeninvolution in die Boscovichsche Anordnung und umgekehrt, hatte ich (a. a. O. und Arch. d. Math. H. IV. S. 408) angegeben. Dagegen hat Herr Prof. Pfaff (Disquis. anal. p. 296) drey Instanzen aufgestellt. Es hätten nehmlich in jenen beyden Stellen nicht meine Classen (deren Complexionen wie Zahlen wachsen) sondern die Boscovichschen (die nach fallenden Endzahlen fortgehen) genannt werden sollen. An diesen Unterschied, den ich doch (Arch. S. 411; 34) ausdrücklich nachgewiesen, selbst (in der dortigen Note) eines der drey Beyspiele angeführt habe, die Herr Prof. Pfaff gegen mich gebraucht, hatte ich dort nicht gedacht! Zum Ueberfluß will ich noch die von mir (E. S. c. a. S. 264) aufgestellten Anordnungen α, β, γ anführen, wo meine Classendarstellung α, und die Boscovichsche β, nebst der rückwärts umgekehrten γ von letzterer, zur

g) Die Bosçowichsche Darstellung dagegen involvirt die Complexionen für die successive wachsenden Zeiger: a; und a, b; und a, b, c; und a, b, c, d; u. s. w. aufs vollkommenste. Ein anderer eigenthümlicher, nicht unwichtiger Vorzug dieser Anordnung besteht auch darinn, daß sie die zusammengehörigen Complexionen für Zeiger aus Zahlen (und dadurch auch aus Buchstaben) die nicht nach der Ordnung, sondern sprungweise, fortgehen, ohne alle Umschweife mit Leichtigkeit darstellt (E. S. c. a. A. S. 261, 262). Ein Umstand von bedeutender Wichtigkeit für die Anwendung!

Hieher gehört das Tremblevische Exempel (Abh. II. §. 7) für das 10de Glied des dortigen Bruchs und den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & d, & e \\ 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}$

Für das dortige $D^{(9)}$ hätte man nämlich $\overset{9}{\mathfrak{T}}\begin{pmatrix} a, & d, & e \\ 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}$

d. i. die Summe 9 aus 1, 4, 5 oder a, d, e zusammenzusetzen. Die Complexionen dafür können (nach 11) keine andern, als folgende seyn, die man sogleich in ihrer Ordnung findet:

111111111	=	a^9	Daraus fände man (nach 16)
11114	=	a^5d	
144	=	ad^2	$D^{(8)} = a^8 + a^4d + d^2 + a^3e$
1115	=	ae	und $D^{(7)} = a^7 + a^3d + a^2e$.
45	=	de	

unmittelbaren Vergleichung neben einanderstehend befindlich sind.

Beyſpiel der Boscovichſcheh Anordnung vor Boscovich; eine literariſche Merkwürdigkeit.

24. I. De Moivre (Miſcell. anal. p. 86) ſtellt folgende Aufgabe auf:

PROBLEMA IV. Inuenire Terminum quemlibet, cuius locus aſſignetur in Serie nata ex diuiſione Unitatis per Multinomium quodcunque.

II. In der Auflöſung (Ebendaſ.) bezieht er ſich auf ſeinen der Societät in London am 6ten Jun. 1697 übergebenen und in den Philoſ. Transact. No. 230 eingerückt befindlichen allgemeinen Lehrſatz, den er auch (Miſcell. S. 87) mittheilt, wie folget:

III. THEOREMA. Si multinomium $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+$ etc ad poteſtatem quamlibet datam n ſit attollendum, erit poteſtas requiſita. — Hier folgen die 6 erſten Glieder der Formel nach der Ordnung, bis mit z^5, wie ſie auch von mir (Arch. d. Math. H. IV. S. 386) aufgeführt ſind, für das dortige z^m hier überall 1, und n für m geſetzt.

IV. Bey den Coefficienten ſeiner Reihe unterſcheidet de Moivre ausdrücklich zweyerley Geſetze: 1) der Producte aus a, b, c, d ... und 2) der ihnen vorzuſetzenden Unzen oder Zahlen. Von beyden handelt er (S. 87-89) umſtändlich; insbeſondere von Formirung der Buchſtabenproducte (S. 89) deren Geſetz nach de Moivre ich auch (Arch. a. a. O. S. 387, 3) kurz und faßlich vorgelegt habe. Unmittelbar nach Angabe dieſes Geſetzes folgt:

V. COROLLARIUM I. Si ponatur $n=-1$ et $a=1$, tunc erit quotiens oriundus ex diuiſione Vnitatis per

Multinomium $1 - bz - cz^2 - dz^3 - etc =$ (Hier folgen die entwickelten 9 erſten Glieder des Quotienten bis mit z^8, in ihrer Ordnung auf einander).

VI. Die Worte (in V) Si ponatur $n = -1$ et $a = 1$ beziehen ſich offenbar auf das Theorem (III) und wird dadurch der Quotient $\frac{1}{1-bz-cz^2-dz^3-etc}$ (I) auf die Potenz $(1 - bz - cz^3 - dz^4 - etc)^{-1}$ reducirt. Die Producte der Buchſtaben b, c, d, e . . . ſollten alſo doch wohl dem unmittelbar vorher beſchriebenen (in IV erwähnten) Geſetze folgen [h]). Statt deſſen giebt de Moivre folgende, von jenem Geſetze ganz abweichende, Entwickelung:

h) Das Natürliche; und (wenn weiter nichts dabey erinnert wird) Nothwendige dieſer Vorausſetzung iſt auch Urſache geweſen, daß ich die de Moivriſche ausführliche Entwickelung von $(1 - bz - cz^2 - dz^3 etc)^{-1}$ nicht weiter mit jenem Geſetze zuſammengehalten, und die Abweichung davon bemerkt habe, ob ich gleich mehrmals darauf geſtoßen bin. Nur erſt neuerlich iſt mir ſelbige, durch eine zufällige Veranlaſſung bemerklich geworden, ſo wenig verſteckt auch übrigens dieſe Abweichung iſt.

VII. Es ist nehmlich die (a. a. O. S. 89) mitgetheilte Entwickelung des Quotienten (I) oder der ihm gleichgültigen (VI) Potenz $(1-bz-cz^2-dx^3-\text{etc})^{-1} =$

$$
\begin{array}{rrrr

Die Litteralproducte zu z^6, z^7, z^8 hat de Moivre hier nur von den Buchſtaben b, c, d, e, nicht weiter, mitgetheilt. Dabey hat er, aus Verſehen, zwey Glieder, 2de für z^7 und 6bde für z^8, weggelaſſen, die ich hier gehörigen Orts eingeſchaltet habe.

VIII. Die combinatoriſche Formel für den Quotienten oder die Potenz (VII) iſt bekanntermaßen (S. 15)

$$1+i^1\mathfrak{J}^r z^r+i^2\mathfrak{J}^r z^2+i^3\mathfrak{J}^r z^3+i^4\mathfrak{J}^r z^4+i^5\mathfrak{J}^r z^5+\text{etc}$$
$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Complexionen für die $^m\mathfrak{J}^r$ hier in (VII) ſtellen aber nicht, wie man vermuthen ſollte, die Moiviſche, ſondern — die Boscovichſche Anordnung dar. Eine merkwürdige Erſcheinung! die eine ausführliche Auseinanderſetzung, wie ich ſie hier gegeben habe, wohl verdiente.

IX. Nun entſteht die Frage, wie de Moivre auf dieſe Anordnung verfallen ſey? da ihm doch die Reduction (V) vielmehr auf ſein ſo eben (unmittelbar vorher) bekannt gemachtes und (p. 89) ausführlich von ihm beſchriebenes Geſetz verwies. Darauf läßt ſich folgendes erwiedern:

X. Die Entwickelung (VII) enthält lauter beſtimmte Zahlen und Exponenten, keine unbeſtimmten, wie die für III. Dieſen Umſtand benutzt de Moivre, für die Bequemlichkeit der Leſer, folgendergeſtalt:

a) Im COROLLARIO I. (p. 89) drückt er, unmittelbar nach der Entwickelung (VII) die numeriſchen Coefficienten oder Verſetzungszahlen ſo aus, wie ſie durch die beſtimmten Exponenten gegeben ſind.

b) Im COROLLARIO II (p. 90) erinnert er, man solle in dem vorliegenden Falle, die Zählung der Buchstaben b, c, d . . . nicht von a, sondern von b anfangen, das heißt, in meiner Sprache, man solle $\binom{b,\ c,\ d,\ e\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}$ nicht $\binom{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}$ zum Zeiger nehmen; dadurch werde der Vortheil geschafft, daß die Summe der Exponenten der einzelnen Buchstaben der zu z^1 gehörigen Litteralproducte, dem Potenzexponenten 1 durchgängig gleich sey.

c) Im COROLLARIO III (p. 90) wird bemerkt, die zu einer und derselben Potenz von z gehörigen Litteralproducte (in VII) seyen von der Auflösung der beyden Gleichungen $z+y+x+\text{etc}=a$ und $\alpha z^2+\beta y+\gamma x+\text{etc}=b$, für ganze, positive z, y, x . . . abhängig. Die ganze ausführliche Stelle habe ich (E. S. c. a. A; S. 119) bey einer andern Gelegenheit angeführt.

XI. Hierinn wäre also die Antwort auf die Frage (in IX) zu suchen. Aber man sieht nicht ein, wie die Auflösung jener unbestimmten Aufgabe, unter so vielen andern gleichmöglichen, geradezu auf die Ordnung der Litteralproducte in VII führe. Man muß also annehmen, de Moivre habe diese Ordnung bey der Gelegenheit zufällig bemerkt, und aus mehrern ausgehoben. Befremdend bleibt es gleichwohl immer, daß er nichts darüber erinnert hat.

Die Combinationslehre führt die Auflösung analytischer Aufgaben gewöhnlich zu ihrer ursprünglichen Simplicität zurück.

25. Auf die Frage (24, IX) läßt sich auch folgende Auskunft geben. Vielleicht hat de Moivre den Quotienten in VII durch wirkliche Division der 1 durch die Reihe $1-bz-cz^2-dz^3-\text{etc}$ gesucht. Die Schwierigkeit,

$$\underset{\left(a,\ b,\ c\ \ldots\ \overset{m-3}{a},\ \overset{m-2}{a}\right)}{{}^{n-m}\mathfrak{J}^{m-1}_{a} + {}^{n-2m}\mathfrak{J}\left[{}^{m-1}_{a}\right]^{2} + {}^{n-3m}\mathfrak{J}\left[{}^{m-1}_{a}\right]^{3} \ldots + {}^{n-rm}\mathfrak{J}\left[{}^{m-1}_{a}\right]^{r}}$$

IV. In der Anwendung, wofür die Darstellungen (13, 18) als Beyspiele (für $n=9$; $n=10$) dienen können, fallen viele von den in der allgemeinen (zweyten) Formel aufgeführten Potenzen der Endbuchstaben weg, in sofern selbige durch die Größe der Summenzahl n beschränkt und ausgeschlossen werden (6, III). So kommen (für $n=9$, in 13) keine Endpotenzen b^5, c^4, d^3, und noch viel weniger höhere vor; eben so fallen bey den Buchstaben e, f, g, h, i alle Potenzen, außer der ersten, ganz weg.

V. Auch die zeigermäßig unter und neben den involutorischen Zeichen geschriebenen Buchstaben a, b, c ... (II) kommen in der Anwendung bey beyden Formeln nicht immer alle vor. Auf den Fall nämlich, wenn der Summenexponent $n-m$ oder $n-rm$ kleiner ist, als die im Zeiger angegebene Menge der Buchstaben, werden nur so viel Buchstaben a, b, c .... gebraucht, als der kleinere Summenexponent Einheiten hat.

Das in IV und V) Gesagte ist blos nachrichtlich hier beygebracht, und soll keinesweges dem Gedächtnisse zur Last fallen. Denn wenn es zur wirklichen Anwendung kommt, ergiebt sich das alles von selbst, ohne Schwierigkeit. So z. B. ist

$$\underset{\left(\substack{a,b,\ldots i,k\\1,2,\ldots 9,10}\right)}{{}^{10}\mathfrak{J}} = \underset{(a)}{{}^{9}\mathfrak{J}a} + \underset{(a,b)}{{}^{8}\mathfrak{J}b} + \underset{(a,b,c)}{{}^{7}\mathfrak{J}c} + \underset{(a,b,c,d)}{{}^{6}\mathfrak{J}d} + \underset{(a,b,c,d,e)}{{}^{5}\mathfrak{J}e}$$

$$+ \underset{(a,b,c,d)}{{}^{4}\mathfrak{J}f} + \underset{(a,b,c)}{{}^{3}\mathfrak{J}g} + \underset{(a,b)}{{}^{2}\mathfrak{J}h} + \underset{(a)}{{}^{1}\mathfrak{J}i} + \underset{(1)}{{}^{0}\mathfrak{J}k}$$

Es können nehmlich im Zeiger keine Buchstaben vorkommen, deren Lokalwerthe größer wären, als der oben linker Hand stehende Summenexponent von $\mathfrak{T}$.

VI. Die Formeln (19) geben jede Abtheilung der auf bestimmte Buchstaben sich endenden Complexionen, von allen übrigen unabhängig.

21. Aufgabe und Exempel. Die Complexionen der Endordnung d von ${}^{12}\mathfrak{T}$ für den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ anzugeben.

Auflk. Für den Lokalwerth 4 von d ist, nach der ersten Formel (19), ${}^{12-4}\mathfrak{T}d$, oder

$$ {}^{8}\mathfrak{T}d \atop (a,b,c,d) = \left\{ \begin{matrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c. & a^2c^2, & bc^2 \\ a^4d, & a^2bd, & b^2d, & acd, & d^2 \end{matrix} \right\} d $$

Die andere Formel gäbe eben das so:

$$ {}^{8}\mathfrak{T}d + {}^{4}\mathfrak{T}d^2 + {}^{0}\mathfrak{T}d^3 \ (a,\ b,\ c) $$

$$ = $$

$$ \begin{matrix} \left(\begin{matrix} a^8, & a^6b, & a^4b^2, & a^2b^3, & b^4 \\ a^5c, & a^3bc, & ab^2c, & a^2c^2, & bc \end{matrix} \right) d \\ (a^4, \ a^2b, \ b^2, \ ac) \ d^2, \ 1.d^3 \end{matrix} $$

Die Complexionen für ${}^{8}\mathfrak{T}$, ${}^{4}\mathfrak{T}$ kann man entweder (nach 11 oder 12) unmittelbar construiren, oder vermittelst (13) nach (16) herstellen, oder endlich aus Tafel V, hier am Ende, abschreiben.

22. Die Boscovichsche Darstellung giebt die Complexionen in rückwärts-lexikographischer Ord-

nung [f]). Man könnte aber auch die $^{n-m}\mathfrak{J}^{r}$ z. B. die $^{8}\mathfrak{J}^{r}$ und $^{4}\mathfrak{J}^{r}$ (in 21) nach de Moivre (S. 41-43) entwickeln, und den einzelnen Complexionen den Endfactor d, oder die d, d^2, d^3 zuletzt beyfügen. Dadurch würde die ganze Abtheilung der in d sich endenden Complexionen in direct lexikographischer Ordnung erscheinen.

Vergleichung der Moivrischen involutorischen Anordnung mit der Boscovichschen.

23. Etwas darüber findet sich bereits (Arch. der Math. H. IV, S. 409, 410). Hier kann man nun aus Vergleichung von Taf. III, IV, V, VI und den zugehörigen Erläuterungen im Texte, die Sache noch genauer übersehen:

a) Die Regeln für beyde Verfahren, die Complexionen für bestimmte Summen zu finden, sind unstreitig gleich leicht. Ihre Complexionen sind beyderseits lexikographisch, vorwärts die einen, rückwärts die andern, nach Anfangs- und Endbuchstaben, und ihren Potenzen, geordnet.

b) Die Boscovichsche Vorschrift (hier 11) ist gleichwohl nicht rein-combinatorisch, wie die Moivrische (E. S. c. a. A. S. 184, 43). Beyde Darstellungen stehen (Ebend. S. 183) neben einander.

f) Nach der gewöhnlichen (Arch. d. Math. H. IV. S. 404, a, b) auch hier (in 11 und anderwärts) durchgängig beobachteten Anordnung. In der Folge hat Boscovich selbst die größern Zahlen vorangestellt, und dadurch die rückwärts-lexikographische Folge der Complexionen in eine direct-lexikographische verwandelt (Arch. a. a. O. S. 421; Exempel davon, Ebend. S. 409, 410). Die Involution (S. 409) zeigt zugleich, wie man jede Complexion aus der nächstvorhergehenden ableiten könne, wenn man die äußerste höchste Zahl als abgesondert betrachtet, und mit den übrigen nach Boscovichs Regel (11) verfährt.

c) Es läßt sich zwar, wie ich (in 12) gezeigt habe, die Boscovichsche Folge der Complexionen auch rein-combinatorisch anordnen. Aber die Darstellung selbst ist doch von der Beschaffenheit, daß sich aus ihr, nicht so unmittelbar wie aus der Moivrischen, die Involutionen niedrigerer Summen durch bloße Winkel absondern und ausschneiden, so, wie die der höhern Summen durch bloßes Ansetzen des Ermangelnden an die niedrigern, hervorbringen lassen. Im letztern Falle muß man, bey Befolgung der Vorschrift (17) die höhere Summe nothwendig besonders absetzen.

d) Eben so ist auch die Handhabung der Formeln (19) für die unbestimmte Summe n nach Boscovichs Anordnung, nicht so einfach und geschmeidig, wie die der Moivrischen (E. S. c. a. A. S. 202 und hier Abh. I. S. 17. Taf. IV, 15).

e) Eine Folge (aus c und d) ist: Die Boscovichsche Darstellung ist, in Absicht auf höhere und niedrigere Summen, nicht in so hohem Grade involutorisch, als die Moivrische.

f) Die lexikographischen Complexionen nach de Moivre lassen sich sogleich, nach meiner Anordnung, in Classen zusammenfassen, und so eine Involution in die andere umformen (E. S. c. a. A. S. 195, 60). Nicht so die Complexionen nach Boscovich [g].

g) Eine ähnliche Umformung meiner Classeninvolution in die Boscovichsche Anordnung und umgekehrt, hatte ich (a. a. O. und Arch. d. Math. H. IV. S. 408) angegeben. Dagegen hat Herr Prof. Pfaff (Disquis. anal. p. 296) drey Instanzen aufgestellt. Es hätten nehmlich in jenen beyden Stellen nicht meine Classen (deren Complexionen wie Zahlen wachsen) sondern die Boscovichschen (die nach fallenden Endzahlen fortgehen) genannt werden sollen. An diesen Unterschied, den ich doch (Arch. S. 411; 34) ausdrücklich nachgewiesen, selbst (in der dortigen Note) eines der drey Beyspiele angeführt habe, die Herr Prof. Pfaff gegen mich gebraucht, hatte ich dort nicht gedacht! Zum Ueberfluß will ich noch die von mir (E. S. c. a. S. 264) aufgestellten Anordnungen α, β, γ anführen, wo meine Classendarstellung α, und die Boscovichsche β, nebst der rückwärts umgekehrten γ von letzterer, zur

g) Die Boscowichſche Darſtellung dagegen involvirt die Complexionen für die ſucceſſive wachſenden Zeiger: a; und a, b; und a, b, c; und a, b, c, d; u. ſ. w. aufs vollkommenſte. Ein anderer eigenthümlicher, nicht unwichtiger Vorzug dieſer Anordnung beſteht auch darinn, daß ſie die zuſammengehörigen Complexionen für Zeiger aus Zahlen (und dadurch auch aus Buchſtaben) die nicht nach der Ordnung, ſondern ſprungweiſe, fortgehen, ohne alle Umſchweife mit Leichtigkeit darſtellt (E. S. c. a. A. S. 261, 262). Ein Umſtand von bedeutender Wichtigkeit für die Anwendung!

Hieher gehört das Tremblepiſche Exempel (Abh. II. §. 7) für das 10de Glied des dortigen Bruchs und den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & d, & e \\ 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}$

Für das dortige $D^{(9)}$ hätte man nämlich $\overset{9}{\mathfrak{T}}\begin{pmatrix} a, & d, & e \\ 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}$

d. i. die Summe 9 aus 1, 4, 5 oder a, d, e zuſammenzuſetzen. Die Complexionen dafür können (nach 11) keine andern, als folgende ſeyn, die man ſogleich in ihrer Ordnung findet:

111111111	=	a^9	Daraus fände man (nach 16)
11114	=	a^5d	
144	=	ad^2	$D^{(8)} = a^8 + a^4d + d^2 + a^3e$
1115	=	ae	und $D^{(7)} = a^7 + a^3d + a^2e$.
45	=	de	

unmittelbaren Vergleichung neben einanderſtehend befindlich ſind.

Beyspiel der Boscovichschen Anordnung vor Boscovich; eine literarische Merkwürdigkeit.

24. I. De Moivre (Miscell. anal. p. 86) stellt folgende Aufgabe auf:

PROBLEMA IV. Inuenire Terminum quemlibet, cuius locus assignetur in Serie nata ex diuisione Unitatis per Multinomium quodcunque.

II. In der Auflösung (Ebendas.) bezieht er sich auf seinen der Societät in London am 6ten Jun. 1697 übergebenen und in den Philos. Transact. No. 230 eingerückt befindlichen allgemeinen Lehrsatz, den er auch (Miscell. S. 87) mittheilt, wie folget:

III. THEOREMA. Si multinomium $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+$ etc ad potestatem quamlibet datam n sit attollendum, erit potestas requisita. — Hier folgen die 6 ersten Glieder der Formel nach der Ordnung, bis mit z^5, wie sie auch von mir (Arch. d. Math. H. IV. S. 386) aufgeführt sind, für das dortige z^m hier überall 1, und n für m gesetzt.

IV. Bey den Coefficienten seiner Reihe unterscheidet de Moivre ausdrücklich zweyerley Gesetze: 1) der Producte aus a, b, c, d . . . und 2) der ihnen vorzusetzenden Unzen oder Zahlen. Von beyden handelt er (S. 87-89) umständlich; insbesondere von Formirung der Buchstabenproducte (S. 89) deren Gesetz nach de Moivre ich auch (Arch. a. a. O. S. 387, 3) kurz und faßlich vorgelegt habe. Unmittelbar nach Angabe dieses Gesetzes folgt:

V. COROLLARIUM I. Si ponatur $n=-1$ et $a=1$, tunc erit quotiens oriundus ex diuisione Vnitatis per

Multinomium $1 - bz - cz^2 - dz^3 - etc =$ (Hier folgen die entwickelten 9 erſten Glieder des Quotienten bis mit z^8; in ihrer Ordnung auf einander).

VI. Die Worte (in V) Si ponatur $n = -1$ et $a = 1$ beziehen ſich offenbar auf das Theorem (III) und wird dadurch der Quotient $\frac{1}{1-bz-cz^2-dz^3-etc}$ (I) auf die Potenz $(1 - bz - cz^3 - dz^4 - etc)^{-1}$ reducirt. Die Producte der Buchſtaben b, c, d, e . . . ſollten alſo doch wohl dem unmittelbar vorher beſchriebenen (in IV erwähnten) Geſetze folgen [h]). Statt deſſen giebt de Moivre folgende, von jenem Geſetze ganz abweichende, Entwickelung:

h) Das Natürliche; und (wenn weiter nichts dabey erinnert wird) Nothwendige dieſer Vorausſetzung iſt auch Urſache geweſen, daß ich die de Moiviſche ausführliche Entwickelung von $(1 - bz - cz^2 - dz^3 etc)^{-1}$ nicht weiter mit jenem Geſetze zuſammengehalten, und die Abweichung davon bemerkt habe, ob ich gleich mehrmals darauf geſtoßen bin. Nur erſt neuerlich iſt mir ſelbige, durch eine zufällige Veranlaſſung bemerklich geworden, ſo wenig verſteckt auch übrigens dieſe Abweichung iſt.

VII. Es ist nehmlich die (a. a. O. S. 89) mitgetheilte Entwickelung des Quotienten (I) oder der ihm gleichgültigen (VI) Potenz $(1-bz-cz^2-dx^3-\text{etc})^{-1}=$

$$
\begin{array}{llllllllll}
1 & +\,bz & +\,b^2z^2 & +\,b^3z^3 & +\,b^4z^4 & +\,b^5z^5 & +\,b^6z^6 & +\,b^7z^7 & +\,b^8z^8 & +\,\text{etc} \\
 & & +\,c\,= & +\,2bc\,= & +\,3b^2c\,= & +\,4b^3c\,= & +\,5b^4c\,= & +\,6b^5c\,= & +\,7b^6c\,= & \\
 & & & & +\,c^2\,= & +\,3bc^2\,= & +\,6b^2c^2\,= & +\,10b^3c^2\,= & +\,15b^4c^2\,= & \\
 & & & & & & +\,c^3\,= & +\,4bc^3\,= & +\,10b^2c^3\,= & \\
 & & & & & & & & +\,c^4\,= & \\
 & & & +\,d\,= & +\,2bd\,= & +\,3b^2d\,= & +\,4b^3d\,= & +\,5b^4d\,= & +\,6b^5d\,= & \\
 & & & & & +\,2cd\,= & +\,6bcd\,= & +\,12b^2cd & +\,20b^3cd\,= & \\
 & & & & & & & +\,3c^2d\,= & +\,12bc^2d\,= & \\
 & & & & & & +\,d^2\,= & +\,3bd^2\,= & +\,6b^2d^2\,= & \\
 & & & & & & & & +\,3cd^2\,= & \\
 & & & & +\,e\,= & +\,2be\,= & +\,3b^2e\,= & +\,4b^3e\,= & +\,5b^4e\,= & \\
 & & & & & & +\,2ce\,= & +\,6bce\,= & +\,12b^2ce\,= & \\
 & & & & & & & +\,2de\,= & +\,3c^2e\,= & \\
 & & & & & & & & +\,6bde\,= & \\
 & & & & & & & & +\,e^2\,= & \\
 & & & & & +\,f\,\text{etc} & & & &
\end{array}
$$

Die Litteralproducte zu z^6, z^7, z^8 hat de Moivre hier nur von den Buchstaben b, c, d, e, nicht weiter, mitgetheilt. Dabey hat er, aus Versehen, zwey Glieder, 2de für z^7 und 6bde für z^8, weggelassen, die ich hier gehörigen Orts eingeschaltet habe.

VIII. Die combinatorische Formel für den Quotienten oder die Potenz (VII) ist bekanntermaßen (S. 15)

$$1+j^1\mathfrak{J}^r z^r+j^2\mathfrak{J}^r z^2+j^3\mathfrak{J}^r z^3+j^4\mathfrak{J}^r z^4+j^5\mathfrak{J}^r z^5+\text{etc}$$

$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Complexionen für die ${}^m\mathfrak{J}^r$ hier in (VII) stellen aber nicht, wie man vermuthen sollte, die Moivrische, sondern — die Boscovichsche Anordnung dar. Eine merkwürdige Erscheinung! die eine ausführliche Auseinandersetzung, wie ich sie hier gegeben habe, wohl verdiente.

IX. Nun entsteht die Frage, wie de Moivre auf diese Anordnung verfallen sey? da ihm doch die Reduction (V) vielmehr auf sein so eben (unmittelbar vorher) bekannt gemachtes und (p. 89) ausführlich von ihm beschriebenes Gesetz verwies. Darauf läßt sich folgendes erwiedern:

X. Die Entwickelung (VII) enthält lauter bestimmte Zahlen und Exponenten, keine unbestimmten, wie die für III. Diesen Umstand benutzt de Moivre, für die Bequemlichkeit der Leser, folgendergestalt:

a) Im COROLLARIO I. (p. 89) drückt er, unmittelbar nach der Entwickelung (VII) die numerischen Coefficienten oder Versetzungszahlen so aus, wie sie durch die bestimmten Exponenten gegeben sind.

b) Im COROLLARIO II (p. 90) erinnert er, man solle in dem vorliegenden Falle, die Zählung der Buchstaben a, b, c, d . . . nicht von a, sondern von b anfangen, das heißt, in meiner Sprache, man solle $\binom{b,\ c,\ d,\ e\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}$ nicht $\binom{a,\ b,\ c,\ d\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots}$ zum Zeiger nehmen; dadurch werde der Vortheil geschafft, daß die Summe der Exponenten der einzelnen Buchstaben der zu z^l gehörigen Litteralproducte, dem Potenzexponenten l durchgängig gleich sey.

c) Im COROLLARIO III (p. 90) wird bemerkt, die zu einer und derselben Potenz von z gehörigen Litteralproducte (in VII) seyen von der Auflösung der beyden Gleichungen $z+y+x+\text{etc}=a$ und $\alpha z^2+\beta y+\gamma x+\text{etc}=b$, für ganze, positive z, y, x . . . abhängig. Die ganze ausführliche Stelle habe ich (E. S. c. a. A; S. 119) bey einer andern Gelegenheit angeführt.

XI. Hierinn wäre also die Antwort auf die Frage (in IX) zu suchen. Aber man sieht nicht ein, wie die Auflösung jener unbestimmten Aufgabe, unter so vielen andern gleichmöglichen, geradezu auf die Ordnung der Litteralproducte in VII führe. Man muß also annehmen, de Moivre habe diese Ordnung bey der Gelegenheit zufällig bemerkt, und aus mehrern ausgehoben. Befremdend bleibt es gleichwohl immer, daß er nichts darüber erinnert hat.

Die Combinationslehre führt die Auflösung analytischer Aufgaben gewöhnlich zu ihrer ursprünglichen Simplicität zurück.

25. Auf die Frage (24, IX) läßt sich auch folgende Auskunft geben. Vielleicht hat de Moivre den Quotienten VII durch wirkliche Division der 1 durch die Reihe $1-bz-ez^2-dz^3-\text{etc}$ gesucht. Die Schwierigkeit,

die der vielgliedrige Divisor hier macht, wird gehoben, wenn man die jedesmaligen Glieder der Reihe und die daraus erfolgenden successiven Quotiententheile, an eine strenge Ordnung bindet, um nichts dabey zu übersehen; und vielleicht hat de Moivr'n die Folge dieser Glieder nach den Endbuchstaben b, c, d, e . . . und ihren Potenzen — die Boscovichsche Ordnung — auf die ihn die Division selbst leicht leiten konnte, vor andern vorzüglich geschienen, oder wenigstens seine Aufmerksamkeit auf sich gezogen.

26. Wie aber auch nun immer die Sache beschaffen seyn mag, so bleibt die Benennung Boscovichsche Ordnung dennoch feststehen, weil Boscovich (was de Moivre nicht gethan hat) eine leichte bestimmte Regel (11) dafür zuerst angegeben hat.

27. Man begreift leicht, daß das Verfahren, die Quotiententheile aus solchen vielgliedrigen Nennern oder Divisoren zu finden, nur erst durch combinatorische Vorschriften sicher und bequem gemacht wird, und daß man, blos in Ermangelung solcher Regeln, oder aus Unkunde derselben, auf Abwege gerathen, und das auf Umwegen gesucht hat, was man ganz in der Nähe hätte finden können. Dahin gehört auch die, in anderer Rücksicht wichtige, Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache; die aber hier zu unnöthigen und unnatürlichen Verwickelungen führt.

28. Noch will ich das Tremblayische Verfahren für das allgemeine (n+1)te Glied der wiederkehrenden Reihen ausheben und etwas näher betrachten, das vor andern doch noch auf leichte Resultate und Entwickelungen führt.

Für dieses wird der Urbruch $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc}}{1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}}$

(für die Wurzeln m, p, q . . . des Nenners, als Glei-

chung betrachtet) der Summe der einfachen Brüche

$$\frac{A}{1-mx} + \frac{B}{1-px} + \frac{C}{1-qx} + \text{etc}$$ gleichgesetzt,

daraus die Werthe von A, B, C . . ., und durch sie das allgemeine (n+1)te Glied $Am^n + Bp^n + Cq^n + \text{etc}$ in α, β, γ . . . und m, p, q . . . ausgedrückt, woraus sich weiter (n=0, 1, 2, 3 . . . successive gesetzt) jedes bestimmte Glied herleiten, die Wurzeln m, p, q . . . aber aus diesen Werthen, ohne sie selbst einzeln zu kennen, vermittelst der bekannten Gleichungen aus den Verbindungen der Wurzeln: $m+p+q+\text{etc} = a$; $mp+mq+pq+\text{etc} = b$; $mpq+\text{etc} = c$; u. s. w. i) wieder wegschaffen lassen. Wie dabey die Trembleyischen Ordnungszeichen $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$ . . . in Umlauf kommen, und wie die vorhergefundenen, als Grundlage für die folgenden dienen, zeigt (2, I, II und 3, 4) ausführlich im Zusammenhange.

29. Diese Einführung der Wurzeln, in Verbindung mit der nachherigen Wiederwegschaffung derselben, ist wirklich sinnreich, führt aber schon bey Reihen der dritten Ordnung, wo doch für die Gleichung $1 - ax + bx^2 - cx^3 = 0$, aus dem Nenner, nur drey Wurzeln m, p, q vorkommen, zu großen Weitläuftigkeiten, wie aus §. 3 der vorhergehenden Trembleyischen Abhandlung deutlich erhellet; so, daß man daraus auf die übergroße Verwickelung bey höhern Ordnungen und mehrern Wurzeln sicher schließen

i) In diesen Gleichungen haben alle Glieder das Vorzeichen +, welches bey Wegschaffung der Wurzeln m, p, q . . . durch sie Bequemlichkeit giebt. Dies hängt mit den abwechselnden Zeichen im Nenner $1 - ax + bx^2 - cx^3 + \text{etc}$ zusammen, und man sieht hieraus, warum Herr Trembley einen solchen Nenner in seinen Urbrüchen eingeführt hat. Jene Bequemlichkeit ist indessen mit der Unbequemlichkeit der abwechselnden Zeichen in den Werthen für $A^{(n)}$, $C^{(n)}$, $E^{(n)}$ . . . verbunden. Man sehe die vorh. Abh. S. 83. Note bb).

kann. Der Zweck des Verfahrens ist, die Coefficienten der Glieder der Reihe durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, und a, b, c ... d. i. die gesuchten Dinge durch die gegebenen auszudrücken, wobey hier die Einführung und Wiederwegschaffung der Wurzeln als Mittel gebraucht werden.

30. I. Die Combinationslehre zeigt, wie man diesen Zweck unmittelbar auf dem leichtesten Wege erreichen könne, wenn man die Trembleyische Aufgabe von der Seite ansieht, wo sie sich am einfachsten darstellt:

„Die Functionen

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}; \quad \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc}}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}$$

„sind bloße Divisionsausdrücke; die Reihen also, „die ihre Entwickelung, in Gliedern durch a, b, c...; α, β, „$\gamma \ldots$ und x dargestellt, geben soll, müssen mit ihren „Quotienten übereinkommen.“

II. Diese Quotienten zu finden, setze man

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}} = (1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc})^{-1}$$

und verfahre mit der reducirten Form nach der Vorschrift (S. 39. 44). Man vergleiche die Formeln (S. 15, 16)

III. Die Ausdrücke, die man hier erhält, sind combinatorische, nicht blos durch Induction abgeleitete, sondern in aller Schärfe demonstrirte. Ihr Vorzug vor andern besteht, nach dem Ausspruche zweener Analysten von Bedeutung [k]) darinn:

a) „daß sie nicht eine blos in Worten weitläuftig „auszudrückende Regel, sondern eine deutlich gezeichnete „allgemeine Formel geben.“

k) Arch. d. Math. H. VII. S. 348, 349 die beyden Anmerk. *)

b) „Daß sie Formen von bekannter sehr einfacher „Structur darstellen, die man also mit der größten Klar„heit sogleich anwenden kann; welches sich mit Sub„stitutionen, die bald auf diese bald auf jene Art gemacht wer„den, ganz anders verhält.“

IV. Daraus, daß die gewöhnlichen Substitutionen den combinatorischen ganz einfachen Formen so weit nachstehen (III. b), erwächst die große Beschwerlichkeit für jene, daß man, bey etwas verwickelten Aufgaben und Vorschriften, die man nicht immer auszuüben Veranlassung hat, fast jedesmal die ganze Abhandlung oder doch einen großen Theil derselben, aufmerksam überlesen muß, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall schreiten kann. Mit den combinatorischen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwickelung man bald übersieht, und wenn man sie vergessen hätte, durch Nachlesung weniger Zeilen sich wieder erneuert, ist das nicht der Fall.

Ein Beyspiel zur unmittelbaren Vergleichung wird hier nicht überflüssig seyn.

V. Aufgabe. „Man soll prüfen, ob die für den Quotienten

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - bz - cz^2 - dz^3 - \text{etc}} = q^{-1}$$

„von de Moivre der Potenz z^k (24, VII) beygefügten, bis „mit den Endbuchstaben e reichenden, Litteralproducte, mit „ihren numerischen Coefficienten, richtig seyen; zugleich „wird verlangt, die übrigen von de Moivre dort übergan„genen Producte der Buchstaben f, g, h, i, nebst ihren Bey„setzungszahlen, mit anzugeben.“

kann. Der Zweck des Verfahrens ist, die Coefficienten der Glieder der Reihe durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, und a, b, c . . . d. i. die gesuchten Dinge durch die gegebenen auszudrücken, wobey hier die Einführung und Wiederwegschaffung der Wurzeln als Mittel gebraucht werden.

30. I. Die Combinationslehre zeigt, wie man diesen Zweck unmittelbar auf dem leichtesten Wege erreichen könne, wenn man die Tremblayische Aufgabe von der Seite ansieht, wo sie sich am einfachsten darstellt:

„Die Functionen

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}; \quad \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc}}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}}$$

„sind bloße Divisionsausdrücke; die Reihen also, „die ihre Entwickelung, in Gliedern durch a, b, c . . .; α, β, „$\gamma \ldots$ und x dargestellt, geben soll, müssen mit ihren „Quotienten übereinkommen.“

II. Diese Quotienten zu finden, setze man

$$\frac{1}{1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc}} = (1-ax+bx^2-cx^3+\text{etc})^{-1}$$

und verfahre mit der reducirten Form nach der Vorschrift (S. 39. 44). Man vergleiche die Formeln (S. 15, 16)

III. Die Ausdrücke, die man hier erhält, sind combinatorische, nicht blos durch Induction abgeleitete, sondern in aller Schärfe demonstrirte. Ihr Vorzug vor andern besteht, nach dem Ausspruche zweener Analysten von Bedeutung [k]) darinn:

a) „daß sie nicht eine blos in Worten weitläuftig „auszudrückende Regel, sondern eine deutlich gezeichnete „allgemeine Formel geben.“

k) Arch. d. Math. H. VII. S. 348, 349 die beyden Anmerk. *)

b) „Daß ſie Formen von bekannter ſehr einfacher „Structur darſtellen, die man alſo mit der größten Klar„heit ſogleich anwenden kann; welches ſich mit Sub„ſtitutionen, die bald auf dieſe bald auf jene Art gemacht wer„den, ganz anders verhält.“

IV. Daraus, daß die gewöhnlichen Subſtitutionen den combinatoriſchen ganz einfachen Formen ſo weit nachſtehen (III. b), erwächſt die große Beſchwerlichkeit für jene, daß man, bey etwas verwickelten Aufgaben und Vorſchriften, die man nicht immer auszuüben Veranlaſſung hat, faſt jedesmal die ganze Abhandlung oder doch einen großen Theil derſelben, aufmerkſam überleſen muß, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall ſchreiten kann. Mit den combinatoriſchen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwickelung man bald überſieht, und wenn man ſie vergeſſen hätte, durch Nachleſung weniger Zeilen ſich wieder erneuert, iſt das nicht der Fall.

Ein Beyſpiel zur unmittelbaren Vergleichung wird hier nicht überflüſſig ſeyn.

V. Aufgabe. „Man ſoll prüfen, ob die für den Quotienten

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{1 - bz - cz^2 - dz^3 - \text{etc}} = q^{-1}$$

„von de Moivre der Potenz z^n (24, VII) beygefügten, bis „mit den Endbuchſtaben e reichenden, Litteralproducte, mit „ihren numeriſchen Coefficienten, richtig ſeyen; zugleich „wird verlangt, die übrigen von de Moivre dort übergan„genen Producte der Buchſtaben f, g, h, i, nebſt ihren Ver„ſetzungszahlen, mit anzugeben.“

Auflösung mit Bemerkungen.

A. Combinatorisches Verfahren.

a) Das verlangte Glied des Quotienten ist in der Ordnung das 9te. Für $n+1=9$ ist also $n=8$; folglich $q^{-1}7(8+1)=q^{-1}\varkappa(8+1)x^8$ und (S. 15, 45).

$$q^{-1}\varkappa(8+1) = j^8\mathfrak{J}\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \end{pmatrix}$$

Das combinatorische Zeichen $j^8\mathfrak{J}$ giebt hier die Form, der untergesetzte Zeiger die zu bearbeitende Materie an. Die Wichtigkeit einer solchen Angabe fällt in die Augen.

b) Dafür muß man zweyerley wissen 1) die Bedeutung der Zeichen $^8\mathfrak{J}$ und j; und die Darstellung ihrer Werthe. Das erste, wenn man es einmal weis, kann man nie vergessen; das zweyte, wenn man es vergessen hätte, läßt sich in leichten Regeln nachweisen, die man sogleich befolgen kann, ohne etwas weiter von der Abhandlung, die sie enthält, nachlesen zu dürfen.

c) Von den beyden lexikographischen Anordnungen der Complexionen zu bestimmten Summen (S. 42, 96) und zwar namentlich hier für $^8\mathfrak{J}$, muß man, nach der Bemerkung (24, VIII) die Boscovichsche Anordnung wählen, wenn man anders die Litteralproducte in derselben Ordnung, hier wie dort, haben will. Für $^8\mathfrak{J}$ befolge man demnach die Vorschriften, wie sie (in 11 oder 12 für $^9\mathfrak{J}$) gegeben sind; oder man nehme die Complexionen aus Tafel V hier am Ende, wie sie daselbst für die Summe 8 schon vollendet untereinander stehen. In allen drey Fällen muß man jedoch, nach dem obigen Zeiger, hier b, c, d . . . statt der dortigen a, b, c . . . setzen.

d) Wegen des j vor $^{8}\mathfrak{J}$ muß man allen (nach c) gefundenen einzelnen Complexionen oder Buchſtabenproducten von $^{8}\mathfrak{J}$, noch die zugehörigen Verſetzungszahlen vorſchreiben. Dafür befolge man die Vorſchriften (S. 61, 62) im Texte oder der dortigen Nachweiſung Note i.

e) Vergleicht man die (nach c und d) gefundenen Buchſtabenproducte und zugehörigen Zahlen, mit denen (in 24, VII) neben z^8 ſtehenden, ſo findet man alles mit einander übereinſtimmend; bis auf die Complexionen $4b^3f$, 6bcf, 2df, $3b^2g$, 2cg, 2bh, i, welche von de Moivre übergangen worden ſind. So iſt alſo den beyden Forderungen der Aufgabe (V) vollkommen, und zugleich auf dem leichteſten und kürzeſten Wege Genüge geſchehen.

B. Trembleyiſches Subſtitutionsverfahren.

α) Der erſte Theil der Aufgabe (V, S. 117) die Prüfung nehmlich der Coefficienten zu z^8 betreffend, ſo weit ſelbige von de Moivre (nach 24, VII) mitgetheilt worden ſind, hängt von der Entwickelung der Function $\frac{1}{1-bx-cx^2-dx^3-ex^4}$ ab, und führt ſo auf eine Reihe der vierten Ordnung, deren 9tes Gliedman zu beſtimmen hat.

β) Für $n-1=9$ iſt alſo auch hier $n=8$; und die Vergleichung der Trembleyiſchen Urbruchs für Reihen der vierten Ordnung (S. 75. §. 6) mit der obigen Function (α) giebt ſtatt der

dortigen α, β, γ, δ; a, b, c, d
hier 1, c, 0, 0; b, −c, d, −e

Der geſuchte Coefficient zu z^8 iſt alſo $C^{(8)}$, dafür man aber die vorher (S. 63. § 1 und S. 71. §. 3) nachgewieſenen Werthe für $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ beybehalten muß.

γ) Die Verarbeitung derselben (wie S. 89 3, b) und die Umsetzung der a, b, c, d in b, —c, d, —e, giebt

$$C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2$$
$$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(3)}d + A^{(2)}d^2$$
$$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}d$$
$$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$$
$$A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$$

wo also die Zeichen in den Werthen für $C^{(8)}$, $A^{(m)}$ hier nicht abwechseln.

δ) Nimmt man hier nach und nach für m die Werthe 8, 5, 4, 2, 1 und drückt dadurch die $B^{(8)}$, $B^{(4)}$ in den zugehörigen $A^{(m)}$ und d aus, so findet man daraus $B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2 = C^{(8)}$, die gesuchten Litteralproducte zu z^8, denen man nur noch einzeln die Versetzungszahlen (S. 61, 62) vorsetzen darf, um alles mit (24, VII) vollkommen übereinstimmend zu finden.

ε) Eben das findet man, wenn man in des Werth von $C^{(8)}$, den Herr Trembley (S. 77) für ein anderes Beyspiel berechnet hat, statt der dortigen a, b, c, $\frac{1}{2}$ hier $b, -c, d, -e$ setzt.

ζ) Dem zweyten Theile der Aufgab V (die von de Moivre übergangenen Complexionen [e, S. 119] betreffend) und hiermit zu gleicher Zeit dem ersten (ζ) eine Genüge zu leisten, müßte man das 9te Glied der Function

$$\frac{1}{1 - bx - cx^2 - dx^3 - ex^4 - fx^5 - gx^6 - hx^7 - ix^8}$$

entwickeln, welches $G^{(8)}x^8$ seyn wird; wobey man die $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $F^{(n)}$ als bekannt, oder vorher gefunden, voraussetzt (S. 87, III)

γ) Nun iſt (2, II), und wenn man ſetzt, ſtatt der

dortigen a, b, c, d, e, f, g, h
hier b, −c, d, −e, f, −g, h, −i

$$G^{(8)} = F^{(8)} + F^{(0)}i$$
$$F^{(8)} = E^{(8)} + E^{(1)}h$$
$$E^{(8)} = D^{(8)} + D^{(1)}g$$
$$D^{(8)} = C^{(8)} + C^{(3)}f$$
$$C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2$$
$$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)}d + A^{(2)}d^2$$
$$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}d$$
$$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$$
$$A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$$

Auch hier haben die Glieder der Werthe für $A^{(m)}$, $C^{(8)}$, $E^{(8)}$, $G^{(8)}$ ſämmtlich das Vorzeichen +, wie in (γ). Von dem Werthe an für $C^{(8)}$, kommt hier alles mit dem, was dafür in (γ) ſteht, überein.

δ) Aus den Gleichungen (γ) fließt folgende

$$G^{(8)} = F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f + C^{(8)}$$

Da nun $C^{(8)}$, nach (δ) berechnet, die Litteralproducte nebſt ihren Verſetzungszahlen, ſämtlich ſo giebt, wie ſie, nach de Moivre, in (24, VII) neben z^8 ſtehen, ſo müſſen die von ihm übergangenen nothwendig in

$$F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f$$

enthalten ſeyn.

ε) Es iſt auch wirklich $F^{(0)} = 1$; $E^{(1)} = D^{(1)} = C^{(1)} = B^{(1)} = A^{(1)} = b$; $D^{(2)} = C^{(2)} = B^{(2)} = A^{(2)} = (b^2 + c)$; $C^{(3)} = B^{(3)} = A^{(3)} + A^{(0)}d = (b^3 + bc + d)$;

also $F^{(9)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f = i + bh + (b^2 + c)g + (b^3 + bc + d)f$. Diese Buchstabenproducte geben, mit ihren Versetzungszahlen verbunden, $4b^3f + 6bcf + 2df + 3b^2g + 2cg + 2bh + i$; alles, wie oben (in e, S. 119).

C. Abgekürztes Substitutionsverfahren.

Wenn man $G^{(n)}$, mit Ueberspringung aller Zwischenordnungen $F^{(n)}$, $E^{(n)}$, $D^{(n)}$, $C^{(n)}$, $B^{(n)}$, durch $A^{(n)}$ nach (7) ausdrückt, so kömmt, $n = 7$, und $b, -c, d, -e, f, -g, h, -i$, statt a, b, c, d, e, f, g, h, gesetzt,

$$G^{(8)} = \begin{array}{l} A^{(8)} \\ \hline A^{(5)}d,\ A^{(2)}d^2 \\ \hline A^{(4)}e,\ A^{(1)}de,\ A^{(0)}e^2 \\ \hline A^{(3)}f,\ A^{(0)}df \\ \hline A^{(2)}g \\ \hline A^{(1)}h \\ \hline A^{(0)}i \end{array}$$

Diese beträchtliche Abkürzung giebt, vermittelst der so eben (7) angeführten Gleichung $A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$,

alles für den Coefficienten von z^8 d. i. $G^{(8)}$ hier so, wie oben (S. 119. e)

D. Endliche, ganz einfache Darstellung.

a) Man erhält sie, wenn man auch $A^{(n)}$ (in C) wegschafft, und $G^{(8)} = {}^{8}\mathfrak{T}$ sogleich in den einfachen a, b, c . . . h, oder, wie hier erfordert wird, in b, c, d . . . i durchgängig (nach 12) ausdrückt. Das führt auf das obige sehr kurze combinatorische Verfahren A (S. 118)

b) Von den Vortheilen solcher combinatorischer Darstellungen, und wie eine aus der andern abgeleitet wird, sehe man (14) und die angeführten Stellen in (16).

c) Vergleicht man die Zeichnung des (S. 117, V) geforderten Coefficienten zu x^8 nach Trembley (S. 119, β) und mir (S. 118, A, a) so findet man

$$G^{(8)} = {}^{8}\mathfrak{J}^{r}_{\binom{b, c, d \ldots g, h, i}{1, 2, 3 \ldots 6, 7, 8}}$$

wie auch aus der (S. 64, Note 1) befindlichen Zusammenstellung beyderley Zeichen erhellet. Hier ist zwar das Trembleyische Zeichen, aber nicht die Auflösung desselben und das dadurch bezeichnete Verfahren, kürzer und leichter als das combinatorische; wie man sogleich übersieht, wenn man die (S. 121, 7) befindliche verwickelte Reduction des Zeichens $G^{(8)}$ auf die F, E, D, C, B, A, mit der äusserst leichten Darstellung der Involution ${}^{8}\mathfrak{J}^{r}$ in b, c, d, e, f, g, h, i, nach der Vorschrift (12) vergleicht.

d) Noch mehr: wüßte man diese Vorschrift nicht, oder hätte man sie vergessen, so darf man nichts weiter als die wenigen Zeilen nachlesen, die sie enthalten; der obige Zeiger weist zugleich nach, daß man hier b, c, d, e . . . für die dortigen a, b, c, d . . . gebrauchen müsse. Ganz anders verhält es sich, wenn man die Bedeutung von $G^{(8)}$ nicht wüßte, oder sie vergessen hätte. Wie viel müßte man nicht in der sonst so deutlich abgefaßten Trembleyischen Abhandlung nachlesen, um sich bey der wirklichen Auflösung dieses Zeichens und der endlichen Darstellung seines Werthes in den einfachen b, c, d, e . . . nicht zu verirren! Die Schuld liegt nicht an dem Verfasser jener Abhandlung, sondern an der Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Zeichen, die nicht, wie die combinatorischen, die Elemente der Zusammensetzung, und mit ihnen Form und Materie, so klar und deutlich vorlegen. Man vergleiche E. S. c. a. A. S. 288. §. 215.

31. Diese unmittelbare Vergleichung der verschiedenen Verfahren (A, B, C, S. 118-122) auf ein und dasselbe Bey-

spiel (S. 117, V) angewendet, zeigt das Uebergewicht der combinatorisch-analytischen Behandlung dieser und ähnlicher Aufgaben am augenscheinlichsten. Alles wird hier, wornach man gewöhnlich strebt, auf dem kürzesten und zugleich leichtesten Wege gefunden, auf den man dadurch geleitet wird, daß man die Aufgabe von der Seite betrachtet, wo sie sich am einfachsten (als Divisionsausdruck) darstellt, und zu der Auflösung die einfachsten Mittel (die combinatorischen Anordnungen und Involutionen) gebraucht und verwendet.

32. Freylich kann man nicht jede Ansicht, die sich uns darstellt, sogleich weiter verfolgen, insofern es an Mitteln fehlt, sich ihr gehörig zu nähern, um sie zu benutzen. So liegt bey der Aufgabe, von der hier die Rede ist, die Divisionsform so unverkennbar vor Augen, daß man sie nicht übersehen kann; aber der vieltheilige Divisor macht hier die große Schwierigkeit. Diese hat Herrn Trembley auf die Einführung mit Wiederwegschaffung der einfachen Wurzeln des Nenners, als Gleichung betrachtet, geleitet. So sinnreich dieses Verfahren an sich ist, indem man die Wurzeln nicht einmal einzeln zu kennen braucht: so veranlaßt gleichwohl dieser Theil der Auflösung, den die combinatorische Analysis ganz überspringt, weitläuftige Rechnungen und Reductionen (29) die, außer der Induction, die sie geben, sich schwerlich allgemein durch Beweis würden rechtfertigen lassen. Der übrige Theil der Auflösung hingegen, die aus ersterm von Herrn Trembley gezogenen Formeln und Relationen, sind merkwürdig, und für Leser, die sich mit der combinatorischen Analysis näher bekannt machen wollen, lehrreich. Die Annäherung derselben zu den combinatorischen Formen, hat mir Veranlassung gegeben, sie weiter zu simplificiren, und endlich ganz in combinatorische Verfahren und Operationen aufzulösen. Herr

Trembley hat hier alles geleistet, was, ohne combinatorische Hülfsmittel anzuwenden, möglich war.

Convergenz und Divergenz der entwickelten Reihen im Allgemeinen; Evolution solcher Functionen, die nicht nach Potenzen einer veränderlichen Grösse geordnet sind.

33. In den beyden vorhergehenden Abhandlungen ist bey Entwickelung der Reihen blos auf die Form gesehen worden, die sie nach den dortigen Vorschriften annehmen, und wie sich daraus die Potenzen von x bestimmen lassen. Ob diese Reihen für gewisse Werthe von x convergiren oder divergiren, und für welche Werthe sie das thun, und wie schnell? davon ist dort die Frage nicht gewesen. Dies Verfahren läßt sich durch das Beyspiel der größten Analysten rechtfertigen, welche die Beantwortung der Frage, die Convergenz der aufgefundenen Reihen betreffend, als eine Sache der Anwendung, dem Leser beym Gebrauche gewöhnlich selbst überlassen, oder, als eine eigene Untersuchung, von jener allgemeinen der Form und Coefficientenbestimmung getrennt, vorgetragen haben.

34. In sofern hier die Convergenz der Reihe auf den Werthen von x, nicht auf den Coefficienten, beruhen soll, muß man dabey drey Fälle, für

$$x < 1; \quad x > 1; \quad x = 1$$

unterscheiden, die ich nach der Ordnung vornehmen, und an dem Beyspiele

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

erläutern will. Die allgemeine Form, unter welcher ich

die Entwickelung der gebrochenen Functionen in meiner Abhandlung darüber vorgetragen habe, erleichtert die gegenwärtige Untersuchung ungemein.

35. Erster Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x < 1$ convergiren soll.

Man setze

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = P$$

und $P = Px1 + Px2x^1 + Px3x^2 + \text{etc} = pq^{-t}$

Die Coefficienten für die hiesige Reihe P oder pq^{-t} sind mit denen (S. 8; 5, a und S. 9; 5, b) ganz einerley; wie daraus erhellet, weil, die dortigen Exponenten $\mu = \nu = o$ und $\delta = 1$ gesetzt, das hiesige P bestimmen.

Die Reihe für P geht hier noch x^o, x^1, x^2 ... nach steigenden Potenzen von x fort. Ist also $x < 1$, oder ein eigentlicher Bruch, so sind die höhern Potenzen von x immer kleiner und kleiner, und die Reihe convergirt.

36. Zweyter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x > 1$ convergiren soll.

Man kehre den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs um, und setze

$$\frac{p}{q} = \frac{cx^2 + bx + a}{\delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha} = P$$

und $P = Px1x^{-1} + Px2x^{-2} + Px3x^{-3} + \text{etc} = pq^{-t}$

wie man findet, wenn man (S. 8; 5, a oder S. 9; 5, b) $\mu = 2$; $\nu = 3$; $\delta = -1$ setzt.

Um nun die einzelnen Glieder der Reihe für P oder pq^{-t} aus den dortigen Formeln zu finden, darf man, außer der obigen Bestimmung für μ, ν, δ, nur noch

1) für Seite 8; 5, a

$$p\times 1 = c;\quad p\times 2 = b;\quad p\times 3 = a$$
$$q\times 1 = \delta;\quad q\times 2 = \gamma;\quad q\times 3 = \beta;\quad q\times 4 = \alpha$$

oder, anstatt der dortigen Scalen, hier

$$p\ [\ c\ ,\quad b\ ,\quad a\ ]$$
$$q\ [\ \delta\ ,\quad \gamma\ ,\quad \beta\ ,\quad \alpha\ ]$$

2) für Seite 9; 5, b, anstatt der

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ

hier c, b, a; δ, γ, β, α

also auch, statt des dortigen Zeigers, hier den Zeiger

$$\begin{pmatrix} \gamma\ , & \beta\ , & \alpha \\ 1\ , & 2\ , & 3 \end{pmatrix}$$

setzen und gebrauchen. Die Reihe für den zweyten Fall folgt hieraus eben so leicht, wie die für der ersten.

Die Reihe für P oder pq^{-1} geht hier nach x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} . . . nach fallenden Potenzen von x fort. Ist also $x>1$, also eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch, so nehmen die Potenzen x^{-1}, x^{-2}. x^{-3} . . . immer mehr und mehr ab, und die Reihe convergirt.

37. Die Bequemlichkeit, mit welcher sich hier die Formeln für beyde Fälle (35. 36) behandeln, und durch eine leichte Interpretation auf einander beziehen lassen, verschafft die allgemeine Gestalt, unter welcher ich in jener Abhandlung die Entwickelung vorgetragen habe.

Cousin, in seinem neuerlich herausgegebenen Traité élementaire de l'Analyse mathématique (Paris 1797) der bey dem Exempel (36) auf keine so allgemeine Form verweisen konnte, hat daher (p. 69. 70) für diesen zweyten Fall, die Verwandlung des gegebenen Bruchs im ersten Falle ein-

was weitläuftiger darstellen und nachweisen müssen. Die Vergleichung seiner dort aufgefundenen Formeln für beyde Fälle zeigt gleichfalls den wechselseitigen Zusammenhang und die Abhängigkeit beyder. Um nehmlich den zweyten Fall aus dem ersten abzuleiten, darf man nur dort

die A, B, C, D, E, F; a, b, c; m, n, p, q
in M, N, P, Q, R, S; c, b, a; q, p, n, m

d. i. die Cousin'schen erst gesetzten Buchstaben für den ersten Fall, in die hier darunterstehenden Buchstaben für den zweyten Fall, umsetzen und verwandeln.

38. Dritter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x = 1$ convergiren soll.

Hier fällt also x gar weg, und der Bruch

$$\frac{a + b + c}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

so wie die daraus zu entwickelnde Reihe, ist weder nach steigenden noch fallenden Potenzen von x geordnet.

Die schon für den ersten und zweyten Fall (35, 36) citirten Formeln (S. 8, 9) geben gleichwohl auch hier vollkommene Auskunft, nur muß man in diesem Falle, wegen der Convergenz, auf die Größe der a, b, c und der α, β, γ, δ unter einander Rücksicht nehmen, und im Zähler und Nenner die Glieder so ordnen, daß die größern vorangehen, die kleinern folgen.

Es sey

$$\frac{p}{q} = \frac{h + i + k}{m + n + p + q} = P$$

ein so geordneter Bruch, worinn also $h \geqslant i$; $i \geqslant k$ und $m \geqslant n$; $n \geqslant p$; $p > q$.

Die Entwickelung für $P = pq^{-1}$ geben die oben (35) angeführten Formeln, der ersten Abhandlung, wenn man darinn $x = 1$, und für die

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ
hier h, i, k; m, n, p, q

für die übrigen dortigen lateinischen und griechischen Buchstaben aber, die hier durch nichts repräsentirt werden, 0 setzt. Man braucht die Formel (S. 8) oder (S. 9) nachdem man die Glieder von P in recurrirender dependenter, oder in directer independenter Gestalt darstellen will.

Nach Seite 9; 5, b fände man so, für

$$\frac{p}{q} = \frac{h+i+k}{m+n+p+q} = pq^{-1}$$

$$pq^{-1} = \frac{h}{m}$$

$$+ \frac{i}{m} - \frac{h}{m}\cdot\frac{n}{m}$$

$$+ \frac{k}{m} - \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{m} - \frac{h}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right)$$

$$+ 0 - \frac{k}{m}\cdot\frac{n}{m} - \frac{i}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right) - \frac{h}{m}\left(\frac{q}{m} - \frac{2np}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}\right).$$

$$+ \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}$$

Die einzelnen Theile der Glieder für die obige Entwickelung von pq^{-1} sind von unten auf (der mit + bezeichnete Theil voran) rangirt. Da in den folgenden Gliedern immer dieselben Combinationsclassen der vorhergehenden Glieder (nur in andere Factoren multiplicirt) wieder vorkommen: so erhellt daraus die große Leichtigkeit der Entwickelung des gegebenen Bruchs.

γ) Die Verarbeitung derſelben (wie S. 89 3, b) und die Umſetzung der a, b, c, d in b, —c, d, —e, giebt

$$C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2$$

$$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(1)}d + A^{(2)}d^2$$

$$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}d$$

$$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$$

$$A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$$

wo alſo die Zeichen in den Werthen für $C^{(8)}$, $A^{(m)}$ hier nicht abwechſeln.

δ) Nimmt man hier nach und nach für m die Werthe 8, 5, 4, 2, 1 und drückt dadurch die $B^{(8)}$, $B^{(4)}$ in den zugehörigen $A^{(m)}$ und d aus, ſo findet man daraus $B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2 = C^{(8)}$, die geſuchten Litteralproducte zu z^8, denen man nur noch einzeln die Verſetzungszahlen (S. 61, 62) vorſetzen darf, um alles mit (24, VII) vollkommen übereinſtimmend zu finden.

ε) Eben das findet man, wenn man in der Werth von $C^{(8)}$, den Herr Trembley (S. 77) für ein anderes Beyſpiel berechnet hat, ſtatt der dortigen a, b, c, d hier b, −c, d, −e ſetzt.

ζ) Dem zweyten Theile der Aufgab V (die von de Moivre übergangenen Complexionen [e, S. 119] betreffend) und hiermit zu gleicher Zeit dem erſten (ι) eine Genüge zu leiſten, müßte man das 9te Glied der Function

$$\frac{1}{1 - bx - cx^2 - dx^3 - ex^4 - fx^5 - gx^6 - hx^7 - ix^8}$$

entwickeln, welches $G^{(8)}x^8$ ſeyn wird; wobey man die $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$, $E^{(n)}$, $F^{(n)}$ als bekannt, oder vorher gefunden, vorausſetzt (S. 87, III).

ν) Nun ist (2, II), und wenn man setzt, statt der

dortigen a, b, c, d, e, f, g, h
hier b, −c, d, −e, f, −g, h, −i

$$G^{(8)} = F^{(8)} + F^{(0)}i$$
$$F^{(8)} = E^{(8)} + E^{(1)}h$$
$$E^{(8)} = D^{(8)} + D^{(2)}g$$
$$D^{(8)} = C^{(8)} + C^{(3)}f$$
$$C^{(8)} = B^{(8)} + B^{(4)}e + B^{(0)}e^2$$
$$B^{(8)} = A^{(8)} + A^{(5)}d + A^{(2)}d^2$$
$$B^{(4)} = A^{(4)} + A^{(1)}d$$
$$B^{(0)} = A^{(0)} = 1$$
$$A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$$

Auch hier haben die Glieder der Werthe für $A^{(m)}$, $C^{(8)}$, $E^{(8)}$, $G^{(8)}$ sämmtlich das Vorzeichen +, wie in (γ). Von dem Werthe an für $C^{(8)}$, kommt hier alles mit dem, was dafür in (γ) steht, überein.

δ) Aus den Gleichungen (γ) fließt folgende

$$G^{(8)} = F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f + C^{(8)}$$

Da nun $C^{(8)}$, nach (δ) berechnet, die Litteralproducte nebst ihren Versetzungszahlen, sämtlich so giebt, wie sie, nach de Moivre, in (24, VII) neben z^8 stehen, so müssen die von ihm übergangenen nothwendig in

$$F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f$$

enthalten seyn.

ε) Es ist auch wirklich $F^{(0)} = 1$; $E^{(1)} = D^{(1)} = C^{(1)} = B^{(1)} = A^{(1)} = b$; $D^{(2)} = C^{(2)} = B^{(2)} = A^{(2)} = (b^2 + c)$; $C^{(3)} = B^{(3)} = A^{(3)} + A^{(0)}d = (b^3 + bc + d)$;

also $F^{(0)}i + E^{(1)}h + D^{(2)}g + C^{(3)}f = i + bh + (b^2 + c)g + (b^3 + bc + d)f$. Diese Buchstabenproducte geben, mit ihren Versetzungszahlen verbunden, $4b^3f + 6bcf + 2df + 3b^2g + 2cg + 2bh + i$; alles, wie oben (in e, S. 119).

C. Abgekürztes Substitutionsverfahren.

Wenn man $G^{(n)}$, mit Ueberspringung aller Zwischenordnungen $F^{(n)}$, $E^{(n)}$, $D^{(n)}$, $C^{(n)}$, $B^{(n)}$, durch $A^{(n)}$ nach (7) ausdrückt, so kömmt, $n = 7$, und $b, -c, d, -e, f, -g, h, -i$, statt a, b, c, d, e, f, g, h, gesetzt,

$$G^{(8)} = \begin{array}{l} A^{(8)} \\ \hline A^{(5)}d,\ A^{(2)}d^2 \\ \hline A^{(4)}e,\ A^{(1)}de,\ A^{(0)}e^2 \\ \hline A^{(3)}f,\ A^{(0)}df \\ \hline A^{(2)}g \\ \hline A^{(1)}h \\ \hline A^{(0)}i \end{array}$$

Diese beträchtliche Abkürzung giebt, vermittelst der so eben (7) angeführten Gleichung $A^{(m)} = b^m + b^{m-2}c + b^{m-4}c^2 + \text{etc}$,

alles für den Coefficienten von z^8 d. i. $G^{(8)}$ hier so, wie oben (S. 119. e)

D. Endliche, ganz einfache Darstellung.

a) Man erhält sie, wenn man auch $A^{(n)}$ (in C) wegschafft, und $G^{(0)} = {}^{8}\mathfrak{J}$ sogleich in den einfachen a, b, c . . . h, oder, wie hier erfordert wird, in b, c, d . . . i durchgängig (nach 12) ausdrückt. Das führt auf das obige sehr kurze combinatorische Verfahren A (S. 118)

b) Von den Vortheilen solcher combinatorischer Darstellungen, und wie eine aus der andern abgeleitet wird, sehe man (14) und die angeführten Stellen in (16).

c) Vergleicht man die Zeichnung des (S. 117, V) geforderten Coefficienten zu x^8 nach Trembley (S. 119, β) und mir (S. 118, A, a) so findet man

$$G^{(8)} = \quad i^8 \mathfrak{J} \begin{pmatrix} b, c, d \ldots g, h, i \\ 1, 2, 3 \ldots 6, 7, g \end{pmatrix}$$

wie auch aus der (S. 64, Note l) befindlichen Zusammenstellung beyderley Zeichen erhellet. Hier ist zwar das Trembleyische Zeichen, aber nicht die Auflösung desselben und das dadurch bezeichnete Verfahren, kürzer und leichter als das combinatorische; wie man sogleich übersieht, wenn man die (S. 121, η) befindliche verwickelte Reduction des Zeichens $G^{(8)}$ auf die F, E, D, C, B, A, mit der äusserst leichten Darstellung der Involution $^8\mathfrak{J}$ in b, c, d, e, f, g, h, i, nach der Vorschrift (12) vergleicht.

d) Noch mehr: wüßte man diese Vorschrift nicht, oder hätte man sie vergessen, so darf man nichts weiter als die wenigen Zeilen nachlesen, die sie enthalten; der obige Zeiger weist zugleich nach, daß man hier b, c, d, e . . . für die dortigen a, b, c, d . . . gebrauchen müsse. Ganz anders verhält es sich, wenn man die Bedeutung von $G^{(8)}$ nicht wüßte, oder sie vergessen hätte. Wie viel müßte man nicht in der sonst so deutlich abgefaßten Trembleyischen Abhandlung nachlesen, um sich bey der wirklichen Auflösung dieses Zeichens und der endlichen Darstellung seines Werthes in den einfachen b, c, d, e . . . nicht zu verirren! Die Schuld liegt nicht an dem Verfasser jener Abhandlung, sondern an der Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Zeichen, die nicht, wie die combinatorischen, die Elemente der Zusammensetzung, und mit ihnen Form und Materie, so klar und deutlich vorlegen. Man vergleiche E. S. c. a. A. S. 288. §. 215.

31. Diese unmittelbare Vergleichung der verschiedenen Verfahren (A, B, C, S. 118-122) auf ein und dasselbe Bey-

spiel (S. 117, V) angewendet, zeigt das Uebergewicht der combinatorisch-analytischen Behandlung dieser und ähnlicher Aufgaben am augenscheinlichsten. Alles wird hier, wornach man gewöhnlich strebt, auf dem kürzesten und zugleich leichtesten Wege gefunden, auf den man dadurch geleitet wird, daß man die Aufgabe von der Seite betrachtet, wo sie sich am einfachsten (als Divisionsausdruck) darstellt, und zu der Auflösung die einfachsten Mittel (die combinatorischen Anordnungen und Involutionen) gebraucht und verwendet.

32. Freylich kann man nicht jede Ansicht, die sich uns darstellt, sogleich weiter verfolgen, insofern es an Mitteln fehlt, sich ihr gehörig zu nähern, um sie zu benutzen. So liegt bey der Aufgabe, von der hier die Rede ist, die Divisionsform so unverkennbar vor Augen, daß man sie nicht übersehen kann; aber der vieltheilige Divisor macht hier die große Schwierigkeit. Diese hat Herrn Trembley auf die Einführung mit Wiederwegschaffung der einfachen Wurzeln des Nenners, als Gleichung betrachtet, geleitet. So sinnreich dieses Verfahren an sich ist, indem man die Wurzeln nicht einmal einzeln zu kennen braucht: so veranlaßt gleichwohl dieser Theil der Auflösung, den die combinatorische Analysis ganz überspringt, weitläuftige Rechnungen und Reductionen (29) die, außer der Induction, die sie geben, sich schwerlich allgemein durch Beweis würden rechtfertigen lassen. Der übrige Theil der Auflösung hingegen, die aus ersterm von Herrn Trembley gezogenen Formeln und Relationen, sind merkwürdig, und für Leser, die sich mit der combinatorischen Analysis näher bekannt machen wollen, lehrreich. Die Annäherung derselben zu den combinatorischen Formen, hat mir Veranlassung gegeben, sie weiter zu simplificiren, und endlich ganz in combinatorische Verfahren und Operationen aufzulösen. Herr

Trembley hat hier alles geleistet, was, ohne combinatorische Hülfsmittel anzuwenden, möglich war.

Convergenz und Divergenz der entwickelten Reihen im Allgemeinen; Evolution solcher Functionen, die nicht nach Potenzen einer veränderlichen Grösse geordnet sind.

33. In den beyden vorhergehenden Abhandlungen ist bey Entwickelung der Reihen blos auf die Form gesehen worden, die sie nach den dortigen Vorschriften annehmen, und wie sich daraus die Potenzen von x bestimmen lassen. Ob diese Reihen für gewisse Werthe von x convergiren oder divergiren, und für welche Werthe sie das thun, und wie schnell? davon ist dort die Frage nicht gewesen. Dies Verfahren läßt sich durch das Beyspiel der grösten Analysten rechtfertigen, welche die Beantwortung der Frage, die Convergenz der aufgefundenen Reihen betreffend, als eine Sache der Anwendung, dem Leser beym Gebrauche gewöhnlich selbst überlassen, oder, als eine eigene Untersuchung, von jener allgemeinen der Form und Coefficientenbestimmung getrennt, vorgetragen haben.

34. In sofern hier die Convergenz der Reihe auf den Werthen von x, nicht auf den Coefficienten, beruhen soll, muß man dabey drey Fälle, für

$$x < 1; \quad x > 1; \quad x = 1$$

unterscheiden, die ich nach der Ordnung vornehmen, und an dem Beyspiele

$$\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

erläutern will. Die allgemeine Form, unter welcher ich

die Entwickelung der gebrochenen Functionen in meiner Abhandlung darüber vorgetragen habe, erleichtert die gegenwärtige Unterſuchung ungemein.

35. Erſter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x < 1$ convergiren ſoll.

Man ſetze

$$\frac{p}{q} = \frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = P$$

und $P = P\varkappa 1 + P\varkappa 2 x^1 + P\varkappa 3 x^2 + \text{etc} = pq^{-1}$

Die Coefficienten für die hieſige Reihe P oder pq^{-1} ſind mit denen (S. 8; 5, a und S. 9; 5, b) ganz einerley; wie daraus erhellet, weil, die dortigen Exponenten $\mu = \nu = 0$ und $\delta = 1$ geſetzt, das hieſige P beſtimmen.

Die Reihe für P geht hier noch x^0, x^1, x^2 ... nach ſteigenden Potenzen von x fort. Iſt alſo $x < 1$, oder ein eigentlicher Bruch, ſo ſind die höhern Potenzen von x immer kleiner und kleiner, und die Reihe convergirt.

36. Zweyter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x > 1$ convergiren ſoll.

Man kehre den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs um, und ſetze

$$\frac{p}{q} = \frac{cx^2 + bx + a}{\delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha} = P$$

und $P = P\varkappa 1 x^{-1} + P\varkappa 2 x^{-2} + P\varkappa 3 x^{-3} + \text{etc} = pq^{-1}$

wie man findet, wenn man (S. 8; 5, a oder S. 9; 5, b) $\mu = 2$; $\nu = 3$; $\delta = -1$ ſetzt.

Um nun die einzelnen Glieder der Reihe für P oder pq^{-1} aus den dortigen Formeln zu finden, darf man, außer der obigen Beſtimmung für μ, ν, δ, nur noch

1) für Seite 8; 5, a

$p\times 1 = c$; $p\times 2 = b$; $p\times 3 = a$

$q\times 1 = \delta$; $q\times 2 = \gamma$; $q\times 3 = \beta$; $q\times 4 = \alpha$

oder, anstatt der dortigen Scalen, hier

$$p\ [\ c\ ,\quad b\ ,\quad a\ ]$$
$$q\ [\ \delta\ ,\quad \gamma\ ,\quad \beta\ ,\quad \alpha\ ]$$

2) für Seite 9; 5, b, anstatt der

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ

hier c, b, a; δ, γ, β, α

also auch, statt des dortigen Zeigers, hier den Zeiger

$$\begin{pmatrix} \gamma\ , & \beta\ , & \alpha \\ 1\ , & 2\ , & 3 \end{pmatrix}$$

setzen und gebrauchen. Die Reihe für den zweyten Fall folgt hieraus eben so leicht, wie die für der ersten.

Die Reihe für P oder pq^{-1} geht hier nach x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} . . . nach fallenden Potenzen von x fort. Ist also $x > 1$, also eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher Bruch, so nehmen die Potenzen x^{-1}, x^{-2}. x^{-3} . . . immer mehr und mehr ab, und die Reihe convergirt.

37. Die Bequemlichkeit, mit welcher sich hier die Formeln für beyde Fälle (35, 36) behandeln, und durch eine leichte Interpretation auf einander beziehen lassen, verschafft die allgemeine Gestalt, unter welcher ich in jener Abhandlung die Entwickelung vorgetragen habe.

Cousin, in seinem neuerlich herausgegebenen Traité élementaire de l'Analyse mathématique (Paris 1797) der bey dem Exempel (36) auf keine so allgemeine Form verweisen konnte, hat daher (p. 69. 70) für diesen zweyten Fall, die Verwandlung des gegebenen Bruchs im ersten Falle ein-

was weitläuftiger darſtellen und nachweiſen müſſen. Die Vergleichung ſeiner dort aufgefundenen Formeln für beyde Fälle zeigt gleichfalls den wechſelſeitigen Zuſammenhang und die Abhängigkeit beyder. Um nehmlich den zweyten Fall aus dem erſten abzuleiten, darf man nur dort

die A, B, C, D, E, F; a, b, c; m, n, p, q
in M, N, P, Q, R, S; c, b, a; q, p, n, m

d. i. die Couſin'ſchen erſt geſetzten Buchſtaben für den erſten Fall, in die hier darunterſtehenden Buchſtaben für den zweyten Fall, umſetzen und verwandeln.

38. Dritter Fall. Wenn die Reihe für den Bruch (in 34) für $x = 1$ convergiren ſoll.

Hier fällt alſo x gar weg, und der Bruch

$$\frac{a + b + c}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

ſo wie die daraus zu entwickelnde Reihe, iſt weder nach ſteigenden noch fallenden Potenzen von x geordnet.

Die ſchon für den erſten und zweyten Fall (35, 36) citirten Formeln (S. 8, 9) geben gleichwohl auch hier vollkommene Auskunft, nur muß man in dieſem Falle, wegen der Convergenz, auf die Größe der a, b, c und der α, β, γ, δ unter einander Rückſicht nehmen, und im Zähler und Nenner die Glieder ſo ordnen, daß die gröſſern vorangehen, die kleinern folgen.

Es ſey

$$\frac{p}{q} = \frac{h + i + k}{m + n + p + q} = P$$

ein ſo geordneter Bruch, worinn alſo $h \geqslant i$; $i \geqslant k$ und $m \geqslant n$; $n \geqslant p$; $p > q$.

Die Entwickelung für $P = pq^{-1}$ geben die oben (35) angeführten Formeln, der ersten Abhandlung, wenn man darinn $x = 1$, und für die

dortigen a, b, c; α, β, γ, δ
hier h, i, k; m, n, p, q

für die übrigen dortigen lateinischen und griechischen Buchstaben aber, die hier durch nichts repräsentirt werden, 0 setzt. Man braucht die Formel (S. 8) oder (S. 9) nachdem man die Glieder von P in recurrirender dependenter, oder in directer independenter Gestalt darstellen will.

Nach Seite 9; 5, b fände man so, für

$$\frac{p}{q} = \frac{h+i+k}{m+n+p+q} = pq^{-1}$$

$$pq^{-1} = \frac{h}{m}$$

$$+ \frac{i}{m} - \frac{h}{m}\cdot\frac{n}{m}$$

$$+ \frac{k}{m} - \frac{i}{m}\cdot\frac{n}{m} - \frac{h}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right)$$

$$+ 0 - \frac{k}{m}\cdot\frac{n}{m} - \frac{i}{m}\left(\frac{p}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right) - \frac{h}{m}\left(\frac{q}{m} - \frac{2np}{m^2} + \frac{n^3}{m^3}\right).$$

+ etc etc etc etc

Die einzelnen Theile der Glieder für die obige Entwickelung von pq^{-1} sind von unten auf (der mit + bezeichnete Theil voran) rangirt. Da in den folgenden Gliedern immer dieselben Combinationsclassen der vorhergehenden Glieder (nur in andere Factoren multiplicirt) wieder vorkommen: so erhellt daraus die große Leichtigkeit der Entwickelung des gegebenen Bruchs.

39. Couſin (a. a. O. S. 68) geht bey Entwickelung des obigen Bruchs einen ziemlichen Umweg. Er ſetzt

$$\frac{i}{h} = ax;\ \frac{k}{h} = bx^2;\ \frac{n}{m} = cx,\ \frac{p}{m} = dx^2,\ \frac{q}{m} = ex^3,$$

verwandelt dadurch den Bruch

$$\frac{h + i + k}{m+n+p+q} \text{ in } \frac{h}{m} \cdot \frac{1 + ax + bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3}$$

und ſucht ſodann, aus

$$\frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc}$$

die A, B, C, D etc, vermittelſt der a, b, c, d, e, auf dem gewöhnlichen Wege, durcheinander auszudrücken. Aus den dafür gefundenen Formeln, werden dann für die wirkliche Anwendung 1) die A, B, C, D, E . . . in a, b, c, d, e, und 2) die a, b, c, d, e in h, i, k, m, n, p, q wieder umgeſetzt, und 3) was (2) gegeben, in $\frac{h}{m}$ multiplicirt. Das iſt weitläufig, und bleibt hinter der bequemen combinatoriſchen Entwickelung (38) weit zurück [1])

40. In den Urbrüchen der Trembleyiſchen Ordnungen für wiederkehrende Reihen (ſ. die vorhergehende Abhandlung) wird durchgehends angenommen, die höchſte Potenz der veränderlichen Größe (x) im Nenner, ſey wenigſtens um einen Grad höher, als die im Zähler. Solche Functionen ſtellen

1) Aehnliche Abkürzungen, Verbeſſerungen, Erweiterungen, laſſen ſich, durch Beyhülfe der combinatoriſchen Methode und Zeichen, mehrere bey dieſen Couſinſchen Anfangsgründen der Analyſis häufig anbringen. Ich habe die Ueberſetzung dieſes nützlichen Werkes Herrn Profeſſor Rothen empfohlen, der nicht ermangeln wird, das Nöthige, theils in Anmerkungen unter den Text, theils in einem beſondern Anhange, beyzufügen.

eigentliche Brüche vor; und andere, denen diese Bedingung fehlt, lassen sich darauf zurückführen.

Es sey

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}=\frac{p}{q}$$

gegeben. Man dividire den umgekehrten Zähler durch den umgekehrten Nenner, und setze den Rest mit dem Divisor als Bruch zu dem gefundenen Quotienten $\frac{\varepsilon}{e}$. Das giebt

$$\frac{p}{q}=\frac{\varepsilon}{e}+\frac{(\delta e-\varepsilon d)x^3+(\gamma e-\varepsilon c)x^2+(\beta e-\varepsilon b)x+(\alpha e-\varepsilon a)}{e^2x^4+dex^3+cex^2+bex+ae}$$

In dem Bruche neben $\frac{\varepsilon}{e}$ ist die höchste Potenz, im Zähler x^3, im Nenner x^4, also die obenangeführte Bedingung erfüllt. Man vergleiche S. 28.

41. In (34) sind die gebrochene Function und die Werthe von x willkührlich angenommen worden. Ein wirkliches Beyspiel, das auf eine solche Function führt, und wo x nur gewisse, nicht jede beliebige, Werthe annehmen (eine bestimmte Gränze nicht übersteigen) darf, giebt, unter andern, die Rectification elliptischer Bögen.

42. Es seyen einer Ellipse um den Mittelpunct C, Brennpuncte F, halbe große Axe AC = a, halbe kleine BC = c, Eccentricität CF = e, Coordinaten aus dem Mittelpuncte CP = x, PM = y, und der Bogen DM = s, so ist bekanntermaaßen

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)};\quad ds^2 = dy^2 + dx^2;\quad e^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{alſo } ds = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}\right)} = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)}$$

$$\text{oder } ds = \frac{dy}{a}\sqrt{\left(\frac{c^4+(a^2-c^2)y^2}{c^2-y^2}\right)} = \frac{dy}{c}\sqrt{\left(\frac{c^4+e^2y^2}{c^2-y^2}\right)}$$

Hier hat man alſo mehrere Ausdrücke für den Bogen $s = \int ds$ zur Auswahl.

43. Geſetzt man wollte s durch a, c und x ausdrücken, ſo diente hierzu die erſte Formel $ds = dx\,\frac{(a^4-[a^2-c^2]x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^4-a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Für dieſe könnte man, Zähler und Nenner des Bruchs, jeden in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe, nach dem binomiſchen Lehrſatze, verwandeln, und ſolche dadurch auf die gebrochene Form (S. 8, 9) zurückführen. Die Reihe aus dieſer Form würde dann mit dx multiplicirt und integrirt, s geben.

44. I. Kürzer aber kommt man zum Zweck, wenn man $a^4-(a^2-c^2)x^2$ durch $a^4-a^2x^2$ dividirt, und die daraus entſtehende Reihe zur Potenz $\frac{1}{2}$ erhebt.

Nun iſt

$$\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^4-a^2x^2} = 1 + \frac{c^2x^2}{a^4-a^2x^2} = 1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x + \text{etc}$$

$$\text{Alſo } ds = dx\,(1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x^4 + \frac{c^2}{a^8}x^6 + \text{etc})^{\frac{1}{2}}$$

Und (E. S. c. a. A., S. 283. §. 131) die dortigen $a = 1$, $m = \frac{1}{2}$; $z = x^2$; geſetzt

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^1Ax^2$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^2A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^2B)x^4$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^3A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^3B + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}c^3C)x^6$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^4A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^4B + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}c^4C + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}b^4D)x^8$$
$$+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{c^2}{a^4}, & \frac{c^4}{a^6}, & \frac{c^2}{a^8}, & \frac{c^2}{a^{10}}, & \frac{c^2}{a^{12}} \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{matrix}\right\}$$

II. Da nun ${}^m\mathfrak{A} = m$; ${}^m\mathfrak{B} = \frac{m-1}{2}\,{}^m\mathfrak{A}$; ${}^m\mathfrak{C} = \frac{m-2}{3}\,{}^m\mathfrak{D}$;

${}^m\mathfrak{D} = \frac{m-3}{4}\,{}^m\mathfrak{C}$; etc so ist, $m = \frac{1}{2}$ gesetzt, $\mathfrak{A} = +\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2}\mathfrak{B} = -\frac{1}{4.2}$; $\frac{1}{2}\mathfrak{C} = +\frac{3.1}{6.4.2}$; $\frac{1}{2}\mathfrak{D} = -\frac{5.3.1}{8.6.4.2}$;

$\frac{1}{2}\mathfrak{E} = +\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4.2}$; u. s. w.

III. Folglich $\frac{ds}{dx} = 1$

$$+ \frac{c^2}{2a^4}x^2$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^6} - \frac{c^4}{8a^8}\right)x^4$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^8} - \frac{c^4}{4a^{10}} + \frac{c^6}{16a^{12}}\right)x^6$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^{10}} - \frac{3c^4}{8a^{12}} + \frac{3c^6}{16a^{14}} - \frac{5c^8}{128a^{16}}\right)x^8$$
$$+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}$$

IV. Und, gehörig integrirt, $DM = fds$

oder $s = x$

$$+ \frac{c^2}{6a^4} x^3$$

$$+ \left(\frac{c^2}{10a^6} - \frac{c^4}{40a^8}\right) x^5$$

$$+ \left(\frac{c^2}{14a^8} - \frac{c^4}{28a^{10}} + \frac{c^6}{112a^{12}}\right) x^7$$

$$+ \left(\frac{c^2}{18a^{10}} - \frac{c^4}{24a^{12}} + \frac{c^6}{48a^{14}} - \frac{5c^8}{1152a^{16}}\right) x^9$$

$$= \quad = \quad = \quad = \quad = \quad .$$

45. Ich habe unter den vier Formeln für ds (42) die erſte gewählt, um die Kürze und Leichtigkeit, welche die combinatoriſche Methode hier (44) gewährt, mit der ungemeinen Weitläuftigkeit, mit welcher Wolff (Elem. Anal. Infin. §. 172) die Aufgabe behandelt hat, in Parallele zu ſtellen.

Dort wird nämlich 1) b^2 (mein e^2 in 42) ſtatt $a^2 - c^2$ in der erſten Formel für ds ſubſtituirt; dann 2) ſowohl $\gamma(a^4 - b^2x^2)$ als $a\gamma(a^2 - x^2)$ in Reihen aufgelöſt, und

$$ds = \left\{ \frac{a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} - \text{etc}}{a^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6} - \text{etc}} \right\} dx,$$

gefunden; hierauf wird 3) die auf dem gewöhnlichen Wege ſo beſchwerliche wirkliche Diviſion der untern Reihe in die obere vorgenommen, mit Angabe der ſucceſſive gefundenen

Quotienten, Producte und Reste; weiter werden 4) aus dem in a, b, x ausgedrückten Quotienten die b^2, b^4, b^6 ... vermittelst der $b^2 = a^2 - c^2$ wieder weggeschafft, um alles in a, c und x ausgedrückt zu haben; zuletzt 5) wird sds durch Integration, und dadurch s (wie in 44) gefunden — calculo, wie Wolff selbst sagt, satis prolixo (von mehrern Seiten) quem tamen distincte explicari consultum fuit, vt sit exemplar in casibus similibus. Ein in der That mehr abschreckendes als einladendes Beyspiel!

46. Die Hauptschwierigkeit bey dem Wolffischen Verfahren (45) macht die wirkliche gemeine Division der einen Reihe in die andere, und die Wiederwegschaffung der b^2, b^4, b^6 ... durch a^2-c^2; $(a^2-c^2)^2$; $(a^2-c^2)^3$; ... aus dem gefundenen Quotienten. Nun könnte man zwar die gebrochene Function für ds (in 45) viel leichter und besser nach den Formeln (S. 8 und 9) behandeln und evolviren, wie auch schon in (43) ist erinnert worden. Weit vorzüglicher aber ist das ganz kurze und leichte Verfahren (44).

47. Ueber die Rectification elliptischer Bögen durch unendliche Reihen, hat man eine schätzbare Abhandlung von Lambert (Beytr. zum Gebr. der Mathem. Th. III. S. 35 f.). Lambert setzt (in 42), Kürze halber, $a=1$; $\sqrt{\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\right)}=P$ und ds oder (bey ihm) $dv = Pdx$. Um P zu bestimmen, dividirt er nicht, wie Wolff, die Reihe für $\sqrt{(1-e^2x^2)}$ durch die Reihe für $\sqrt{(1-x^2)}$, sondern multiplicirt sie (a. a. O. §. 5) durch die Reihe für $1 : \sqrt{(1-x^2)}$, welches in der That viel leichter ist. Nähme man hier (wie in 44. I) den Quotienten

$$\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\left\{\begin{array}{l}=1+(1-e^2)x^2+(1-e^2)x^4+(1-e^2)x^6+\text{etc}\\=1+c^2x^2+c^2x^4+c^2x^6+\text{etc}\end{array}\right\}$$

ſo könnte man für P die combinatoriſche Formel für $\frac{ds}{dx}$ (Ebend), aber auf den Zeiger

$$\begin{pmatrix} (1-e^2), (1-e^2), (1-e^2)\ldots \\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \ldots \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} c^2, c^2, c^2\ldots \\ 1, 2, 3\ldots \end{pmatrix}$$

bezogen, gebrauchen. Für den letztern Zeiger fände man $P = \frac{ds}{dx}$ vollkommen ſo, wie in (44, III), wenn man dort überall $a = 1$ ſetzt.

48. Lambert hat (a. a. O. §. 7) einen Ausdruck für P, und dadurch auch (§. 9) für $\int P dx$ oder s angegeben, bey welchem keine abwechſelnden Zeichen in den Coefficienten vorkommen. Das iſt bequem für die Anwendung; auch kann man die hieſigen Formeln (44, III und IV) ſogleich auf die Lambertiſchen reduciren, wenn man darinn 1) überall $a = 1$ ſetzt 2) die Theile jedes einzelnen Coefficienten auf gleiche Nenner bringt. 3) Von dieſen Theilen, c^2, als gemeinſchaftlichen Factor in den ganzen Coefficienten, abſondert. 4) Die übrigen Potenzen aber von c, vermittelſt der Gleichungen $c^2 = 1-e^2$; $c^4 = 1-2e^2+e^4$; $c^6 = 1-3e^2+3e^4-e^6$; u. ſ. w. in e ausdrückt, und alles gehörig reducirt. So fände man z. B. für die Formel (44, IV) und die gemeinſchaftlichen Nenner: 6, 40, 112, 1152 . . . den Bogen $DM = \int ds$ oder

$$s = x + \frac{c^2}{6} x^3 + \frac{(3+e^2)c^2}{40} x^5 + \frac{(5+2e^2+e^4)c^2}{112} x^7 + \frac{(35+15e^2+9e^4+5e^6)c^2}{1152} x^9$$

Daraus erhielte man rückwärts $\frac{ds}{dx}$ oder P, wie bey Lambert (§. 7). Einige Coefficienten (wie hier der 4te und 5te) erscheinen nach der Differentiation, in kleinern Zählern und Nennern als bey Lambert (§. 7); reducirt aber auf die größern Lambertischen Nenner, findet man sie mit ihnen ganz übereinstimmend. Dort sind nehmlich die gemeinschaftlichen Nenner, des Gesetzes wegen, welches (das. §. 8) für die Coefficienten nachgewiesen wird, oft größer als sonst nöthig wäre.

49. Für $e = 0$ und $c = 1$, also für den Kreis, wäre der Bogen DM oder

$$s = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \text{etc}$$

Das giebt, $x = 1$ gesetzt, die bekannte Newtonische Reihe $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \text{etc}$ für den Quadranten, auf den Halbmesser 1 bezogen. Für $e = 1$, also $c = 0$, verwandelt sich die Ellipse in die gerade Linie $s = x$.

50. Die Reihen (44, IV und 48) convergiren, aber nur sehr langsam, besonders für etwas größere e.

39. Couſin (a. a. O. S. 68) geht bey Entwickelung des obigen Bruchs einen ziemlichen Umweg. Er ſetzt

$$\frac{i}{h} = ax;\ \frac{k}{h} = bx^2;\ \frac{n}{m} = cx,\ \frac{p}{m} = dx^2,\ \frac{q}{m} = ex^3,$$

verwandelt dadurch den Bruch

$$\frac{h + i + k}{m + n + p + q} \text{ in } \frac{h}{m} \cdot \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2 + ex^3}$$

und ſucht ſodann, aus

$$\frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2 + ex^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc}$$

die A, B, C, D etc, vermittelſt der a, b, c, d, e, auf dem gewöhnlichen Wege, durcheinander auszudrücken. Aus den dafür gefundenen Formeln, werden dann für die wirkliche Anwendung 1) die A, B, C, D, E . . . in a, b, c, d, e, und 2) die a, b, c, d, e in h, i, k, m, n, p, q wieder umgeſetzt, und 3) was (2) gegeben, in $\frac{h}{m}$ multiplicirt. Das iſt weitläuftig, und bleibt hinter der bequemen combinatoriſchen Entwickelung (38) weit zurück [1])

40. In den Urbrüchen der Trembleyiſchen Ordnungen für wiederkehrende Reihen (ſ. die vorhergehende Abhandlung) wird durchgehends angenommen, die höchſte Potenz der veränderlichen Größe (x) im Nenner, ſey wenigſtens um einen Grad höher, als die im Zähler. Solche Functionen ſtellen

1) Aehnliche Abkürzungen, Verbeſſerungen, Erweiterungen, laſſen ſich, durch Beyhülfe der combinatoriſchen Methode und Zeichen, mehrere bey dieſen Couſinſchen Anfangsgründen der Analyſis häufig anbringen. Ich habe die Ueberſetzung dieſes nützlichen Werkes Herrn Profeſſor Rothen empfohlen, der nicht ermangeln wird, das Nöthige, theils in Anmerkungen unter den Text, theils in einem beſondern Anhange, beyzufügen.

eigentliche Brüche vor; und andere, denen diese Bedingung fehlt, lassen sich darauf zurückführen.

Es sey

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}=\frac{p}{q}$$

gegeben. Man dividire den umgekehrten Zähler durch den umgekehrten Nenner, und setze den Rest mit dem Divisor als Bruch zu dem gefundenen Quotienten $\frac{\varepsilon}{e}$. Das giebt

$$\frac{p}{q}=\frac{\varepsilon}{e}+\frac{(\delta e-\varepsilon d)x^3+(\gamma e-\varepsilon c)x^2+(\beta e-\varepsilon b)x+(\alpha e-\varepsilon a)}{e^2x^4+dex^3+cex^2+bex+ae}$$

In dem Bruche neben $\frac{\varepsilon}{e}$ ist die höchste Potenz, im Zähler x^3, im Nenner x^4, also die obenangeführte Bedingung erfüllt. Man vergleiche S. 28.

41. In (34) sind die gebrochene Function und die Werthe von x willkührlich angenommen worden. Ein wirkliches Beyspiel, das auf eine solche Function führt, und wo x nur gewisse, nicht jede beliebige, Werthe annehmen (eine bestimmte Gränze nicht übersteigen) darf, giebt, unter andern, die Rectification elliptischer Bögen.

42. Es seyen einer Ellipse um den Mittelpunct C, Brennpuncte F, halbe große Axe AC = a, halbe kleine DC = c, Eccentricität CF = e, Coordinaten aus dem Mittelpuncte CP = x, PM = y, und der Bogen DM = s, so ist bekanntermaaßen

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)};\ ds^2 = dy^2 + dx^2;\ e^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{alſo } ds = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}\right)} = \frac{dx}{a}\sqrt{\left(\frac{a^4-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)}$$

$$\text{oder } ds = \frac{dy}{a}\sqrt{\left(\frac{c^4+(a^2-c^2)y^2}{c^2-y^2}\right)} = \frac{dy}{c}\sqrt{\left(\frac{c^4+e^2y^2}{c^2-y^2}\right)}$$

Hier hat man alſo mehrere Ausdrücke für den Bogen $s = \int ds$ zur Auswahl.

43. Geſetzt man wollte s durch a, c und x ausdrücken, ſo diente hierzu die erſte Formel $ds = dx\,\frac{(a^4-[a^2-c^2]x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^4-a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Für dieſe könnte man, Zähler und Nenner des Bruchs, jeden in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe, nach dem binomiſchen Lehrſatze, verwandeln, und ſolche dadurch auf die gebrochene Form (S. 8, 9) zurückführen. Die Reihe aus dieſer Form würde dann mit dx multiplicirt und integrirt, s geben.

44. I. Kürzer aber kommt man zum Zweck, wenn man $a^4-(a^2-c^2)x^2$ durch $a^4-a^2x^2$ dividirt, und die daraus entſtehende Reihe zur Potenz $\frac{1}{2}$ erhebt.

Nun iſt

$$\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^4-a^2x^2} = 1 + \frac{c^2x^2}{a^4-a^2x^2} = 1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x + \text{etc}$$

$$\text{Alſo } ds = dx\,(1 + \frac{c^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2}{a^6}x^4 + \frac{c^2}{a^8}x^6 + \text{etc})^{\frac{1}{2}}$$

Und (S. S. c. a. A. S. 283. §. 131) die dortigen $a = 1$; $m = \frac{1}{2}$; $z = x^2$; geſetzt

$$\frac{ds}{dx} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^2Ax^2$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^2A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^2B)x^4$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^3A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^3B + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}c^3C)x^6$$
$$+ (\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}a^4A + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}b^4B + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}c^4C + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}b^4D)x^8$$
$$+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{c^2}{a^4}, & \frac{c^4}{a^6}, & \frac{c^2}{a^8}, & \frac{c^2}{a^{10}}, & \frac{c^2}{a^{12}} \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{matrix}\right\}$$

II. Da nun ${}^m\mathfrak{A} = m$; ${}^m\mathfrak{B} = \frac{m-1}{2}{}^m\mathfrak{A}$; ${}^m\mathfrak{C} = \frac{m-2}{3}{}^m\mathfrak{D}$;

${}^m\mathfrak{D} = \frac{m-3}{4}{}^m\mathfrak{C}$; etc so ist, $m = \frac{1}{2}$ gesetzt, $\mathfrak{A} = +\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2}\mathfrak{B} = -\frac{1}{4.2}$; $\frac{1}{2}\mathfrak{C} = +\frac{3.1}{6.4.2}$; $\frac{1}{2}\mathfrak{D} = -\frac{5.3.1}{8.6.4.2}$;

$\frac{1}{2}\mathfrak{E} = +\frac{7.5.3.1}{10.8.6.4.2}$; u. s. w.

III. Folglich $\frac{ds}{dx} = 1$

$$+ \frac{c^2}{2a^4}x^2$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^6} - \frac{c^4}{8a^8}\right)x^4$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^8} - \frac{c^4}{4a^{10}} + \frac{c^6}{16a^{12}}\right)x^6$$
$$+ \left(\frac{c^2}{2a^{10}} - \frac{3c^4}{8a^{12}} + \frac{3c^6}{16a^{14}} - \frac{5c^8}{128a^{16}}\right)x^8$$
$$+ \text{etc} \qquad + \text{etc} \qquad + \text{etc}$$

IV. Und, gehörig integrirt, $DM = fds$

oder $s = x$

$$+ \frac{c^2}{6a^4} x^3$$

$$+ \left(\frac{c^2}{10a^6} - \frac{c^4}{40a^8}\right) x^5$$

$$+ \left(\frac{c^2}{14a^8} - \frac{c^4}{28a^{10}} + \frac{c^6}{112a^{12}}\right) x^7$$

$$+ \left(\frac{c^2}{18a^{10}} - \frac{c^4}{24a^{12}} + \frac{c^6}{48a^{14}} - \frac{5c^8}{1152a^{16}}\right) x^9$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

45. Ich habe unter den vier Formeln für ds (42) die erſte gewählt, um die Kürze und Leichtigkeit, welche die combinatoriſche Methode hier (44) gewährt, mit der ungemeinen Weitläuftigkeit, mit welcher Wolff (Elem. Anal. Infin. §. 172) die Aufgabe behandelt hat, in Parallele zu ſtellen.

Dort wird nämlich 1) b^2 (mein e^2 in 42) ſtatt $a^2 - c^2$ in der erſten Formel für ds ſubſtituirt; dann 2) ſowohl $\gamma(a^4 - b^2x^2)$ als $a\gamma(a^2 - x^2)$ in Reihen aufgelöſt, und

$$ds = \left\{ \frac{a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}} - \text{etc}}{a^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6} - \text{etc}} \right\} dx.$$

gefunden; hierauf wird 3) die auf dem gewöhnlichen Wege ſo beſchwerliche wirkliche Diviſion der untern Reihe in die obere vorgenommen, mit Angabe der ſucceſſive gefundenen

Quotienten, Producte und Reste; weiter werden 4) aus dem in a, b, x ausgedrückten Quotienten die b^2, b^4, b^6 ... vermittelst der $b^2 = a^2 - c^2$ wieder weggeschafft, um alles in a, c und x ausgedrückt zu haben; zuletzt 5) wird ds durch Integration, und dadurch s (wie in 44) gefunden — calculo, wie Wolff selbst sagt, satis prolixo (von mehrern Seiten) quem tamen distincte explicari consultum fuit, vt sit exemplar in casibus simulibus. Ein in der That mehr abschreckendes als einladendes Beyspiel!

46. Die Hauptschwierigkeit bey dem Wolffischen Verfahren (45) macht die wirkliche gemeine Division der einen Reihe in die andere, und die Wiederwegschaffung der b^2, b^4, b^6 ... durch $a^2 - c^2$; $(a^2 - c^2)^2$; $(a^2 - c^2)^3$; ... aus dem gefundenen Quotienten. Nun könnte man zwar die gebrochene Function für ds (in 45) viel leichter und besser nach den Formeln (S. 8 und 9) behandeln und evolviren, wie auch schon in (43) ist erinnert worden. Weit vorzüglicher aber ist das ganz kurze und leichte Verfahren (44).

47. Ueber die Rectification elliptischer Bögen durch unendliche Reihen, hat man eine schätzbare Abhandlung von Lambert (Beytr. zum Gebr. der Mathem. Th. III. S. 35 f.). Lambert setzt (in 42), Kürze halber, $a=1$; $r\left(\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}\right) = P$ und ds oder (bey ihm) $dv = Pdx$. Um P zu bestimmen, dividirt er nicht, wie Wolff, die Reihe für $r(1-e^2x^2)$ durch die Reihe für $r(1-x^2)$, sondern multiplicirt sie (a. a. O. §. 5) durch die Reihe für $1 : r(1-x^2)$, welches in der That viel leichter ist. Nähme man hier (wie in 44. 1) den Quotienten

$$\frac{1-e^2x^2}{1-x^2} \left\{ \begin{array}{l} = 1 + (1-e^2)x^2 + (1-e^2)x^4 + (1-e^2)x^6 + \text{etc} \\ = 1 + c^2 x^2 + c^2 x^4 + c^2 x^6 + \text{etc} \end{array} \right.$$

ſo könnte man für P die combinatoriſche Formel für $\frac{ds}{dx}$ (Ebend), aber auf den Zeiger

$$\begin{pmatrix} (1-e^2), (1-e^2), (1-e^2)\ldots \\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ldots \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} c^2, c^2, c^2\ldots \\ 1, 2, 3\ldots \end{pmatrix}$$

bezogen, gebrauchen. Für den letztern Zeiger fände man $P = \frac{ds}{dx}$ vollkommen ſo, wie in (44, III), wenn man dort überall $a = 1$ ſetzt.

48. Lambert hat (a. a. O. §. 7) einen Ausdruck für P, und dadurch auch (§. 9) für $\int Pdx$ oder s angegeben, bey welchem keine abwechſelnden Zeichen in den Coefficienten vorkommen. Das iſt bequem für die Anwendung; auch kann man die hieſigen Formeln (44, III und IV) ſogleich auf die Lambertiſchen reduciren, wenn man darinn 1) überall $a = 1$ ſetzt 2) die Theile jedes einzelnen Coefficienten auf gleiche Nenner bringt. 3) Von dieſen Theilen, c^2, als gemeinſchaftlichen Factor in den ganzen Coefficienten, abſondert. 4) Die übrigen Potenzen aber von c, vermittelſt der Gleichungen $c^2 = 1-e^2$; $c^4 = 1-2e^2+e^4$; $c^6 = 1-3e^2+3e^4-e^6$; u. ſ. w. in e ausdrückt, und alles gehörig reducirt. So fände man z. B. für die Formel (44, IV) und die gemeinſchaftlichen Nenner: 6, 40, 112, 1152 . . . den Bogen DM = ſ

oder

$$s = x + \frac{c^2}{6} x^3 + \frac{(3+e^2)c^2}{40} x^5 + \frac{(5+2e^2+e^4)c^2}{112} x^7 + \frac{(35+15e^2+9e^4+5e^6)c^2}{1152} x^9$$

Daraus erhielte man rückwärts $\frac{ds}{dx}$ oder P, wie bey Lambert (§. 7). Einige Coefficienten (wie hier der 4te und 5te) erscheinen nach der Differentiation, in kleinern Zählern und Nennern als bey Lambert (§. 7); reducirt aber auf die größern Lambertischen Nenner, findet man sie mit ihnen ganz übereinstimmend. Dort sind nehmlich die gemeinschaftlichen Nenner, des Gesetzes wegen, welches (vas. §. 8) für die Coefficienten nachgewiesen wird, oft größer als sonst nöthig wäre.

49. Für $e = 0$ und $c = 1$, also für den Kreis, wäre der Bogen DM oder

$$s = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \text{etc}$$

Das giebt, $x = 1$ gesetzt, die bekannte Newtonische Reihe $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \text{etc}$ für den Quadranten, auf den Halbmesser 1 bezogen. Für $e = 1$, also $c = 0$, verwandelt sich die Ellipse in die gerade Linie $s = x$.

50. Die Reihen (44, IV und 48) convergiren, aber nur sehr langsam, besonders für etwas größere e.

Dies macht ihren Gebrauch für die Anwendung unbequem. Mehrere Verwandlungen derſelben, durch Beyhülfe von trigonometriſchen auf die Ellipſe ſich beziehenden Functionen, um ſchnellere Convergenz zu bewürken, hat Lambert in der angeführten Abhandlung vorgenommen.

51. Schlüßlich will ich zwey (in 15 und 19 erwähnte) Tafeln, zum bequemen Gebrauche in der Anwendung, hier noch aufſtellen. Ich zähle ſie als Vte und VIte Tafel, mit jenen vieren (S. 4 - 18) zu welchen ſie als Ergänzung gehören, in eine Reihe fort. Was die IIIte für die Moivriſchen Involutionen iſt, das ſind die IVte Vte und VIte für die Boscovichſchen. Ein Nachtrag zu Tafel II. (S. 8 und 9) und ein anderer zu 12 (S. 96, 97) machen den Beſchluß.

Tafel V. Boscovich-Hindenburgische Involutionen zu bestimmten Summen für den Zeiger $\binom{a,b,c,d,e,f,g,h}{1,2,3,4,5,6,7,8}$

$^{1}\mathfrak{J}$

I, a

$^{2}\mathfrak{J}$

II, a^2
2, b

$^{3}\mathfrak{J}$

III, a^3
12, ab
3, c

$^{4}\mathfrak{J}$

IIII, a^4
112, a^2b
22, b^2
13, ac
4, d

$^{5}\mathfrak{J}$

IIIII, a^5
1112, a^3b
122, ab^2
113, a^2c
23, bc
14, ad
5, e

$^{6}\mathfrak{J}$

IIIIII, a^6
11112, a^4b
1122, a^2b^2
222, b^3
1113, a^3c
123, abc
33, c^2
114, a^2d
24, bd
15, ae
6, f

$^{7}\mathfrak{J}$

IIIIIII, a^7
11112, a^5b
11122, a^3b^2
1222, ab^3
11113, a^4c
1123, a^2bc
223, b^2c
133, ac^2
1114, a^3d
124, abd
34, cd
115, a^2e
25, be
16, af
6, g

$^{8}\mathfrak{J}$

IIIIIIII, a^8
IIIIIII2, a^6b
IIIII22, a^4b^2
II222, a^2b^3
2222, b^4
IIIII3, a^5c
II123, a^3bc
1223, ab^2c
1133, a^2c^2
233, bc^2
IIII4, a^4d
1124, a^2bd
224, b^2d
134, acd
44, d^2
1115, a^3e
125, abe
35, ce
116, a^2f
26, bf
17, ag
8, h

Die Involution zur Summe 9, oder die Complexionen für $^{9}\mathfrak{J}$, (S. 18 Taf. IV. und hier 13) die für $^{10}\mathfrak{J}$ (18); die Benennung Boscovich-Hindenburgische Involution rechtfertigen die Auflösungen (11, 12). Herrn Trembley's $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $C^{(n)}$, $D^{(n)}$ ... für bestimmte n, sogleich auf die Tafel zu reduciren, vergleiche man (6, II) oder Note 1 der vorhergehenden Abhandlung.

Tafel VI. Combinationen zu unbestimmten Summen n für den Zeiger $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 & \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} {}^{n}\mathfrak{J} \\ \begin{pmatrix} a, & b, & c & \ldots\ldots & \overset{m-3}{a}, & \overset{m-2}{a}, & \overset{m-1}{a} \\ 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots & m-2, & m-1, & m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underset{(a)}{{}^{n-1}\mathfrak{J}a} + \underset{(a,b)}{{}^{n-2}\mathfrak{J}b} + \underset{(a,b,c)}{{}^{n-3}\mathfrak{J}c} + \underset{(a,b,c,d)}{{}^{n-4}\mathfrak{J}d} + \text{etc}$$

$$\begin{aligned} {}^{n}\mathfrak{J} &+ {}^{n-2}\mathfrak{J}b + {}^{n-4}\mathfrak{J}b^2 + {}^{n-6}\mathfrak{J}b^3 + \text{etc } (a) \\ &+ {}^{n-3}\mathfrak{J}c + {}^{n-6}\mathfrak{J}c^2 + {}^{n-9}\mathfrak{J}c^3 + \text{etc } (a,b) \\ &+ {}^{n-4}\mathfrak{J}d + {}^{n-8}\mathfrak{J}d^2 + {}^{n-12}\mathfrak{J}d^3 + \text{etc } (a,b,c) \\ &+ {}^{n-5}\mathfrak{J}e + {}^{n-10}\mathfrak{J}e^2 + {}^{n-15}\mathfrak{J}e^3 + \text{etc } (a,b,c,d) \\ &+ {}^{n-6}\mathfrak{J}f + {}^{n-12}\mathfrak{J}f^2 + {}^{n-18}\mathfrak{J}f^3 + \text{etc } (a,b,c,d,e) \\ &\;\;\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &+ {}^{n-m}\mathfrak{J}\overset{m-1}{a} + {}^{n-2m}\mathfrak{J}\left(\overset{m-1}{a}\right)^2 + {}^{n-3m}\mathfrak{J}\left(\overset{m-1}{a}\right)^3 \ldots + {}^{n-rm}\mathfrak{J}\left(\overset{m-1}{a}\right)^r \\ &\begin{pmatrix} a, & b, & c, & \ldots & \overset{m-3}{a}, & \overset{m-2}{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der hier zuletzt stehende allgemeine Ausdruck stellt die (m−1)te Horizontalreihe der zweyten Formel vor. ${}^{n}\mathfrak{J}$ gehört nicht mit in das Gesetz dieser Reihen, und steht auch daher abgesondert für sich. Die Werthe von m fangen von 2 an.

Das mte Glied der ersten Formel, vom ersten ${}^{n-1}\mathfrak{J}a$ an gerechnet, ist

$$\begin{array}{c} {}^{n-m}\mathfrak{J}\overset{m-1}{a} \\ \begin{pmatrix} a, & b, & c & \ldots\ldots & \overset{m-2}{a}, & \overset{m-1}{a} \end{pmatrix} \end{array}$$

Mehr hiervon, nebst Beyspielen zur Anwendung (19, 20, 21)

Nachtrag zu Tafel II Seite 9 und 13.

S. 9; 6, b. Für

$$\frac{p}{q} = \frac{ax^{\mu} + bx^{\mu+\delta} + cx^{\mu+2\delta} + \text{etc}}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc}} = pq^{-1}$$

$$\text{ist } pq^{-1} = \frac{a}{\alpha} x^{\mu-\nu}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\frac{j^1\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{b}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+\delta}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\frac{j^2\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{b}{\alpha}\frac{j^1\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{c}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+2\delta}$$

$$+\left(\frac{a}{\alpha}\frac{j^3\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{b}{\alpha}\frac{j^2\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{c}{\alpha}\frac{j^1\mathfrak{J}}{\alpha^*} + \frac{d}{\alpha}\right)x^{\mu-\nu+3\delta}$$

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta, & +\varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

S. 13; 9, b. Für

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha x^{\nu} - \beta x^{\nu+\delta} - \gamma x^{\nu+2\delta} - \text{etc}} = q^{-1}$$

$$\text{ist } q^{-1} = \frac{x^{-\nu}}{\alpha} + \frac{j^1\mathfrak{J}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+\delta} + \frac{j^2\mathfrak{J}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+2\delta} + \frac{j^3\mathfrak{J}}{\alpha^{*+1}}x^{-\nu+3\delta} + \text{etc}$$

$$\begin{pmatrix} +\beta, & +\gamma, & +\delta, & +\varepsilon \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

Der Zahlenwerth des Zeichens * in α^* und α^{*+1} wird, nach der bereits festgesetzten Bedeutung, durch die Anzahl der Factoren $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ in den einzelnen Complexionen der darüber stehenden Involution ${}^1\mathfrak{J}$, ${}^2\mathfrak{J}$, ${}^3\mathfrak{J} \ldots$ bestimmt, und ist für die Complexionen von zwey Buchstaben, 2; von dreyen, 3; u. s. w. (Arch. d. Math. H. IV. S. 389, 7; 379. E. S. c. a. A. S. 265)

Die Involutionen, so wie die Zeichen vor $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ im Nenner und Zeiger betreffend, sehe man die Bemerkungen, hier S. 15.

Nachtrag zu der zweyten Auflösung (12) Seite 96, 97.

Bey dieser Auflösung habe ich mich auf ein bereits in (8) angegebenes combinatorisches Gesetz berufen, das auch in (12) befolgt wird; und das ist Ursache gewesen, daß ich von der hier nöthigen Entwickelung und Ableitung der Complexionen nicht so ausführlich gehandelt habe, als es die Wichtigkeit der Involution erfordert. Ich will also itzt, ohne Beziehung auf jenes Verfahren (das man nach Gefallen hinterher für sich vergleichen kann) und zugleich mit einiger Abänderung im Vortrage, die Aufgabe mit ihrer Auflösung noch einmal vornehmen.

Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe n, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen, zu finden (10; S. 93).

Erste Auflösung für die Summe 9, nach Boscowich, in Zahlen (11; S. 93—95).

Zweyte Auflösung für die Summe n, nach Hindenburg, in Buchstaben.

I. Als erste Complexion setze man $a^n = a^{n-1}a$; die einzige auf a sich endende Verbindung der ersten Abtheilung.

Die auf b, c, d . . . nach der Ordnung sich endenden Verbindungen der übrigen Abtheilungen; überhaupt jede folgende Abtheilung aus der unmittelbar vorhergehenden, (die mte aus der [m−1]ten) zu entwickeln, befolge man nachstehende Vorschriften.

II. Die auf den mten Buchstaben des Zeigers sich endenden Complexionen, oder die mte Abtheilung zu finden

α) Vermindere man alle Complexionen der nächstvorhergehenden (m−1)ten Abtheilung, die a enthalten, um Ein a, und statt des letzten Buchstabens jeder so verminderten Complexion, setze man nun den nächstfolgenden (statt des [m−1]ten, den mten des Zeigers).

β) Von den so (nach α) gefundenen Complexionen vermindere man diejenigen, die *m* oder mehrere a enthalten, um mmal a, und setze dafür, am Ende jeder so verminderten Complexion, einen, dem letzten gleichen Buchstaben (den mten des Zeigers) hinzu; oder, man erhöhe den Exponenten des letzten Buchstabens um 1.

γ) Auf die Complexionen die (β) gegeben hat wende man das Verfahren (β), und ebendasselbe noch weiter auf die dadurch erhaltenen neuen Complexionen, und sofort immer weiter an, so lange sich dadurch noch Complexionen erzeugen, die *m* oder mehrere a enthalten. Unter diesen können auch solche sich ergeben und mit vorkommen, die weniger a, auch gar keins, enthalten; diese werden aber, bey weiterer Anwendung der Vorschriften (α, β) sogleich übergangen.

Beyspiel für n = 9 und m = 1, 2, 3 ... oder,

Auflösung für die Summe 9, in Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; d. i.

In meinen combinatorischen Zeichen ausgedrückt,

Auflösung für $\overset{9}{\mathfrak{T}}$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c & \ldots & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3 & \ldots & 7, & 8, & 9 \end{pmatrix}$$

Nachtrag zu der zweyten Auflöſung (12) Seite 96, 97.

Bey dieſer Auflöſung habe ich mich auf ein bereits in (8) angegebenes combinatoriſches Geſetz berufen, das auch in (12) befolgt wird; und das iſt Urſache geweſen, daß ich von der hier nöthigen Entwickelung und Ableitung der Complexionen nicht ſo ausführlich gehandelt habe, als es die Wichtigkeit der Involution erfordert. Ich will alſo itzt, ohne Beziehung auf jenes Verfahren (das man nach Gefallen hinterher für ſich vergleichen kann) und zugleich mit einiger Abänderung im Vortrage, die Aufgabe mit ihrer Auflöſung noch einmal vornehmen.

Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe n, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen, zu finden (10; S. 93).

Erſte Auflöſung für die Summe 9, nach Boscowich, in Zahlen (11; S. 93—95).

Zweyte Auflöſung für die Summe n, nach Hindenburg, in Buchſtaben.

I. Als erſte Complexion ſetze man $a^n = a^{n-1}a$; die einzige auf a ſich endende Verbindung der erſten Abtheilung.

Die auf b, c, d . . . nach der Ordnung ſich endenden Verbindungen der übrigen Abtheilungen; überhaupt jede folgende Abtheilung aus der unmittelbar vorhergehenden, (die mte aus der [m−1]ten) zu entwickeln, befolge man nachſtehende Vorſchriften.

II. Die auf den mten Buchstaben des Zeigers sich endenden Complexionen, oder die mte Abtheilung zu finden

α) Vermindere man alle Complexionen der nächstvorhergehenden (m−1)ten Abtheilung, die a enthalten, um Eins, und statt des letzten Buchstabens jeder so verminderten Complexion, setze man nun den nächstfolgenden (statt des [m−1]ten, den mten des Zeigers).

β) Von den so (nach α) gefundenen Complexionen vermindere man diejenigen, die *m* oder mehrere a enthalten, um mmal a, und setze dafür, am Ende jeder so verminderten Complexion, einen, dem letzten gleichen Buchstaben (den mten des Zeigers) hinzu; oder, man erhöhe den Exponenten des letzten Buchstabens um 1.

γ) Auf die Complexionen die (β) gegeben hat wende man das Verfahren (β), und ebendasselbe noch weiter auf die dadurch erhaltenen neuen Complexionen, und sofort immer weiter an, so lange sich dadurch noch Complexionen erzeugen, die *m* oder mehrere a enthalten. Unter diesen können auch solche sich ergeben und mit vorkommen, die weniger a, auch gar keins, enthalten; diese werden aber, bey weiterer Anwendung der Vorschriften (α, β) sogleich übergangen.

Beyspiel für n = 9 und m = 1, 2, 3 ... oder,

Auflösung für die Summe 9, in Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; d. i.

In meinen combinatorischen Zeichen ausgedrückt,

Auflösung für $^{9}\mathfrak{J}\binom{a, b, c \ldots g, h, i}{1, 2, 3 \ldots 7, 8, 9}$

Nachtrag zu der zweyten Auflösung (12) Seite 96, 97.

Bey dieser Auflösung habe ich mich auf ein bereits in (8) angegebenes combinatorisches Gesetz berufen, das auch in (12) befolgt wird; und das ist Ursache gewesen, daß ich von der hier nöthigen Entwickelung und Ableitung der Complexionen nicht so ausführlich gehandelt habe, als es die Wichtigkeit der Involution erfordert. Ich will also itzt, ohne Beziehung auf jenes Verfahren (das man nach Gefallen hinterher für sich vergleichen kann) und zugleich mit einiger Abänderung im Vortrage, die Aufgabe mit ihrer Auflösung noch einmal vornehmen.

Aufgabe. Die Complexionen einer gegebenen Summe n, unabhängig von vorhergehenden kleinern Summen, zu finden (10; S. 93).

Erste Auflösung für die Summe 9, nach Boscowich, in Zahlen (11; S. 93—95).

Zweyte Auflösung für die Summe n, nach Hindenburg, in Buchstaben.

I. Als erste Complexion setze man $a^n = a^{n-1}a$; die einzige auf a sich endende Verbindung der ersten Abtheilung.

Die auf b, c, d . . . nach der Ordnung sich endenden Verbindungen der übrigen Abtheilungen; überhaupt jede folgende Abtheilung aus der unmittelbar vorhergehenden, (die mte aus der [m−1]ten) zu entwickeln, befolge man nachstehende Vorschriften.

II. Die auf den mten Buchstaben des Zeigers sich endenden Complexionen, oder die mte Abtheilung zu finden

α) Vermindere man alle Complexionen der nächstvorhergehenden (m−1)ten Abtheilung, die a enthalten, um Ein a, und statt des letzten Buchstabens jeder so verminderten Complexion, setze man nun den nächstfolgenden (statt des [m−1]ten, den mten des Zeigers).

β) Von den so (nach α) gefundenen Complexionen vermindere man diejenigen, die *m* oder mehrere a enthalten, um mmal a, und setze dafür, am Ende jeder so verminderten Complexion, einen, dem letzten gleichen Buchstaben (den mten des Zeigers) hinzu; oder, man erhöhe den Exponenten des letzten Buchstabens um 1.

γ) Auf die Complexionen die (β) gegeben hat wende man das Verfahren (β), und ebendasselbe noch weiter auf die dadurch erhaltenen neuen Complexionen, und sofort immer weiter an, so lange sich dadurch noch Complexionen erzeugen, die *m* oder mehrere a enthalten. Unter diesen können auch solche sich ergeben und mit vorkommen, die weniger a, auch gar keins, enthalten; diese werden aber, bey weiterer Anwendung der Vorschriften (α, β) sogleich übergangen.

Beyspiel für n = 9 und m = 1, 2, 3 ... oder,

Auflösung für die Summe 9, in Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h, i, in Beziehung auf ihre Lokalwerthe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; d. i.

In meinen combinatorischen Zeichen ausgedrückt,

Auflösung für $^{9}\mathfrak{T}$

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c & \ldots & g, & h, & i \\ 1, & 2, & 3 & \ldots & 7, & 8, & 9 \end{pmatrix}$$

1) Für die erſte Abtheilung kommt

Die Verbindung $a^9 = a^8a$, als erſte und einzige Complexion (I)

2) Für die zweyte Abtheilung, wo $m=2$, kommen,

Die Verbindung a^7b (II, α)

und daraus a^5b^2; und daraus a^3b^3; und daraus a^1b^4 (II, β, γ)

3) Für die dritte Abtheilung, wo $m=3$, kommen,

Die Verbindungen a^6c, a^4bc, a^2b^2c, b^3c (II, α)

und daraus a^3c^2, a^1bc^2 (II, β)

und daraus c^3 (II, γ)

und ſo weiter, für die übrigen Complexionen der übrigen Abtheilungen, oder für $m=4, 5, 6, 7, 8, 9$, wie ſolche in (13) Seite 98 ſtehen.

Die letzte (hier die 9te) Abtheilung beſteht wieder, wie die erſte, nur aus einer einzigen Complexion (hier aus i, dem 9ten Buchſtaben des Zeigers)

IV.

Erläuterungen über den Beweis des polynomischen Lehrsatzes (Erste Samml. comb. anal. Abhandl. S. 68-74) von dem Verfasser des Beweises, G. S. Klügel, Professor zu Halle.

Eine Aeusserung des Recensenten gedachter Sammlung in der Allgem. Literaturzeitung 1796, No. 380 und 381, und einige mir schriftlich zugekommene Bemerkungen des Herrn Prof. Rothe in Leipzig, veranlassen mich diese Erläuterungen über den von mir gegebenen Beweis des polynomischen Lehrsatzes für jede Art von Exponenten aufzusetzen.

Die Recension der Sammlung von Abhandlungen über den polynomischen Lehrsatz in der A. L. Z. ist mit Fleiß und Einsicht gemacht; nur eine Bemerkung in derselben möchte eine Berichtigung nöthig haben. Es ist die Stelle, S. 587, wo von meinem Beweise der Allgemeinheit jenes Lehrsatzes die Rede ist. Der Recensent sagt, meine Schlußart lasse nichts zu wünschen übrig, als höchstens, daß der letzte Satz (ohne Zweifel der Schluß §. 19) mathematisch in völliger Strenge dargethan, und man gehörig versichert würde, daß nicht etwa mit dem so dunklen Begriffe von Form ein Sprung im Beweise verdeckt werde.

Der Recensent hält also die von mir gebrauchte Schlußart (Raisonnement) für mißlich, und möchte den Satz durch Formeln, welche die Gleichheit aussagen, bewiesen

haben. Sollte aber der Begriff von Form in der Mathematik so dunkel seyn, als er es hier sich vorstellt?

In der Philosophie mögen die Begriffe, Form und Formal, Dunkelheit haben; und ich gestehe, daß die Ausdrücke, formaler Grundsatz, formale Wissenschaft, formaler Begriff, mir immer einiges Besinnen nöthig machen. Wenn Form in der Philosophie auch nicht vieldeutig ist, so ist es doch ein so vielbefassender Begriff, daß man Mühe hat, eine bestimmte, deutliche Vorstellung jedesmal davon zu fassen. Aber in der Mathematik ist ja Form ein ganz geläufiger, völlig bestimmter Begriff: Art der Zusammensetzung einer Größe aus andern Größen. So ist der binomische Lehrsatz die Form der Potenz einer zweytheiligen Größe, als eines Aggregats von Producten aus den Potenzen der beyden Theile der Wurzel. Die Cardanische Regel ist die Form der Wurzel einer cubischen Gleichung, sofern diese Wurzel nur eine einzige ist; und enthält auch drey mögliche Wurzeln in einer unmöglichen Form verhüllt. Form einer Reihe, Form der Glieder einer Reihe, sind gewöhnliche Ausdrücke. Ja die ganze Mathematik, auf das Kürzeste und treffendste erklärt, ist Wissenschaft der Formen der Größen. Form ist der Begriff, wodurch Mathematik möglich ist. Die formlose Größe gehört der Metaphysik zu.

In meinem Beweise habe ich ausdrücklich die Erklärung mit einfließen lassen: „Die Formen der α, β, γ, etc sind „dieselben mit den Formen der a, b, c, etc; das heißt, jene werden aus a, b, c . . . und dem Exponenten m, auf „eine ähnliche Art bestimmt, als wie a, b, c . . . auf „α, β, γ . . . und dem Exponenten n." Gleich darauf erkläre ich noch für einen bestimmten Fall, was es heiße, einerley Form haben.

Eine Form kann ſchwer zu faſſen ſeyn, wie z. B. die Form des polynomiſchen Satzes, allein der Erweis von der Uebereinſtimmung der Formen wird durch die verwickelte Beſchaffenheit derſelben nicht erſchwert oder unſicher.

Der von mir vorgetragene Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für bejahte gebrochne Exponenten [a]) beruht auf dem Princip der Aehnlichkeit, wenn ich mich des jetzt von den Philoſophen häufig gebrauchten Ausdrucks, Princip, bedienen darf, oder deutlicher, es kommt bey dieſem Beweiſe alles auf Aehnlichkeit, nicht auf Gleichheit an. Iſt die Aehnlichkeit der Functionen erwieſen, ſo iſt der Satz ſtreng mathematiſch erwieſen. Das von mir angewandte Verfahren iſt in dem Geiſte der Geometrie, die häufig Uebereinſtimmung der Form, ohne Gleichheit der Größe, darlegt, dagegen in der Analyſis faſt immer Verſchiedenheit der Form, bey Gleichheit der Größe, dargethan wird. Daher kann meine Schlußart überraſchend ſcheinen, wie ſie es dem Recenſenten in der A. L. Z. geweſen iſt. Euler nennt es ſchon ein ratiocinium non vulgare, daß bey der Multiplication von $1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.m-1}{1.2}x^2+$ etc. durch $1+\frac{n}{1}.x+\frac{n.n-1}{1.2}x^2+$ etc. die ratio compoſitionis (d. i. Form) der Coefficienten in dem Producte nicht von der Beſchaffenheit der Größen, m, n, abhange, ſie mögen gan-

a) Der Beweis des Lehrſatzes für negative ganze Exponenten, in der Sammlung von Abhandlungen §. 18. S. 71, iſt weſentlich derſelbe mit dem, welchen ich in dem Anhange zu meiner analytiſchen Trigonometrie, 1770, für den binomiſchen Lehrſatz vorgetragen habe. Aber der Beweis für bejahte gebrochne Exponenten iſt ganz anders gefaßt, als der a. a. O. für den binomiſchen Lehrſatz, welches der Herr Verf. der Recenſion, der des ältern Beweiſes gedenkt, nicht bemerkt zu haben ſcheint.

ge oder irgend andere Zahlen bedeuten: De theoremate binomiali §. 6. Comm. Petrop. novi. T. XIX. a. a. 1774.

Bey dem Beweise der Form des polynomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, weiß ich keine Schwierigkeit zu erdenken. Es wird dabey nur, wie bey dem Beweise für gebrochne Exponenten, der Satz als bekannt und erwiesen vorausgesetzt, daß zwey gleiche Functionen von einer veränderlichen z, die von den unveränderlichen Größen in denselben unabhängig ist, auch identisch sind, das heißt, daß die zu derselben Potenz von z gehörigen Coefficienten einander gleich sind [b]). Aus den Gleichungen für die Coefficienten in dem Quotienten zweyer Potentialgrößen lassen diese Coefficienten sich durch die gewöhnliche Buchstabenrechnung finden. Die Rechnung aber würde weitläufig werden, und nur eine Induction gewähren. Darum muß man sie entbehrlich zu machen suchen, welches auf eine völlig einleuchtende Art in §. 18. geschehen ist.

Dieser leichte Fall mag aber dienen es deutlich zu machen, wie man aus der Aehnlichkeit der Größen, wodurch andere bestimmt werden, die Form der letztern herleiten könne. Es sey

$$\frac{(a+bz+cz^2+\text{etc})^p}{(a+bz+cz^2+\text{etc})^q} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$$

und p sowohl als q ganze positive Zahlen. Man setze

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^q = \alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc}$$

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^p = \alpha'+\beta' z+\gamma' z^2+\delta' z^3+\text{etc}$$

b) In Kästners Analysis endlicher Größen §. 624 der 3ten Au sind zweyerley Beweise dieses Satzes gegeben.

wo α, β, γ, etc; α', β', γ', etc durch den polynomischen Lehrsatz gegeben werden. Nun ist

$$\begin{aligned} &A\alpha + B\alpha.\, z + C\alpha.\, z^2 + D\alpha.\, z^3 + \text{etc} \\ &\quad + A\beta.\, z + B\beta.\, z + C\beta.\, z \\ &\qquad + A\gamma.\, z + B\gamma.\, z \\ &\qquad\quad + A\delta.\, z \\ &= \alpha' + \beta' z + \gamma' z^2 + \delta' z^3 + \text{etc} \end{aligned}$$

Die Coefficienten, die in beyden Theilen der Gleichung zu einerley Potenz von z gehören, sind gleich, daher A, B, C etc, aus den Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc bestimmt werden.

Die Größen α, β, γ etc sind denen α', β' γ' etc ähnlich, das heißt, jene werden aus a, b, c etc und q, eben so zusammengesetzt, als wie diese aus a, b, c etc und p. Wird nun der obige Bruch umgekehrt, so werden in den Werthen von A, B, C etc die Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc gegenseitig vertauscht. Da diese sich ähnlich, und bloß durch die Werthe von q und p verschieden sind, so sind die Coefficienten A, B, C etc in dem Werthe des gegebenen und des umgekehrten Bruchs auch nur allein durch die Vertauschung von p und q verschieden. Also hat $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{p-q}$ einerley Form mit $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{q-p}$; oder $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^m$ hat dieselbe Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^{-m}$.

Dieser Beweis des polynomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten ist dem in §. 18. S. 71 der Sammlung ꝛc. aus dem Grunde vorzuziehen, weil er mit dem Beweise für gebrochene positive Exponenten gleichartig ist. Wer die hier gebrauchte Schlußart noch nicht einleuchtend findet, der stelle die Coefficienten A, B, C, D etc nur

involutorisch hin, z. B, $D = \frac{\delta'}{\alpha} - \frac{C\beta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} - \frac{A\delta}{\alpha}$,

und bezeichne die Coefficienten für den Quotienten aus dem umgekehrten Bruche durch A', B', C', D' etc so ist

$D' = \frac{\delta}{\alpha'} - \frac{C'\beta'}{\alpha'} - \frac{B'\gamma'}{\alpha'} - \frac{A'\delta'}{\alpha'}$. In diesem Coeffi-

cienten und in D sind die gestrichelten und ungestrichelten Coefficienten aus beyden Potentialgrößen gegenseitig vertauscht; beyde sind also nur durch die Vertauschung der Exponenten p und q verschieden.

An dem Beweise des polynomischen Lehrsatzes für bejahte gebrochne Exponenten finde ich nichts wesentliches zu ändern. Inzwischen will ich ihn mit einigen kleinen Erweiterungen des Vortrags wiederholen, wenn vielleicht bey dem Bestreben nach Kürze gerade etwas ausgelassen seyn sollte, was einem andern nöthig ist, um den rechten Gesichtspunct zu treffen.

Die Potentialgröße $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^m$ läßt sich in eine andere $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc})^n$ verwandeln, wenn m und n ganze Zahlen sind, wie hier noch angenommen werden muß. Denn jede dieser Potentialgrößen verwandle man in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe, zufolge des polynomischen Lehrsatzes für ganze bejahte Exponenten. Setzt man die Coefficienten derselben Potenz in beyden Reihen sich gleich, so sind die beyden Reihen, also auch die Potenzialgrößen gleich. Die particularen Gleichungen sind

$$a^m = \alpha^n$$

$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}b = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\beta$$

$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}c + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\gamma + {}^n\mathfrak{B}\alpha^{n-2}\beta^2$$

u. ſ. w.

Hieraus läßt ſich die Potenzialgröße $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$ durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe darſtellen; allein das Geſetz der Coefficienten würde nur auf einer Induction beruhen. Darum iſt es auch hier nöthig, dieſe nicht genugthuende Rechnung zu vermeiden. Inzwiſchen iſt es nützlich, die erſtern Glieder jener Größe zu berechnen, um das hier gebrauchte Verfahren ſich deutlicher zu machen.

Die Formen der Coefficienten α, β, γ etc ſind dieſelben mit den Formen der Coefficienten a, b, c etc, nach der vorher gegebenen Erklärung dieſes Ausdrucks, wie es die Gleichungen zur wechſelſeitigen Beſtimmung dieſer Größen zeigen. Oder, die Größen α, β, γ etc und a, b, c etc ſind, in ihrer Folge genommen, ſich **analytiſch ähnlich**. Alſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$, einerley Form mit $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, folglich auch mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, wenn man nämlich nur auf die Art der Zuſammenſetzung, nicht auf die Quantität, das iſt, wenn man bloß auf die analytiſche Aehnlichkeit ſieht. Beyde Functionen von z, nämlich die erſte und dritte, entwickelt, unterſcheiden ſich nur dadurch, daß in den Coefficienten und Exponenten von a die Größen m und n mit einander vertauſcht ſind. Setzt man $n = 1$, ſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^m$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{1}{m}}$, die Potenz mit der Wurzel.

Die erſtere ſey $= A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc}.$

die zweyte $= A'+B'z+C'z^2+D'z^3+\text{etc}.$

so sind die Coefficienten derselben Potenz sich ähnlich, und nur durch die Größen m und $\frac{1}{m}$, welche mit einander vertauscht sind, verschieden. Erhebt man beyde Functionen auf dieselbe Potenz mit dem ganzen Exponenten p, so sind die Coefficienten der entwickelten Potenz $(A+Bz+Cz^2+\text{etc})^p$ und $(A'+B'z+C'z^2+\text{etc})^p$ nur durch die gegenseitig verwechselten Größen m und $\frac{1}{m}$ verschieden. Also hat

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{mp}$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$, so daß in den entwickelten Potenzialgrößen, in dieser $\frac{p}{m}$ steht, wo in jener mp sich findet. Setzt man statt mp irgend eine andere ganze Zahl r, so wird zwar die Größe, aber nicht die Form geändert, und es hat folglich

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^r$ einerley Form mit

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{r}{m}}$.

Der Beweis für negative gebrochne Exponenten, bleibt so wie er in §. 20 meines Aufsatzes gegeben ist.

Ein paar Erläuterungen über die beyden Formeln des polynomischen Lehrsatzes mögen bey dieser Gelegenheit noch Platz finden.

Die Formel für $(a+b+c+d+\text{etc})^m$, wo m eine ganze bejahte Zahl ist, in §. 16. S. 67 meines Aufsatzes in der ersten Sammlung, bricht ab, wenn der Exponent von a Null ist. Das Glied, worin a^o der Factor ist, enthält alle Partialproducte von m Factoren, unter welchen kein a vorkommt. Alle übrigen Partialproducte, die a enthalten, sind unter den vorhergehenden Gliedern der Formel befindlich

in dem erſten Gliede der Formel, a^m; in dem zweyten diejenigen, welche a^{m-1} enthalten; und ſo ferner, bis auf das vorletzte, worinn a mit $m-1$ Factoren aus der Reihe, b, c, d etc befindlich iſt.

Das Polynomium ſey $a+bz+cz^2 \ldots + kz^r = Z$. Wird dieſes auf die mte Potenz erhoben, ſo iſt die höchſte Potenz von z in derſelben, die mit dem Exponenten mr, und die Reihe bricht mit dem $(mr+1)$ten Gliede ab. Ein Glied dieſer Reihe ſey Lz^λ. Es enthält L alle die Partialproducte von m Factoren aus den Größen a, b, c etc, in welchen die Summe der Abſtände von a dem Exponenten λ gleich iſt, wobey alſo für a ſelbſt der Abſtand als Null gerechnet wird. Je weniger Factoren aus der Reihe b, c, d .... k genommen werden, deſto entferntere müſſen es ſeyn, um die Summe der Abſtände voll und ſo groß als die Zahl λ zu machen. Iſt $\lambda < r$, und bezeichnet man den Coefficienten von z^λ in Z durch $\varkappa(\lambda+1)$, ſo iſt das erſte Glied von $L = \mathfrak{A}a^{m-\lambda}.\varkappa(\lambda+1)$. Das letzte Glied iſt $\mathfrak{A}^{\lambda-1}a^{m-\lambda}b^\lambda$, wenn $m > \lambda$ iſt. Es bedeutet $\mathfrak{A}^{\lambda-1}$ den λten Binomialcoefficienten, oder den $(\lambda-1)$ten nach dem erſten $\mathfrak{A}$. Wenn man nemlich von den Größen c, d etc keine zu Factoren nimmt, ſo muß man λ Factoren b nehmen, mehr als wenn von jenen eine oder mehrere aufgenommen werden. Iſt $m < \lambda$, ſo bricht der Coefficient L mit dem Gliede ab, das den Factor a^0 hat, oder welches alle die Partialproducte befaßt, in welchen kein a als Factor vorkommt. Die Summe der Abſtände der Factoren in jedem Partialproducte von dem Anfangsgliede a kann den Exponenten m der Potenz nicht überſchreiten.

Der Fall iſt noch zu betrachten, da der Exponent r des letzten Gliedes in Z kleiner iſt als λ. Alsdann fallen vom Anfange in L eins oder mehrere Glieder weg. Iſt $\lambda > r$,

1) Für die erſte Abtheilung kommt

Die Verbindung $a^9 = a^8a$, als erſte und einzige Complexion (I)

2) Für die zweyte Abtheilung, wo $m=2$, kommen,

Die Verbindung a^7b (II, α)

und daraus a^5b^2; und daraus a^3b^3; und daraus a^1b^4 (II, β, γ)

3) Für die dritte Abtheilung, wo $m=3$, kommen,

Die Verbindungen a^6c, a^4bc, a^2b^2c, b^3c (II, α)

und daraus a^3c^2, a^1bc^2 (II, β)

und daraus c^3 (II, γ)

und ſo weiter, für die übrigen Complexionen der übrigen Abtheilungen, oder für $m=4, 5, 6, 7, 8, 9$, wie ſolche in (13) Seite 98 ſtehen.

Die letzte (hier die 9te) Abtheilung beſteht wieder, wie die erſte, nur aus einer einzigen Complexion (hier aus i, dem 9ten Buchſtaben des Zeigers)

IV.

Erläuterungen über den Beweis des polynomischen Lehrsatzes (Erste Samml. comb. anal. Abhandl. S. 68-74) von dem Verfasser des Beweises, G. S. Klügel, Professor zu Halle.

Eine Aeusserung des Recensenten gedachter Sammlung in der Allgem. Literaturzeitung 1796, No. 380 und 381, und einige mir schriftlich zugekommene Bemerkungen des Herrn Prof. Rothe in Leipzig, veranlassen mich diese Erläuterungen über den von mir gegebenen Beweis des polynomischen Lehrsatzes für jede Art von Exponenten aufzusetzen.

Die Recension der Sammlung von Abhandlungen über den polynomischen Lehrsatz in der A. L. Z. ist mit Fleiß und Einsicht gemacht; nur eine Bemerkung in derselben möchte eine Berichtigung nöthig haben. Es ist die Stelle, S. 587, wo von meinem Beweise der Allgemeinheit jenes Lehrsatzes die Rede ist. Der Recensent sagt, meine Schlußart lasse nichts zu wünschen übrig, als höchstens, daß der letzte Satz (ohne Zweifel der Schluß §. 19) mathematisch in völliger Strenge dargethan, und man gehörig versichert würde, daß nicht etwa mit dem so dunklen Begriffe von Form ein Sprung im Beweise verdeckt werde.

Der Recensent hält also die von mir gebrauchte Schlußart (Raisonnement) für mißlich, und möchte den Satz durch Formeln, welche die Gleichheit aussagen, bewiesen

haben. Sollte aber der Begriff von Form in der Mathematik so dunkel seyn, als er es hier sich vorstellt?

In der Philosophie mögen die Begriffe, Form und Formal, Dunkelheit haben; und ich gestehe, daß die Ausdrücke, formaler Grundsatz, formale Wissenschaft, formaler Begriff, mir immer einiges Besinnen nöthig machen. Wenn Form in der Philosophie auch nicht vieldeutig ist, so ist es doch ein so vielbefassender Begriff, daß man Mühe hat, eine bestimmte, deutliche Vorstellung jedesmal davon zu fassen. Aber in der Mathematik ist ja Form ein ganz geläufiger, völlig bestimmter Begriff: Art der Zusammensetzung einer Größe aus andern Größen. So ist der binomische Lehrsatz die Form der Potenz einer zweytheiligen Größe, als eines Aggregats von Producten aus den Potenzen der beyden Theile der Wurzel. Die Cardanische Regel ist die Form der Wurzel einer cubischen Gleichung, so fern diese Wurzel nur eine einzige ist; und enthält auch drey mögliche Wurzeln in einer unmöglichen Form verhüllt. Form einer Reihe, Form der Glieder einer Reihe, sind gewöhnliche Ausdrücke. Ja die ganze Mathematik, auf das Kürzeste und treffendste erklärt, ist Wissenschaft der Formen der Größen. Form ist der Begriff, wodurch Mathematik möglich ist. Die formlose Größe gehört der Metaphysik zu.

In meinem Beweise habe ich ausdrücklich die Erklärung mit einfließen lassen: „Die Formen der α, β, γ, etc sind „dieselben mit den Formen der a, b, c, etc; das heißt, jene werden aus a, b, c . . . und dem Exponenten m, auf „eine ähnliche Art bestimmt, als wie a, b, c . . . aus „α, β, γ . . . und dem Exponenten n." Gleich darauf erkläre ich noch für einen bestimmten Fall, was es heiße, einerley Form haben.

Eine Form kann schwer zu fassen seyn, wie z. B. die Form des polynomischen Satzes, allein der Erweis von der Uebereinstimmung der Formen wird durch die verwickelte Beschaffenheit derselben nicht erschwert oder unsicher.

Der von mir vorgetragene Beweis des polynomischen Lehrsatzes für bejahte gebrochne Exponenten [a]) beruht auf dem Princip der Aehnlichkeit, wenn ich mich des jetzt von den Philosophen häufig gebrauchten Ausdrucks, Princip, bedienen darf, oder deutlicher, es kommt bey diesem Beweise alles auf Aehnlichkeit, nicht auf Gleichheit an. Ist die Aehnlichkeit der Functionen erwiesen, so ist der Satz streng mathematisch erwiesen. Das von mir angewandte Verfahren ist in dem Geiste der Geometrie, die häufig Uebereinstimmung der Form, ohne Gleichheit der Größe, darlegt, dagegen in der Analysis fast immer Verschiedenheit der Form, bey Gleichheit der Größe, dargethan wird. Daher kann meine Schlußart überraschend scheinen, wie sie es dem Recensenten in der A. L. Z. gewesen ist. Euler nennt es schon ein ratiocinium non vulgare, daß bey der Multiplication von $1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.m-1}{1.2}x^2+$ etc. durch $1+\frac{n}{1}.x+\frac{n.n-1}{1.2}x^2+$ etc. die ratio compositionis (d. i. Form) der Coefficienten in dem Producte nicht von der Beschaffenheit der Größen, m, n, abhange, sie mögen gan-

a) Der Beweis des Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, in der Sammlung von Abhandlungen §. 18. S. 71, ist wesentlich derselbe mit dem, welchen ich in dem Anhange zu meiner analytischen Trigonometrie, 1770, für den binomischen Lehrsatz vorgetragen habe. Aber der Beweis für bejahte gebrochne Exponenten ist ganz anders gefaßt, als der a. a. O. für den binomischen Lehrsatz, welches der Herr Verf. der Recension, der des ältern Beweises gedenkt, nicht bemerkt zu haben scheint.

ge oder irgend andere Zahlen bedeuten: De theoremate binomiali §. 6. Comm. Petrop. novi. T. XIX. a. a. 1774.

Bey dem Beweise der Form des polynomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, weiß ich keine Schwierigkeit zu erdenken. Es wird dabey nur, wie bey dem Beweise für gebrochne Exponenten, der Satz als bekannt und erwiesen vorausgesetzt, daß zwey gleiche Functionen von einer veränderlichen z, die von den unveränderlichen Größen in denselben unabhängig ist, auch identisch sind, das heißt, daß die zu derselben Potenz von z gehörigen Coefficienten einander gleich sind b). Aus den Gleichungen für die Coefficienten in dem Quotienten zweyer Potentialgrößen lassen diese Coefficienten sich durch die gewöhnliche Buchstabenrechnung finden. Die Rechnung aber würde weitläufig werden, und nur eine Induction gewähren. Darum muß man sie entbehrlich zu machen suchen, welches auf eine völlig einleuchtende Art in §. 18. geschehen ist.

Dieser leichte Fall mag aber dienen es deutlich zu machen, wie man aus der Aehnlichkeit der Größen, wodurch andere bestimmt werden, die Form der letztern herleiten könne. Es sey

$$\frac{(a+bz+cz^2+\text{etc})^p}{(a+bz+cz^2+\text{etc})^q} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$$

und p sowohl als q ganze positive Zahlen. Man setze

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^q = \alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc}$$

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^p = \alpha'+\beta' z+\gamma' z^2+\delta' z^3+\text{etc}$$

b) In Kästners Analysis endlicher Größen §. 624 der 3ten Au sind zweyerley Beweise dieses Satzes gegeben.

wo α, β, γ, etc; α', β', γ', etc durch den polynomiſchen Lehrſatz gegeben werden. Nun iſt

$$A\alpha + B\alpha.z + C\alpha.z^2 + D\alpha.z^3 + \text{etc}$$
$$+ A\beta.z + B\beta.z + C\beta.z$$
$$+ A\gamma.z + B\gamma.z$$
$$+ A\delta.z$$
$$= \alpha' + \beta'z + \gamma'z^2 + \delta'z^3 + \text{etc}$$

Die Coefficienten, die in beyden Theilen der Gleichung zu einerley Potenz von z gehören, ſind gleich, daher A, B, C etc, aus den Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc beſtimmt werden.

Die Größen α, β, γ etc ſind denen α', β' γ' etc ähnlich, das heißt, jene werden aus a, b, c etc und q, eben ſo zuſammengeſetzt, als wie dieſe aus a, b, c etc und p. Wird nun der obige Bruch umgekehrt, ſo werden in den Werthen von A, B, C etc die Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc gegenſeitig vertauſcht. Da dieſe ſich ähnlich, und bloß durch die Werthe von q und p verſchieden ſind, ſo ſind die Coefficienten A, B, C etc in dem Werthe des gegebenen und des umgekehrten Bruchs auch nur allein durch die Vertauſchung von p und q verſchieden. Alſo hat $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{p-q}$ einerley Form mit $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{q-p}$; oder $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^m$ hat dieſelbe Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^{-m}$.

Dieſer Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für negative ganze Exponenten iſt dem in §. 18. S. 71 der Sammlung ꝛc. aus dem Grunde vorzuziehen, weil er mit dem Beweiſe für gebrochene poſitive Exponenten gleichartig iſt. Wer die hier gebrauchte Schlußart noch nicht einleuchtend findet, der ſtelle die Coefficienten A, B, C, D etc nur

involutorisch hin, z. B, $D = \frac{\delta'}{\alpha} - \frac{C\beta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} - \frac{A\delta}{\alpha}$, und bezeichne die Coefficienten für den Quotienten aus dem umgekehrten Bruche durch A′, B′, C′, D′ etc so ist $D' = \frac{\delta}{\alpha'} - \frac{C'\beta'}{\alpha'} - \frac{B'\gamma'}{\alpha'} - \frac{A'\delta'}{\alpha'}$. In diesem Coefficienten und in D sind die gestrichelten und ungestrichelten Coefficienten aus beyden Potentialgrößen gegenseitig vertauscht; beyde sind also nur durch die Vertauschung der Exponenten p und q verschieden.

An dem Beweise des polynomischen Lehrsatzes für bejahte gebrochne Exponenten finde ich nichts wesentliches zu ändern. Inzwischen will ich ihn mit einigen kleinen Erweiterungen des Vortrags wiederholen, wenn vielleicht bey dem Bestreben nach Kürze gerade etwas ausgelassen seyn sollte, was einem andern nöthig ist, um den rechten Gesichtspunct zu treffen.

Die Potentialgröße $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^m$ läßt sich in eine andere $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc})^n$ verwandeln, wenn m und n ganze Zahlen sind, wie hier noch angenommen werden muß. Denn jede dieser Potentialgrößen verwandle man in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe, zufolge des polynomischen Lehrsatzes für ganze bejahte Exponenten. Setzt man die Coefficienten derselben Potenz in beyden Reihen sich gleich, so sind die beyden Reihen, also auch die Potenzialgrößen gleich. Die particularen Gleichungen sind

$$a^m = \alpha^n$$

$${}^m\mathfrak{A}a^{m-1}b = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\beta$$

$${}^m\mathfrak{A}a^{m-1}c + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\gamma + {}^n\mathfrak{B}\alpha^{n-2}\beta^2$$

u. ſ. w.

Hieraus läßt ſich die Potenzialgröße $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$ durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe darſtellen; allein das Geſetz der Coefficienten würde nur auf einer Induction beruhen. Darum iſt es auch hier nöthig, dieſe nicht genugthuende Rechnung zu vermeiden. Inzwiſchen iſt es nützlich, die erſtern Glieder jener Größe zu berechnen, um das hier gebrauchte Verfahren ſich deutlicher zu machen.

Die Formen der Coefficienten α, β, γ etc ſind dieſelben mit den Formen der Coefficienten a, b, c etc, nach der vorher gegebenen Erklärung dieſes Ausdrucks, wie es die Gleichungen zur wechſelſeitigen Beſtimmung dieſer Größen zeigen. Oder, die Größen α, β, γ etc und a, b, c etc ſind, in ihrer Folge genommen, ſich **analytiſch ähnlich**. Alſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$, einerley Form mit $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, folglich auch mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, wenn man nämlich nur auf die Art der Zuſammenſetzung, nicht auf die Quantität, das iſt, wenn man bloß auf die analytiſche Aehnlichkeit ſieht. Beyde Functionen von z, nämlich die erſte und dritte, entwickelt, unterſcheiden ſich nur dadurch, daß in den Coefficienten und Exponenten von a die Größen m und n mit einander vertauſcht ſind. Setzt man $n = 1$, ſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^m$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{1}{m}}$, die Potenz mit der Wurzel.

Die erſtere ſey $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$

die zweyte $= A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + \text{etc.}$

so sind die Coefficienten derselben Potenz sich ähnlich, und nur durch die Größen m und $\frac{1}{m}$, welche mit einander vertauscht sind, verschieden. Erhebt man beyde Functionen auf dieselbe Potenz mit dem ganzen Exponenten p, so sind die Coefficienten der entwickelten Potenz $(A+Bz+Cz^2+\text{etc})^p$ und $(A'+B'z+C'z^2+\text{etc})^p$ nur durch die gegenseitig verwechselten Größen m und $\frac{1}{m}$ verschieden. Also hat

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{mp}$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$,

so daß in den entwickelten Potenzialgrößen, in dieser $\frac{p}{m}$ steht, wo in jener mp sich findet. Setzt man statt mp irgend eine andere ganze Zahl r, so wird zwar die Größe, aber nicht die Form geändert, und es hat folglich

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^r$ einerley Form mit

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$

Der Beweis für negative gebrochne Exponenten, bleibt so wie er in §. 20 meines Aufsatzes gegeben ist.

Ein paar Erläuterungen über die beyden Formeln des polynomischen Lehrsatzes mögen bey dieser Gelegenheit noch Platz finden.

Die Formel für $(a+b+c+d+\text{etc})^m$, wo m eine ganze bejahte Zahl ist, in §. 16. S. 67 meines Aufsatzes in der ersten Sammlung, bricht ab, wenn der Exponent von a Null ist. Das Glied, worin a^0 der Factor ist, enthält alle Partialproducte von m Factoren, unter welchen kein a vorkommt. Alle übrigen Partialproducte, die a enthalten, sind unter den vorhergehenden Gliedern der Formel befindlich

in dem erſten Gliede der Formel, a^m; in dem zweyten diejenigen, welche a^{m-1} enthalten; und ſo ferner, bis auf das vorletzte, worinn a mit $m-1$ Factoren aus der Reihe, b, c, d etc befindlich iſt.

Das Polynomium ſey $a+bz+cz^2 \ldots + kz^r = Z$. Wird dieſes auf die mte Potenz erhoben, ſo iſt die höchſte Potenz von z in derſelben, die mit dem Exponenten mr, und die Reihe bricht mit dem $(mr+1)$ten Gliede ab. Ein Glied dieſer Reihe ſey Lz^λ. Es enthält L alle die Partialproducte von m Factoren aus den Größen a, b, c etc, in welchen die Summe der Abſtände von a dem Exponenten λ gleich iſt, wobey alſo für a ſelbſt der Abſtand als Null gerechnet wird. Je weniger Factoren aus der Reihe b, c, d .... k genommen werden, deſto entferntere müſſen es ſeyn, um die Summe der Abſtände voll und ſo groß als die Zahl λ zu machen. Iſt $\lambda < r$, und bezeichnet man den Coefficienten von z^λ in Z durch $\varkappa\,(\lambda+1)$, ſo iſt das erſte Glied von $L = \mathfrak{A}a^{m-1}.\varkappa\,(\lambda+1)$. Das letzte Glied iſt $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}a^{m-\lambda}b^\lambda$, wenn $m > \lambda$ iſt. Es bedeutet $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}$ den λten Binomialcoefficienten, oder den $(\lambda-1)$ten nach dem erſten $\mathfrak{A}$. Wenn man nemlich von den Größen c, d etc keine zu Factoren nimmt, ſo muß man λ Factoren b nehmen, mehr als wenn von jenen eine oder mehrere aufgenommen werden. Iſt $m < \lambda$, ſo bricht der Coefficient L mit dem Gliede ab, das den Factor a^0 hat, oder welches alle die Partialproducte befaßt, in welchen kein a als Factor vorkommt. Die Summe der Abſtände der Factoren in jedem Partialproducte von dem Anfangsgliede a kann den Exponenten m der Potenz nicht überſchreiten.

Der Fall iſt noch zu betrachten, da der Exponent r des letzten Gliedes in Z kleiner iſt als λ. Alsdann fallen vom Anfange in L eins oder mehrere Glieder weg. Iſt $\lambda > r$,

haben. Sollte aber der Begriff von Form in der Mathematik so dunkel seyn, als er es hier sich vorstellt?

In der Philosophie mögen die Begriffe, Form und Formal, Dunkelheit haben; und ich gestehe, daß die Ausdrücke, formaler Grundsatz, formale Wissenschaft, formaler Begriff, mir immer einiges Besinnen nöthig machen. Wenn Form in der Philosophie auch nicht vieldeutig ist, so ist es doch ein so vielbefassender Begriff, daß man Mühe hat, eine bestimmte, deutliche Vorstellung jedesmal davon zu fassen. Aber in der Mathematik ist ja Form ein ganz geläufiger, völlig bestimmter Begriff: Art der Zusammensetzung einer Größe aus andern Größen. So ist der binomische Lehrsatz die Form der Potenz einer zweytheiligen Größe, als eines Aggregats von Producten aus den Potenzen der beyden Theile der Wurzel. Die Cardanische Regel ist die Form der Wurzel einer cubischen Gleichung, so fern diese Wurzel nur eine einzige ist; und enthält auch drey mögliche Wurzeln in einer unmöglichen Form verhüllt. Form einer Reihe, Form der Glieder einer Reihe, sind gewöhnliche Ausdrücke. Ja die ganze Mathematik, auf das Kürzeste und treffendste erklärt, ist Wissenschaft der Formen der Größen. Form ist der Begriff, wodurch Mathematik möglich ist. Die formlose Größe gehört der Metaphysik zu.

In meinem Beweise habe ich ausdrücklich die Erklärung mit einfließen lassen: „Die Formen der α, β, γ, etc sind „dieselben mit den Formen der a, b, c, etc; das heißt, jene werden aus a, b, c . . . und dem Exponenten m, auf „eine ähnliche Art bestimmt, als wie a, b, c . . . aus „α, β, γ . . . und dem Exponenten n." Gleich darauf erkläre ich noch für einen bestimmten Fall, was es heiße, einerley Form haben.

Eine Form kann ſchwer zu faſſen ſeyn, wie z. B. die Form des polynomiſchen Satzes, allein der Erweis von der Uebereinſtimmung der Formen wird durch die verwickelte Beſchaffenheit derſelben nicht erſchwert oder unſicher.

Der von mir vorgetragene Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für bejahte gebrochne Exponenten [a]) beruht auf dem Princip der Aehnlichkeit, wenn ich mich des jetzt von den Philoſophen häufig gebrauchten Ausdrucks, Princip, bedienen darf, oder deutlicher, es kommt bey dieſem Beweiſe alles auf Aehnlichkeit, nicht auf Gleichheit an. Iſt die Aehnlichkeit der Functionen erwieſen, ſo iſt der Satz ſtreng mathematiſch erwieſen. Das von mir angewandte Verfahren iſt in dem Geiſte der Geometrie, die häufig Uebereinſtimmung der Form, ohne Gleichheit der Größe, darlegt, dagegen in der Analyſis faſt immer Verſchiedenheit der Form, bey Gleichheit der Größe, dargethan wird. Daher kann meine Schlußart überraſchend ſcheinen, wie ſie es dem Recenſenten in der A. L. Z. geweſen iſt. Euler nennt es ſchon ein ratiocinium non vulgare, daß bey der Multiplication von $1+\frac{m}{1}.x+\frac{m.m-1}{1.2}x^2+$ etc. durch $1+\frac{n}{1}.x+\frac{n.n-1}{1.2}x^2+$ etc. die ratio compoſitionis (d. i. Form) der Coefficienten in dem Producte nicht von der Beſchaffenheit der Größen, m, n, abhange, ſie mögen gan-

a) Der Beweis des Lehrſatzes für negative ganze Exponenten, in der Sammlung von Abhandlungen §. 18. S. 71, iſt weſentlich derſelbe mit dem, welchen ich in dem Anhange zu meiner analytiſchen Trigonometrie, 1770, für den binomiſchen Lehrſatz vorgetragen habe. Aber der Beweis für bejahte gebrochne Exponenten iſt ganz anders gefaßt, als der a. a. O. für den binomiſchen Lehrſatz, welches der Herr Verf. der Recenſion, der des ältern Beweiſes gedenkt, nicht bemerkt zu haben ſcheint.

ge oder irgend andere Zahlen bedeuten: De theoremate binomiali §. 6. Comm. Petrop. novi. T. XIX. a. a. 1774.

Bey dem Beweise der Form des polynomischen Lehrsatzes für negative ganze Exponenten, weiß ich keine Schwierigkeit zu erdenken. Es wird dabey nur, wie bey dem Beweise für gebrochne Exponenten, der Satz als bekannt und erwiesen vorausgesetzt, daß zwey gleiche Functionen von einer veränderlichen z, die von den unveränderlichen Größen in denselben unabhängig ist, auch identisch sind, das heißt, daß die zu derselben Potenz von z gehörigen Coefficienten einander gleich sind [b]). Aus den Gleichungen für die Coefficienten in dem Quotienten zweyer Potentialgrößen lassen diese Coefficienten sich durch die gewöhnliche Buchstabenrechnung finden. Die Rechnung aber würde weitläufig werden, und nur eine Induction gewähren. Darum muß man sie entbehrlich zu machen suchen, welches auf eine völlig einleuchtende Art in §. 18. geschehen ist.

Dieser leichte Fall mag aber dienen es deutlich zu machen, wie man aus der Aehnlichkeit der Größen, wodurch andere bestimmt werden, die Form der letztern herleiten könne. Es sey

$$\frac{(a+bz+cz^2+\text{etc})^p}{(a+bz+cz^2+\text{etc})^q} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$$

und p sowohl als q ganze positive Zahlen. Man setze

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^q = \alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc}$$

$$(a+bz+cz^2+\text{etc})^p = \alpha'+\beta' z+\gamma' z^2+\delta' z^3+\text{etc}$$

b) In Kästners Analysis endlicher Größen §. 624 der 3ten Aufl. sind zweyerley Beweise dieses Satzes gegeben.

wo α, β, γ, etc; α', β', γ', etc durch den polynomiſchen Lehrſatz gegeben werden. Nun iſt

$$\begin{aligned} &A\alpha + B\alpha.z + C\alpha.z^2 + D\alpha.z^3 + \text{etc} \\ &\quad + A\beta.z + B\beta.z + C\beta.z \\ &\quad\quad + A\gamma.z + B\gamma.z \\ &\quad\quad\quad + A\delta.z \\ &= \alpha' + \beta'z + \gamma'z^2 + \delta'z^3 + \text{etc} \end{aligned}$$

Die Coefficienten, die in beyden Theilen der Gleichung zu einerley Potenz von z gehören, ſind gleich, daher A, B, C etc, aus den Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc beſtimmt werden.

Die Größen α, β, γ etc ſind denen α', β' γ' etc ähnlich, das heißt, jene werden aus a, b, c etc und q, eben ſo zuſammengeſetzt, als wie dieſe aus a, b, c etc und p. Wird nun der obige Bruch umgekehrt, ſo werden in den Werthen von A, B, C etc die Größen α, β, γ etc und α', β', γ' etc gegenſeitig vertauſcht. Da dieſe ſich ähnlich, und bloß durch die Werthe von q und p verſchieden ſind, ſo ſind die Coefficienten A, B, C etc in dem Werthe des gegebenen und des umgekehrten Bruchs auch nur allein durch die Vertauſchung von p und q verſchieden. Alſo hat $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{p-q}$ einerley Form mit $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc})^{q-p}$; oder $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^m$ hat dieſelbe Form mit $(a + bz + cz^2 + \text{etc})^{-m}$.

Dieſer Beweis des polynomiſchen Lehrſatzes für negative ganze Exponenten iſt dem in §. 18. S. 71 der Sammlung ꝛc. aus dem Grunde vorzuziehen, weil er mit dem Beweiſe für gebrochene poſitive Exponenten gleichartig iſt. Wer die hier gebrauchte Schlußart noch nicht einleuchtend findet, der ſtelle die Coefficienten A, B, C, D etc nur

involutorisch hin, z. B. $D = \frac{\delta'}{\alpha} - \frac{C\beta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} - \frac{A\delta}{\alpha}$, und bezeichne die Coefficienten für den Quotienten aus dem umgekehrten Bruche durch A′, B′, C′, D′ etc so ist $D' = \frac{\delta}{\alpha'} - \frac{C'\beta'}{\alpha'} - \frac{B'\gamma'}{\alpha'} - \frac{A'\delta'}{\alpha'}$. In diesem Coefficienten und in D sind die gestrichelten und ungestrichelten Coefficienten aus beyden Potentialgrößen gegenseitig vertauscht; beyde sind also nur durch die Vertauschung der Exponenten p und q verschieden.

An dem Beweise des polynomischen Lehrsatzes für bejahte gebrochne Exponenten finde ich nichts wesentliches zu ändern. Inzwischen will ich ihn mit einigen kleinen Erweiterungen des Vortrags wiederholen, wenn vielleicht bey dem Bestreben nach Kürze gerade etwas ausgelassen seyn sollte, was einem andern nöthig ist, um den rechten Gesichtspunct zu treffen.

Die Potentialgröße $(a+bz+cz^2+dz^3+\text{etc})^m$ läßt sich in eine andere $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\text{etc})^n$ verwandeln, wenn m und n ganze Zahlen sind, wie hier noch angenommen werden muß. Denn jede dieser Potentialgrößen verwandle man in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe, zufolge des polynomischen Lehrsatzes für ganze bejahte Exponenten. Setzt man die Coefficienten derselben Potenz in beyden Reihen sich gleich, so sind die beyden Reihen, also auch die Potenzialgrößen gleich. Die particularen Gleichungen sind

$$a^m = \alpha^n$$

$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}b = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\beta$$

$$^m\mathfrak{A}a^{m-1}c + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}b^2 = {}^n\mathfrak{A}\alpha^{n-1}\gamma + {}^n\mathfrak{B}\alpha^{n-2}\beta^2$$

u. ſ. w.

Hieraus läßt ſich die Potenzialgröße $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$ durch eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe darſtellen; allein das Geſetz der Coefficienten würde nur auf einer Induction beruhen. Darum iſt es auch hier nöthig, dieſe nicht genugthuende Rechnung zu vermeiden. Inzwiſchen iſt es nützlich, die erſtern Glieder jener Größe zu berechnen, um das hier gebrauchte Verfahren ſich deutlicher zu machen.

Die Formen der Coefficienten α, β, γ etc ſind dieſelben mit den Formen der Coefficienten a, b, c etc, nach der vorher gegebenen Erklärung dieſes Ausdrucks, wie es die Gleichungen zur wechſelſeitigen Beſtimmung dieſer Größen zeigen. Oder, die Größen α, β, γ etc und a, b, c etc ſind, in ihrer Folge genommen, ſich **analytiſch ähnlich**. Alſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{m}{n}}$, einerley Form mit $(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, folglich auch mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{n}{m}}$, wenn man nämlich nur auf die Art der Zuſammenſetzung, nicht auf die Quantität, das iſt, wenn man bloß auf die analytiſche Aehnlichkeit ſieht. Beyde Functionen von z, nämlich die erſte und dritte, entwickelt, unterſcheiden ſich nur dadurch, daß in den Coefficienten und Exponenten von a die Größen m und n mit einander vertauſcht ſind. Setzt man $n = 1$, ſo hat $(a+bz+cz^2+\text{etc})^m$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{1}{m}}$, die Potenz mit der Wurzel.

Die erſtere ſey $= A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc}.$

die zweyte $= A'+B'z+C'z^2+D'z^3+\text{etc}.$

so sind die Coefficienten derselben Potenz sich ähnlich, und nur durch die Größen m und $\frac{1}{m}$, welche mit einander vertauscht sind, verschieden. Erhebt man beyde Functionen auf dieselbe Potenz mit dem ganzen Exponenten p, so sind die Coefficienten der entwickelten Potenz $(A+Bz+Cz^2+\text{etc})^p$ und $(A'+B'z+C'z^2+\text{etc})^p$ nur durch die gegenseitig verwechselten Größen m und $\frac{1}{m}$ verschieden. Also hat

$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{mp}$ einerley Form mit $(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$, so daß in den entwickelten Potenzialgrößen, in dieser $\frac{p}{m}$ steht, wo in jener mp sich findet. Setzt man statt mp irgend eine andere ganze Zahl r, so wird zwar die Größe, aber nicht die Form geändert, und es hat folglich
$(a+bz+cz^2+\text{etc})^r$ einerley Form mit
$(a+bz+cz^2+\text{etc})^{\frac{p}{m}}$

Der Beweis für negative gebrochne Exponenten, bleibt so wie er in §. 20 meines Aufsatzes gegeben ist.

Ein paar Erläuterungen über die beyden Formeln des polynomischen Lehrsatzes mögen bey dieser Gelegenheit noch Platz finden.

Die Formel für $(a+b+c+d+\text{etc})^m$, wo m eine ganze bejahte Zahl ist, in §. 16. S. 67 meines Aufsatzes in der ersten Sammlung, bricht ab, wenn der Exponent von a Null ist. Das Glied, worin a^0 der Factor ist, enthält alle Partialproducte von m Factoren, unter welchen kein a vorkommt. Alle übrigen Partialproducte, die a enthalten, sind unter den vorhergehenden Gliedern der Formel befindlich,

in dem erſten Gliede der Formel, a^m; in dem zweyten diejenigen, welche a^{m-1} enthalten; und ſo ferner, bis auf das vorletzte, worinn a mit $m-1$ Factoren aus der Reihe, b, c, d etc befindlich iſt.

Das Polynomium ſey $a+bz+cz^2 \ldots + kz^r = Z$. Wird dieſes auf die mte Potenz erhoben, ſo iſt die höchſte Potenz von z in derſelben, die mit dem Exponenten mr, und die Reihe bricht mit dem $(mr+1)$ten Gliede ab. Ein Glied dieſer Reihe ſey Lz^λ. Es enthält L alle die Partialproducte von m Factoren aus den Größen a, b, c etc, in welchen die Summe der Abſtände von a dem Exponenten λ gleich iſt, wobey alſo für a ſelbſt der Abſtand als Null gerechnet wird. Je weniger Factoren aus der Reihe b, c, d .... k genommen werden, deſto entferntere müſſen es ſeyn, um die Summe der Abſtände voll und ſo groß als die Zahl λ zu machen. Iſt $\lambda < r$, und bezeichnet man den Coefficienten von z^λ in Z durch $\varkappa(\lambda+1)$, ſo iſt das erſte Glied von $L = \mathfrak{A}a^{m-1}.\varkappa(\lambda+1)$. Das letzte Glied iſt $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}a^{m-\lambda}b^\lambda$, wenn $m > \lambda$ iſt. Es bedeutet $\overset{\lambda-1}{\mathfrak{A}}$ den λten Binomialcoefficienten, oder den $(\lambda-1)$ten nach dem erſten $\mathfrak{A}$. Wenn man nemlich von den Größen c, d etc keine zu Factoren nimmt, ſo muß man λ Factoren b nehmen, mehr als wenn von jenen eine oder mehrere aufgenommen werden. Iſt $m < \lambda$, ſo bricht der Coefficient L mit dem Gliede ab, das den Factor a^0 hat, oder welches alle die Partialproducte befaßt, in welchen kein a als Factor vorkommt. Die Summe der Abſtände der Factoren in jedem Partialproducte von dem Anfangsgliede a kann den Exponenten m der Potenz nicht überſchreiten.

Der Fall iſt noch zu betrachten, da der Exponent r des letzten Gliedes in Z kleiner iſt als λ. Alsdann fallen vom Anfange in L eins oder mehrere Glieder weg. Iſt $\lambda > r$,

so fehlt wenigstens das erste Glied in L. In dem zweyten Gliede bestehen die Producte aus $m-2$ Factoren a, und den Größen b, c ... k. Die dazu gehörige Potenz von z ist, wenn sie am niedrigsten ist, z^2, am höchsten, z^{2r}. Ist nun $\lambda > 2r$, so fehlt das zweyte Glied von L. Auf eine ähnliche Art erhellt, daß das dritte Glied von L fehlt, wenn $\lambda > 3r$ ist; das vierte, wenn $\lambda > 4r$ ist. u. s. w.

V.

Localformeln für höhere Differentiale; von J. F. Pfaff Professor der Mathematik zu Helmstädt. a)

— — Leges, quae in differentialibus omnium ordinum obſervantur, per ſe ſunt notatu digniſſimae, atque ad alias inventiones deducere poſſunt (L. Euler Inſtitt. Calc. Diff. P. I. Cap. V. §. 177.)

§. 1. Satz.

Es ist $d^n(z^m) = 1.2.3..n.\,p^m n(n+1)$;

für die Scale:

$$p\left(z, \frac{dz}{1}, \frac{d^2z}{1.2}, \frac{d^3z}{1.2.3}, \ldots\right)$$ b)

a) Ich erhielt diesen lehrreichen Aufsatz gegen das Ende des Jahres 1796, also für die erste Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen zu spät; er folgt also nun in der zweyten Sammlung. H.

b) Die Bedeutung der hier gebrauchten Zeichen und Worte setze ich hier, als bereits hinlänglich bekannt, voraus.

Beweis. 1) Für $n=1$ ist der Satz einleuchtend, da $p^m\varkappa 2 = mz^{m-1}dz = d(z^m)$.

2) Nun ist $d^n(z^{m+1}) = d^{n-1}(dz^{m+1})$
$= (m+1)\,d^{n-1}(z^m dz)$. Sieht man hier z^{m+1} und $z^m dz$ als Producte von z^m in z und dz an, und differentiirt solche nach der bekannten Regel, so wird

$$zd^nz^m + ndzd^{n-1}z^m + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2zd^{n-2}z^m$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3zd^{n-3}z^m + \ldots = (m+1)dzd^{n-1}z^m$$
$$+ (m+1)(n-1)d^2zd^{n-2}z^m + (m+1)\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}d^3zd^{n-3}z^m + \ldots,$$

oder $zd^nz^m = (m+1-n)\,dzd^{n-1}z^m$
$$+ \frac{(n-1)}{1.2}(2m+2-n)\,d^2zd^{n-2}z^m$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}(3m+3-n)\,d^3zd^{n-3}z^m + \ldots.$$

Vermittelst dieser Gleichung wird das nte Differential von z^m auf alle vorhergehende reducirt [c]).

3) Gilt nun der Satz für $d^{n-1}z^m$, $d^{n-2}z^m$, $\ldots$ dz^m, und werden demselben gemäß diese Differentialien ausgedrückt, so ergiebt sich

$$\frac{zd^nz^m}{1.2\ldots n-1} = (m+1-n)\,p\varkappa 2.p^m\varkappa n + (2m+2-n)\,p\varkappa 3.p^m\varkappa(n-1)$$
$$+ (3m+3-n)\,p\varkappa 4.p^m\varkappa(n-2) + \ldots.$$

c) Diese Gleichung enthält also für die höhern Differentiale von z^m eine recurrirende Formel, welche auch neben der im Satze ausgedrückten sogenannten independenten, ihren Nutzen hat.

Was rechter Hand des Gleichheitszeichens steht, ist nach der bekannten in Localzeichen ausgedrückten Formel für das Instaitinomium, $= np \times 1.p^m \times (n+1)$ [d]; also wird $\frac{d^n z^m}{1.2..n} = p^m \times (n+1)$, d. i, der Satz gilt auch für n, folglich allgemein [e].

§. 2. Satz. Für eine beliebige Anzahl von Größen, u, v . . w, x, ist

$$\frac{d^n (u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma x^\delta)}{1.2.3..n} = (p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma s^\delta) \times (n+1),$$

für die Scalen:

$$p\left(u, du, \frac{d^2u}{1.2}, \frac{d^3u}{1.2.3}, \ldots\right)$$

$$q\left(v, dv, \frac{d^2v}{1.2}, \frac{d^3v}{1.2.3}, \ldots\right)$$

d) Kästners Analys. d. Unendl. §. 56. XI; C. S. c. a. A. S. 291.

e) Das ist wieder ein Beyspiel, da man, anstatt, wie in dem bekannten Schlusse geschieht, einen Satz für n anzunehmen, solchen bis n annehmen muß. Vergl. C. S. c. a. A. S. 145. In jenem Schlusse sind die Prämissen einfach, hier sind sie zusammengesetzt, nehmlich aus so viel einzelnen Sätzen, als n Einheiten enthält. Die Conclusion geht beydemal auf n+1. Daher auch in dieser Form, der Schlußart die Benennung zukäme, welche ihr Oechliz beylegte (Kästner über die geometrische Axiome; in Eberhards philosoph. Magaz. II. B. 4 St.) Durch einen Druckfehler steht dort (S. 428) Orchliz. Ohne Zweifel ist aber die hier gewählte Lesart die richtige Oechlizens Namen haben einige vortreffliche Aufsätze, und noch mehr, sein Freund, erhalten. (Hamburg. Magaz. XVII. B)

$$r\left(w,\ dw,\ \frac{d^2w}{1.2},\ \frac{d^3w}{1.2.3},\ \ldots\right)$$
$$s\left(x,\ dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right)$$

Beweis. Sieht man den letzten Factor x^δ als den zweyten, und alle vorhergehende zusammen als den ersten an, so ist

$$d^n(u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma . x^\delta) = u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma . d^n x^\delta$$
$$+ nd(u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma) d^{n-1}x^\delta + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2(u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma) d^{n-2}x^\delta + \ldots +$$

Gilt nun der Satz für das Product $u^\alpha v^\beta \ldots w^\gamma$, so wird jenes nte Differential, mit Zuziehung des ersten Satzes (§. 1.),

$$= 1,.n \left\{ \begin{array}{l} (p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma) \varkappa 1 . s^\delta \varkappa (n+1) + (p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma) \varkappa 2 . s^\delta \varkappa (n) \\ + (p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma) \varkappa 3\ s^\delta \varkappa (n-1) + \ldots \end{array} \right\}$$
$$= 1.2 \ldots n, (p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma . s^\delta) \varkappa (n+1),$$

nach der bekannten Localformel für Producte von Reihen. So kann man demnach von den vorhergehenden Factoren auf jeden folgenden schließen, und da der Satz für einen gilt (§. 1), so gilt er allgemein.

§. 3. **Anmerkung.** Diese allgemeine Formel (§. 2) hat Herr Prof. Rothe aus dem Tayloriſchen Satze abgeleitet (Math. Archiv. II. Hft. S. 230; die dortigen Buchſtaben ſind zur Vergleichung auch hier beybehalten). Einen andern Beweis aufzuſuchen, veranlaßte mich folgende Betrachtung. In dem Tayloriſchen Satze wird 1) ein Differential (dz, l. c) als beſtändig vorausgeſetzt; 2) werden die Größen u, v, . . . w, x, angenommen als Functionen einer Größe z, wodurch ſie auch Functionen von einander

ſelbſt werden. Nun gilt aber der Satz (2) allgemein, ohne Rückſicht auf irgend ein beſtändiges Differential, und wenn auch die Größen u, v, . . . w, x, von einander ganz unabhängig ſind. Es iſt zwar wahr, theils, daß das Verhalten jener Größen gegen z, alſo auch unter ſich, unbeſtimmt gelaſſen wird, theils, daß, wo höhere Differentiale in der Anwendung vorkommen, irgend ein beſtändiges zum Grunde liegt. Indeſſen läßt ſich das Differentiiren auch bloß als eine nach den Regeln eines eigenen Algorithmus anzuſtellende analytiſche Operation betrachten, wobey man an die Bedeutung, wie Anwendungen, z. B. geometriſche, mechaniſche, ſie erfordern, nicht zu denken hat [f]). Aus dieſem nicht unfruchtbaren, und auch ſchon von Leibniz gefaßten Geſichtspuncte, ſchien es mir nicht überflüſſig, den Satz (3) allein aus den Grundregeln des Differentiirens, in Verbindung mit den Fundamentalſätzen von Reihenpotenzen und Producten, herzuleiten.

§. 4. Aufgabe. X ſey irgend eine Function von x, aus ihren Differentialien, wenn dx beſtändig iſt, dieſelbigen herzuleiten, wenn kein beſtändiges Differential angenommen wird.

Auflöſung. 1) Es werde jede Function von x durch folgende Reihe ausgedrückt:

f) Es würde ein großes Misverſtändnis ſeyn, wenn man in dieſer Behauptung eine Empfehlung des blos maſchinenmäßigen Rechnens fände, oder bey dem Vortrag der Gründe der Differenzialrechnung, von der hier erwähnten Vorſtellungsart ausgehen wollte, und nicht vielmehr ſolche Begriffe vom Unendlichen, von Gränzen u. ſ. w., zum Grunde legte, dergleichen insbeſondere aus H. HR. Käſtners Schriften hinlänglich bekannt ſind. Ein neues Werk hierüber von H. L'Huilier (Princ. Calc. Diff. et Int. Expoſ. elem.) iſt als ein Muſter ächter geometriſcher Schärfe und Methode, auf Analyſis angewandt, zum Studium vorzüglich zu empfehlen.

$$X = ax^{\alpha} + a'x^{\alpha+\beta} + a''x^{\alpha+2\beta} + \ldots.$$

ſo iſt $d^nX = ad^n(x^{\alpha}) + a'd^n(x^{\alpha+\beta}) + a''d^n(x^{\alpha+2\beta}) + \text{etc.}$,

oder nach (§. 1),

$$= 1.2..n\,(ap^{\alpha}\varkappa(n+1) + a'p^{\alpha+\beta}\varkappa(n+1) + a''p^{\alpha+2\beta}\varkappa(n+1) + \text{etc.}$$

für die Scale

$$P\left(x, \frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$$

2) Nun nehme man folgende andere Scale an:

$$P\left(\frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$$

ſo iſt, für jeden Exponenten r,

$$p^r\varkappa(n+1) = rx^{r-1}P\varkappa n + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \ldots. \quad g)$$

Vermittelſt dieſer Formel läßt ſich jedes Glied der Reihe für d^nX (1) in mehrere auflöſen; ordnet man nun nach dieſer Verwandlung diejenigen Glieder zuſammen, worinn einerley Potenz von P vorkommt, ſo laſſen ſich dieſe Glieder für ſich ſummiren, und ſo ergiebt ſich die Summe jener Reihe, durch ein Verfahren, demjenigen ähnlich, deſſen Anwendungen bey Summationen ich anderswo zu entwickeln verſucht habe.

g) Unter Annahme der beyden Scalen $p(a, b, c, d\ldots)$; $P(b, c, d\ldots)$ iſt immer $p^r\varkappa(n+1) = \overset{r}{\mathfrak{A}}a^{r-1}P\varkappa n + \overset{r}{\mathfrak{B}}a^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \overset{r}{\mathfrak{C}}a^{r-3}P^3\varkappa(n-2) + \ldots$ Dieſe Relation folgt ſogleich aus der Localformel für das Polynomium (E. S. 6. a. A. S. 13. Anm. k).

3) Es wird nehmlich $\frac{d^nX}{1.2..n} =$

$$a\alpha x^{\alpha-1}\left\{P_{xn} + a\alpha\frac{(\alpha-1)}{1.2}x^{\alpha-2} + a'\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2}x^{\alpha+\beta-2} + a''\frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)}{1.2}(x^{\alpha+2\beta-2} + \ldots\right\} P^2x(n-1) + \ldots$$
$$+a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}$$
$$+a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1}$$
$$+\ldots$$

Nun ist $a\alpha x^{\alpha-1} + a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}$

$$+a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1}+\ldots = \frac{dX}{dx},$$

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+a'(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}$$

$$+a''(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)x^{\alpha+2\beta-2}+\ldots = \frac{d^2X}{dx^2}$$

das Differential dx als beständig angenommen. Setzt man diese Differentiation fort, und bezeichnet das erste, zweyte ... nte Differentialverhältniß von X, für ein beständiges dx, durch X', X'', .. X''', so erhält man

$$\frac{d^nX}{1.2..n} = X'.P_{xn} + \frac{X''}{1.2}P^2x(n-1)$$

$$+\frac{X'''}{1.2.3}P^3x(n-2)+..+\frac{X^n}{1.2..n}.P^nx1$$

4) Gebraucht man anstatt der Localzeichen die combinatorischen, so ist für

den Zeiger

$$\left\{ \frac{1}{1}\frac{dx}{}, \frac{2}{1.2}\frac{d^2x}{}, \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3x}{}, \ldots \right\},$$

$P\varkappa n = a^n A$, $P^2\varkappa(n-1) = b^n B$,

$P^3\varkappa(n-2) = c^n C$, u. ſ. w.; [h]) alſo

$$\frac{d^n X}{1.2..n} = X'.a^n A + \frac{X''}{1.2} b^n B$$

$$+ \frac{X'''}{1.2.3} c^n C + \ldots + \frac{X^n}{1.2..n} n^n \mathcal{N}$$

§. 5. Zuſatz; $d^n \log x$ und $d^n e^x$

Von der nun gefundenen Formel laſſen ſich mannichfaltige Anwendungen machen. Am einfachſten werden dieſe für $X = \log x$, und $= e^x$.

1) Es iſt nehmlich

$$\frac{d^r \log x}{dx^r} = \pm 1.2.3..(r-1)x^{-r},$$

wenn dx als beſtändig betrachtet wird. Alſo wird, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential

$$\frac{d^n \log x}{1.2...n} = \frac{1}{x} P\varkappa n - \frac{1}{2x^2} P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3x^3} P^3\varkappa(n-2) \ldots \pm \frac{1}{nx^n} P^n\varkappa(1),$$

der

$$= \frac{1}{x} a^n A - \frac{1}{2x^2} b^n B + \frac{1}{3x^3} c^n C - \ldots \pm \frac{1}{nx^n} n^n \mathcal{N},$$

h) E. S. c. a. A. S. 230.

für Scale und Zeiger:

$$P\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3 & \cdots \\ dx, & \frac{d^2x}{1.2}, & \frac{d^3x}{1.2.3}, & \cdots \end{matrix}\right\}$$ i)

2) Für $X = e^x$ ist $\frac{d^r e^x}{dx^r}$, im ersten Sinn (1) $= e^x$

also, im zweyten Sinne, $\frac{d^n e^x}{1.2..n}$

$$= e^x\left(Px n + \frac{1}{1.2}P^2x(n-1) + \frac{1}{1.2.3}P^3x(n-2) + \cdots + \frac{1}{1.2..n}P^n x 1\right)$$

$$= e^x\left(a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \cdots + \frac{n^n N}{1.2..n}\right),$$

wo Scale und Zeiger, wie in (1), bleiben.

§. 6. Anmerkung. Die erste Formel des vorhergehenden Zusatzes, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, ist in der Fortsetzung der vorerwähnten Abhandlung (Archiv IV. Heft. S. 431) aus andern Gründen abgeleitet; die zweyte folgt aus der ebendaselbst (S. 433. §. 14) vermittelst des Tayloriſchen Satzes erwiesenen Formel, wenn das dortige $z = e^x$, also $\log z = x$ gesetzt wird.

Noch ist mir folgendes Verfahren beygefallen, wodurch beyde Formeln auf den ersten Satz (§. 1) reducirt werden. Es ist nehmlich $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, für $i = \infty$. k)

i) Nach der von Herrn Prof. Hindenburg gebrauchten Bezeichnung: Probl. max. univerſ. ad ſerier. reverſ. paralipom. p. IV. not. b.

k) L. Euler Introductio etc. Cap. VII. §. 115.

Also ist nach (§. 1), für die Scale:

$$p\left(1+\frac{x}{i}, \frac{dx}{i}, \frac{d^2x}{1.2.i}, \frac{d^3x}{1.2.3..i}, \ldots\right),$$

$\frac{d^n e^x}{1.2.3..n} = p^i x\,(n+1)$. Nun sey

$$p = 1+\frac{x}{i}+\frac{udx}{i}+\frac{u^2d^2x}{1.2.i}+\ldots$$

$$= 1+\frac{x}{i}+\frac{P}{i}, \text{ so ist } p^i = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$$

$$+i\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i-1}\frac{P}{i}+i\frac{(i-1)}{1.2}\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i-2}\frac{P^2}{i^2}+\ldots,$$

oder, wenn für $i-1$, $i-2$, u. s. w. gesetzt wird i, und e^x für $\left(1+\frac{x}{i}\right)^i$; $p^i = e^x\left(1+P+\frac{P^2}{1.2}+\frac{P^3}{1.2.3}+\ldots\right)$,

folglich $\frac{d^n e^x}{1.2..n} = p^i x\,(n+1) =$

$$e^x\left(Px n+\frac{1}{1.2}P^2x(n-1)+\frac{1}{1.2.3}P^3x(n-2)+\ldots\right),$$

wie vorhin.

Eben so wird $d^n \log x$ gefunden, wenn man den Ausdruck: $\log x = i\left(\sqrt[i]{x}-1\right)$ gebraucht [1]

§. 7. Aufgabe. Das nte Differential von $\sin x$ und $\cos x$ zu finden, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential.

1) L. Euler I. c. §. 119.

Auflösung. 1) Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 4) $X = \sin x$, so ist, wenn dx beständig ist, $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \mp \cos x$, $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \sin x$, wo die obern Zeichen für ein ungerades, die untern für ein gerades r gelten. Also wird, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential,

$$\frac{d^n \sin x}{1.2..n} = \cos x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots \right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1.2.3.4} P^4\varkappa(n-3) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1..6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots \right),$$

für die Scale $P\left(\frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$.

Die Glieder dieser Ausdrücke werden fortgesetzt, bis man auf $\varkappa 2$ und $\varkappa 1$ kommt.

2) Für $X = \cos x$, ist $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \pm \sin x$, $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \cos x$, für ein beständiges dx; also allgemein,

$$\frac{d^n \cos x}{1.2.3..n} = -\sin x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots \right)$$

$$- \cos x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \frac{1}{1...6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

für die vorige Scale.

§. 8. Anmerkung. Die vorhergehenden beyden Formeln lassen sich auch aus §. (5) herleiten, mit Hülfe der Ausdrücke:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$ m).

So wird nehmlich

$$d^n \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} d^n(e^{x\sqrt{-1}} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} d^n(e^{-x\sqrt{-1}}).$$

Für die Scale

$$p\left(dx\sqrt{-1}, \frac{d^2x}{1.2}.\sqrt{-1}, \frac{d^3x}{1.2.3}.\sqrt{-1}, \ldots\right)$$

ist $\frac{d^n(e^{x\sqrt{-1}})}{1.2.3\ldots n}$

$$= e^{x\sqrt{-1}}\left(p\varkappa n + \frac{1}{1.2} p^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3} p^3\varkappa(n-2) + \ldots\right);$$

eben so für die Scale

$$\pi\left(-dx.\sqrt{-1}, -\frac{d^2x}{1.2}.\sqrt{-1}, -\frac{d^3x}{1.2.3}.\sqrt{-1}, \ldots\right),$$

ist $\frac{d^n(e^{-x\sqrt{-1}})}{1.2\ldots n}$

$$= e^{-x\sqrt{-1}}\left(\pi\varkappa n + \frac{1}{1.2}\pi^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}\pi^3\varkappa(n-2) + \ldots\right).$$

Nimmt man nun folgende Scale an:

$$P\left(dx, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right), \text{ so ist}$$

m) Kästner Anal. d. Unendl. §. 330.

$p^r x\rho = (r-1)^r . P^r x\rho$ n) $= +r-1 . P^r x\rho$, oder $= \overline{+} P^r x\rho$ n), je nachdem r ungerad oder gerad iſt; eben ſo $\pi^r x\rho = (-r-1)^r . P^r x\rho = \overline{+} r-1 . P^r x\rho$, oder $= \overline{+} P^r x\rho$. Folglich wird $d^n(e^{\pm x} r^{-1})$

$$= e^{\pm x} r^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \overline{+} r-1 . Pxn - \frac{1}{1.2} P^2 x(n-1) \\ \overline{+} \frac{r-1}{1.2.3} P^3 x(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4 x(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

Daraus ergiebt ſich $\frac{d^n \sin x}{1.2.3 \ldots n}$

$$= \frac{e^x r^{-1}}{2r-1} \left\{ \begin{array}{l} r-1 . Pxn - \frac{1}{1.2} P^2 x(n-1) \\ -\frac{r-1}{1.2.3} P^3 x(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4 x(n-3) - \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{e^{-x} r^{-1}}{2r-1} \left\{ \begin{array}{l} r-1 . Pxn + \frac{1}{1.2} P^2 x(n-1) \\ -\frac{r-1}{1.2.3} P^3 x(n-2) - \frac{1}{1..4} P^4 x(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= \cos x \left(Pxn - \frac{1}{1.2.3} P^3 x(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5 x(n-5) - \ldots \right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2 x(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4 x(n-3) + \frac{1}{1..6} P^6 x(n-5) - \ldots \right)$$

Eben ſo erhält man den Ausdruck für $d^n \cos x$, welcher auch

n) Für die beyden Scalen; $p(a, b, c, d, \ldots) P(ma, mb, mc, md, \ldots)$ iſt $p^r xn = m^r . P^r xn$.

aus dem nur gefundenen folgt, wenn für x, $\frac{\pi}{2} - x$ gesetzt wird.

§. 9. Aufgabe. **Das nte Differential von Atang x zu finden, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential.**

Auflösung. 1) Nach der Formel (§. 4) kömmt es nur darauf an, die höhern Differentialen von Atang x zu finden, wenn dx beständig ist. Nun ist $\frac{d.\,\text{Atang}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, also $\frac{d^{r+1}\,\text{Atang}\,x}{dx^{r+1}} = \frac{d^r \frac{1}{1+x^2}}{dx^r}$. Um die Differentialen von $\frac{1}{1+x^2}$ unter der erwähnten Voraussetzung, zu finden, entwickele man $\frac{1}{1+(x+u)^2}$ nach Potenzen von u, so wird der r+1te Coefficient dieser Reihe $\frac{d^r \frac{1}{1+x^2}}{1.2..r.dx^r}$ seyn. Es ist aber $\frac{1}{1+x^2+2xu+u^2} =$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{(2x+u)u}{(1+x^2)^2} + \frac{(2x+u)^2u^2}{(1+x^2)^3} - \ldots + \frac{(2x+u)^ru^r}{(1+x^2)^{r+1}} - \ldots,$$

also der Coefficient von u^r, =

$$\pm\left(\frac{2^rx^r}{(1+x^2)^{r+1}} - (r-1)\frac{2^{r-2}x^{r-2}}{(1+x^2)^r} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\frac{2^{r-4}x^{r-4}}{(1+x^2)^{r-1}} - \ldots\right)$$

ſelbſt werden. Nun gilt aber der Satz (2) allgemein, ohne Rückſicht auf irgend ein beſtändiges Differential, und wenn auch die Größen u, v, . . . w, x, von einander ganz unabhängig ſind. Es iſt zwar wahr, theils, daß das Verhalten jener Größen gegen z, alſo auch unter ſich, unbeſtimmt gelaſſen wird, theils, daß, wo höhere Differentiale in der Anwendung vorkommen, irgend ein beſtändiges zum Grunde liegt. Indeſſen läßt ſich das Differentiiren auch bloß als eine nach den Regeln eines eigenen Algorithmus anzuſtellende analytiſche Operation betrachten, wobey man an die Bedeutung, wie Anwendungen, z. B. geometriſche, mechaniſche, ſie erfordern, nicht zu denken hat [f]). Aus dieſem nicht unfruchtbaren, und auch ſchon von Leibniz gefaßten Geſichtspuncte, ſchien es mir nicht überflüſſig, den Satz (3) allein aus den Grundregeln des Differentiirens, in Verbindung mit den Fundamentalſätzen von Reihenpotenzen und Producten, herzuleiten.

§. 4. Aufgabe. X ſey irgend eine Function von x, aus ihren Differentialien, wenn dx beſtändig iſt, dieſelbigen herzuleiten, wenn kein beſtändiges Differential angenommen wird.

Auflöſung. 1) Es werde jede Function von x durch folgende Reihe ausgedrückt:

f) Es würde ein großes Misverſtändnis ſeyn, wenn man in dieſer Behauptung eine Empfehlung des blos maſchinenmäßigen Rechnens fände, oder bey dem Vortrag der Gründe der Differenzialrechnung, von der hier erwähnten Vorſtellungsart ausgehen wollte, und nicht vielmehr ſolche Begriffe vom Unendlichen, von Gränzen u. ſ. w., zum Grunde legte, dergleichen insbeſondere aus H. HR. Käſtners Schriften hinlänglich bekannt ſind. Ein neues Werk hierüber von H. L'Huilier (Princ. Calc. Diff. et Int. Expoſ. elem.) iſt als ein Muſter ächter geometriſcher Schärfe und Methode, auf Analyſis angewandt, zum Studium vorzüglich zu empfehlen.

$$X = ax^{\alpha} + a'x^{\alpha+\beta} + a''x^{\alpha+2\beta} + \ldots$$

so ist $d^n X = ad^n(x^{\alpha}) + a'd^n(x^{\alpha+\beta}) + a''d^n(x^{\alpha+2\beta}) + \text{etc}$,

oder nach (§. 1),

$$= 1.2..n\,(ap^{\alpha}\varkappa(n+1) + a'p^{\alpha+\beta}\varkappa(n+1) + a''p^{\alpha+2\beta}\varkappa(n+1) + \text{etc},$$

für die Scale

$$p\left(x, \frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$$

2) Nun nehme man folgende andere Scale an:

$$P\left(\frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$$

so ist, für jeden Exponenten r,

$$p^r\varkappa(n+1) = rx^{r-1}P\varkappa n + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \ldots \quad g)$$

Vermittelst dieser Formel läßt sich jedes Glied der Reihe für $d^n X$ (1) in mehrere auflösen; ordnet man nun nach dieser Verwandlung diejenigen Glieder zusammen, worinn einerley Potenz von P vorkommt, so lassen sich diese Glieder für sich summiren, und so ergiebt sich die Summe jener Reihe, durch ein Verfahren, demjenigen ähnlich, dessen Anwendungen bey Summationen ich anderswo zu entwickeln versucht habe.

g) Unter Annahme der beyden Scalen p(a, b, c, d ...); P(b, c, d ...) ist immer $p^r\varkappa(n+1) = \overset{r}{\mathfrak{A}}a^{r-1}P\varkappa n + \overset{r}{\mathfrak{B}}a^{r-2}P^2\varkappa(n-1) + \overset{r}{\mathfrak{C}}a^{r-3}P^3\varkappa(n-2) + \ldots$ Diese Relation folgt sogleich aus der Localformel für das Polynomium (E. S. c. a. A. S. 13. Anm. k)

3) Es wird nehmlich $\frac{d^nX}{1.2..n} =$

$$a\alpha x^{\alpha-1} \left\{ P\varkappa n + a\alpha \frac{(\alpha-1)}{1.2} x^{\alpha-2} \right\} P^2\varkappa(n-1)+\ldots$$
$$+a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1} \left\{ +a' \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1.2} x^{\alpha+\beta-2} \right\}$$
$$+a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1} \left\{ +a'' \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)}{1.2} \right.$$
$$+\ldots \left. +\ldots\ldots (x^{\alpha+2\beta-2} \right\}$$

Nun ist $a\alpha x^{\alpha-1} + a'(\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}$

$$+a''(\alpha+2\beta)x^{\alpha+2\beta-1}+\ldots = \frac{dX}{dx},$$

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+a'(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}$$

$$+a''(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)x^{\alpha+2\beta-2}+\ldots = \frac{d^2X}{dx^2}$$

das Differential dx als beſtändig angenommen. Setzt man dieſe Differentiation fort, und bezeichnet das erſte, zweyte ... nte Differentialverhältniß von X, für ein beſtändiges dx, durch X', X'', .. X''', ſo erhält man

$$\frac{d^nX}{1.2..n} = X'.P\varkappa n + \frac{X''}{1.2} P^2\varkappa(n-1)$$

$$+\frac{X'''}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2)+\ldots+\frac{X^n}{1.2..n}.P^n\varkappa 1$$

4) Gebraucht man anſtatt der Localzeichen die combinatoriſchen, ſo iſt für

den Zeiger

$$\left\{ \frac{1}{1}\frac{dx}{}, \frac{2}{1.2}\frac{d^2x}{}, \frac{3}{1.2.3}\frac{d^3x}{}, \ldots \right\},$$

$P\varkappa n = a^n A$, $P^2\varkappa(n-1) = b^n B$,

$P^3\varkappa(n-2) = c^n C$, u. s. w.; [h]) also

$$\frac{d^n X}{1.2..n} = X'.a^n A + \frac{X''}{1.2} b^n B$$

$$+ \frac{X'''}{1.2.3} c^n C + \ldots + \frac{X^n}{1.2.n} n^n \mathcal{N}$$

§. 5. Zusatz; $d^n \log x$ und $d^n e^x$

Von der nur gefundenen Formel lassen sich mannichfaltige Anwendungen machen. Am einfachsten werden diese für $X = \log x$, und $= e^x$.

1) Es ist nehmlich

$$\frac{d^r \log x}{dx^r} = \pm 1.2.3..(r-1)x^{-r},$$

wenn dx als beständig betrachtet wird. Also wird, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential

$$\frac{d^n \log x}{1.2...n} = \frac{1}{x} P\varkappa n - \frac{1}{2x^2} P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3x^3} P^3\varkappa(n-2) \ldots \pm \frac{1}{nx^n} P^n\varkappa(1),$$

der

$$= \frac{1}{x} a^n A - \frac{1}{2x^2} b^n B + \frac{1}{3x^3} c^n C - \ldots \pm \frac{1}{nx^n} n^n \mathcal{N},$$

h) E. S. c. a. A. S. 230.

für Scale und Zeiger:

$$P\left\{1,\ 2,\ 3\ \ldots\ ;\ dx,\ \frac{d^2x}{1.2},\ \frac{d^3x}{1.2.3},\ \ldots\right\}$$ i)

2) Für $X = e^x$ ist $\frac{d^r e^x}{dx^r}$, im ersten Sinn (1) $= e^x$, also, im zweyten Sinne, $\frac{d^n e^x}{1.2..n}$

$$= e^x\left(Px n + \frac{1}{1.2}P^2x(n-1) + \frac{1}{1.2.3}P^3x(n-2) + \ldots + \frac{1}{1.2..n}P^n x 1\right)$$

$$= e^x\left(a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{n^n N}{1.2..n}\right),$$

wo Scale und Zeiger, wie in (1), bleiben.

§. 6. Anmerkung. Die erste Formel des vorhergehenden Zusatzes, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, ist in der Fortsetzung der vorerwähnten Abhandlung (Archiv IV. Heft. S. 431) aus andern Gründen abgeleitet; die zweyte folgt aus der ebendaselbst (S. 433. §. 14) vermittelst des Tayloriſchen Satzes erwiesenen Formel, wenn das dortige $z = e^x$, also $\log z = x$ gesetzt wird.

Noch ist mir folgendes Verfahren beygefallen, wodurch beyde Formeln auf den ersten Satz (§. 1) reducirt werden. Es ist nehmlich $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, für $i = \infty$. k).

i) Nach der von Herrn Prof. Hindenburg gebrauchten Bezeichnung: Probl. max. univerſ. ad ferier. reverſ. paralipom. p. IV. not. b.

k) L. Euler Introductio etc. Cap. VII. §. 115.

Also ist nach (§. 1), für die Scale:

$$p\left(1+\frac{x}{i}, \frac{dx}{i}, \frac{d^2x}{1.2.i}, \frac{d^3x}{1.2.3..i}, \ldots\right),$$

$\frac{d^n e^x}{1.2.3..n} = p^i x\,(n+1)$. Nun sey

$$p = 1 + \frac{x}{i} + \frac{udx}{i} + \frac{u^2 d^2 x}{1.2.i} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{i} + \frac{P}{i}, \text{ so ist } p^i = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$$

$$+ i\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i-1}\frac{P}{i} + i\frac{(i-1)}{1.2}\left(1+\frac{x}{i}\right)^{i-2}\frac{P^2}{i^2} + \ldots,$$

oder, wenn für $i-1$, $i-2$, u. s. w. gesetzt wird i, und e^x für

$$\left(1+\frac{x}{i}\right)^i;\ p^i = e^x\left(1 + P + \frac{P^2}{1.2} + \frac{P^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

folglich $\frac{d^n e^x}{1.2..n} = p^i x\,(n+1) =$

$$e^x\left(Px^n + \frac{1}{1.2}P^2 x(n-1) + \frac{1}{1.2.3}P^3 x(n-2) + \ldots\right),$$

wie vorhin.

Eben so wird $d^n \log x$ gefunden, wenn man den Ausdruck: $\log x = i\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{i}}} - 1\right)$ gebraucht [1])

§. 7. Aufgabe. Das nte Differential von $\sin x$ und $\cos x$ zu finden, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential.

1) L. Euler l. c. §. 119.

Auflösung. 1) Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 4) $X = \sin x$, so ist, wenn dx beständig ist, $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \pm \cos x$, $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \sin x$, wo die obern Zeichen für ein ungerades, die untern für ein gerades r gelten. Also wird, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential,

$$\frac{d^n \sin x}{1.2..n} = \cos x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots \right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1.2.3.4} P^4\varkappa(n-3) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1..6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots \right),$$

für die Scale $P\left(\frac{dx}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right)$.

Die Glieder dieser Ausdrücke werden fortgesetzt, bis man auf $\varkappa 2$ und $\varkappa 1$ kommt.

2) Für $X = \cos x$, ist $\frac{d^{2r-1}X}{dx^{2r-1}} = \mp \sin x$, $\frac{d^{2r}X}{dx^{2r}} = \mp \cos x$, für ein beständiges dx; also allgemein,

$$\frac{d^n \cos x}{1.2.3..n} = -\sin x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-4) - \ldots \right)$$

$$- \cos x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \frac{1}{1...6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

für die vorige Scale.

§. 8. Anmerkung. Die vorhergehenden beyden Formeln lassen sich auch aus §. (5) herleiten, mit Hülfe der Ausdrücke:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$ m).

So wird nehmlich

$$d^n \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} d^n(e^{x\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} d^n(e^{-x\sqrt{-1}}).$$

Für die Scale

$$p\left(dx\sqrt{-1}, \frac{d^2x}{1.2}\sqrt{-1}, \frac{d^3x}{1.2.3}\sqrt{-1}, \ldots\right)$$

ist $\frac{d^n(e^{x\sqrt{-1}})}{1.2.3\ldots n}$

$$= e^{x\sqrt{-1}}\left(p\varkappa n + \frac{1}{1.2}p^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}p^3\varkappa(n-2) + \ldots\right);$$

eben so für die Scale

$$\pi\left(-dx\sqrt{-1}, -\frac{d^2x}{1.2}\sqrt{-1}, -\frac{d^3x}{1.2.3}\sqrt{-1}, \ldots\right),$$

ist $\frac{d^n(e^{-x\sqrt{-1}})}{1.2\ldots n}$

$$= e^{-x\sqrt{-1}}\left(\pi\varkappa n + \frac{1}{1.2}\pi^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3}\pi^3\varkappa(n-2) + \ldots\right).$$

Nimmt man nun folgende Scale an:

$$P\left(dx, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right), \text{ so ist}$$

m) Kästner Anal. d. Unendl. §. 330.

$p^r \varkappa\rho = (r-1)^r . P^r \varkappa\rho$ n) $= +r-1 . P^r \varkappa\rho$, oder $= \overline{+} P^r \varkappa\rho$ n), je nachdem r ungerad oder gerad iſt; eben ſo

$\pi^r \varkappa\rho = (-r-1)^r . P^r \varkappa\rho = \overline{+} r-1 . P^r \varkappa\rho$, oder $= \overline{+} P^r \varkappa\rho$.

Folglich wird $d^n (e^{\pm x\sqrt{r-1}})$

$$= e^{\pm x\sqrt{r-1}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{+}\sqrt{r-1} . P\varkappa n - \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ \overline{+} \frac{r-1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

Daraus ergiebt ſich $\frac{d^n \sin x}{1.2.3 \ldots n}$

$$= \frac{e^{x\sqrt{r-1}}}{2\sqrt{r-1}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r-1} . P\varkappa n - \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ -\frac{r-1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) - \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{r-1}}}{2\sqrt{r-1}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r-1} . P\varkappa n + \frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) \\ -\frac{r-1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \ldots \end{array} \right\}$$

$$= \cos x \left(P\varkappa n - \frac{1}{1.2.3} P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{1..5} P^5\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

$$- \sin x \left(\frac{1}{1.2} P^2\varkappa(n-1) - \frac{1}{1..4} P^4\varkappa(n-3) + \frac{1}{1..6} P^6\varkappa(n-5) - \ldots \right)$$

Eben ſo erhält man den Ausdruck für $d^n \cos x$, welcher auch

n) Für die beyden Scalen; $p(a, b, c, d, \ldots) P(ma, mb, mc, md, \ldots)$ iſt $p^r \varkappa n = m^r . P^r \varkappa n$.

aus dem nur gefundenen folgt, wenn für x, $\frac{\pi}{2} - x$ gesetzt wird.

§. 9. Aufgabe. **Das nte Differential von Atang x zu finden, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential.**

Auflösung. 1) Nach der Formel (§. 4) kömmt es nur darauf an, die höhern Differentialien von Atang x zu finden, wenn dx beständig ist. Nun ist $\frac{d.\,\text{Atang}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, also $\frac{d^{r+1}\,\text{Atang}\,x}{dx^{r+1}} = d^r \frac{\frac{1}{1+x^2}}{dx^r}$. Um die Differentialien von $\frac{1}{1+x^2}$ unter der erwähnten Voraussetzung, zu finden, entwickele man $\frac{1}{1+(x+u)^2}$ nach Potenzen von u, so wird der r+1te Coefficient dieser Reihe $d^r \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1.2..r.dx^r}$ seyn. Es ist aber $\frac{1}{1+x^2+2xu+u^2} =$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{(2x+u)u}{(1+x^2)^2} + \frac{(2x+u)^2u^2}{(1+x^2)^3} - \ldots + \frac{(2x+u)^ru^r}{(1+x^2)^{r+1}} - \ldots,$$

also der Coefficient von u^r, =

$$\pm\left(\frac{2^rx^r}{(1+x^2)^{r+1}} - (r-1)\frac{2^{r-2}x^{r-2}}{(1+x^2)^r} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\frac{2^{r-4}x^{r-4}}{(1+x^2)^{r-1}} - \ldots\right)$$

2) Daraus folgt, für die Scale

$$P\left(dx, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right),$$

$$d^n A\,\mathrm{tang}\,x$$

$$= \frac{1}{1+x^2} P^1 n$$

$$- \tfrac{1}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^2} P^2 x(n-1)$$

$$+ \tfrac{1}{3} \frac{2^2x^2}{(1+x^2)^3} \left\{1 - 1.\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)\right\} P^3 x(n-2)$$

$$- \tfrac{1}{4} \frac{2^3x^3}{(1+x^2)^4} \left\{1 - 2\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)\right\} P^4 x(n-3)$$

$$+ \tfrac{1}{5} \frac{2^4x^4}{(1+x^2)^5} \left\{1 - 3\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right) + \frac{2.1}{1.2}\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)^2\right\} P^5 x(n-4)$$

$$- \tfrac{1}{6} \frac{2^5x^5}{(1+x^2)^6} \left\{1 - 4\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right) + \frac{3.2}{1.2}\left(\frac{1+x^2}{2^2x^2}\right)^2\right\} P^6 x(n-5)$$

$$+ \text{etc.}$$

Das Geſetz, nach welchem die Glieder dieſes Ausdrucks fortgehen, iſt aus dem allgemeinen Coefficienten in (1) erſichtlich.

3) Dieſe Glieder laſſen ſich auf folgende Weiſe einfacher darſtellen:

Es iſt $\sin rz = \sin z \left\{ \begin{array}{l} 2^{r-1}\cos z^{r-1} - (r-2)\,2^{r-3}\cos z^{r-3} \\ + \dfrac{(r-3)(r-4)}{1.2}\, 2^{r-4}\cos z^{r-4} + \ldots \end{array} \right\}$ o)

o) L. Euler Introductio etc. Cap. XIV. §. 234. p. 198. Klügel analytiſche Trigonometrie. S. 56. No. 72.

Setzt man hier für $z, \frac{\pi}{2} - \zeta$, so wird $\sin\left(r\frac{\pi}{2} - r\zeta\right) =$

$$\cos\zeta.\sin\zeta^{r-1}\left\{2^{r-1} - (r-2)2^{r-3}\frac{1}{\sin\zeta^2} + \frac{(r-3)(r-4)}{1.2}2^{r-4}\frac{1}{\sin\zeta^4} - \ldots\right\}$$

wo für ein gerades r, $\sin\left(\frac{r\pi}{2} - r\zeta\right) = \pm\sin r\zeta$, für ein ungerades r, $\sin\left(r\frac{\pi}{2} - r\zeta\right) = \pm\cos r\zeta$. Nun sey in (2) $A\tan gx = \zeta$, so ist $\frac{x}{r(1+x^2)} = \sin\zeta$,

und $\frac{1}{r(1+x^2)} = \cos\zeta$. Folglich wird $d^n A\tan gx =$

$\cos\zeta.\cos\zeta.P\varkappa n - \frac{1}{2}\cos\zeta^2.\sin 2\zeta.P^2\varkappa(n-1)$
$-\frac{1}{3}\cos\zeta^3.\cos 3\zeta.P^3\varkappa(n-2) + \frac{1}{4}\cos\zeta^4.\sin 4\zeta.P^4\varkappa(n-3)$
$+\frac{1}{5}\cos\zeta^5.\cos.5\zeta.P^5\varkappa(n-4) - \ldots.$

§. 10. Zusatz. Der gefundene Ausdruck läßt sich noch auf folgende Art verändern. Bekanntlich enthält von $(\cos\zeta+\sin\zeta)^r$ der Cosinus von rz die ungeraden, der sin rz die geraden Glieder, beyde mit abwechselnden Zeichen + — p). Wird nun in dem so gebildeten Werthe von sin rz, für $z, \frac{\pi}{2} - \zeta$, und statt $\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}$, $\frac{1}{x}$ gesetzt; so ergiebt sich aus §. (9. 3)

p) Käestner Analysis des Endl. §. 176.

$$d^n A\,\mathrm{tang}\,x$$

$$= \frac{1}{1+x^2} P\varkappa n$$

$$- \frac{x}{(1+x^2)^2} \cdot 1 \cdot P^2\varkappa(n-1)$$

$$+ \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\left(1 - \frac{2.1}{2.3}\frac{1}{x^2}\right) P^3\varkappa(n-2)$$

$$- \frac{x^3}{(1+x^2)^4}\left(1 - \frac{3.2}{2.3}\frac{1}{x^2}\right) P^4\varkappa(n-3)$$

$$+ \frac{x^4}{(1+x^2)^5}\left(1 - \frac{4.3}{2.3}\frac{1}{x^2} + \frac{4.3.2.1}{2.3.4.5}\frac{1}{x^4}\right) P^5\varkappa(n-4)$$

$$- \frac{x^5}{(1+x^2)^6}\left(1 - \frac{5.4}{2.3}\frac{1}{x^2} + \frac{5.4.3.2}{2.3.4.5}\frac{1}{x^4}\right) P^6\varkappa(n-5)$$

$$+ \ldots.$$

Wenn dx beſtändig iſt, ſo wird

$$\frac{d^{r+1} A\,\mathrm{tang}\,x}{1.2.3..(r+1).dx^{r+1}} = \frac{d^r \frac{1}{1+x^2}}{1.2..(r+1)dx^r}$$

$$= \mp \frac{x^r}{(1+x^2)^{r+1}} \left\{ \begin{array}{l} 1 - r\,\dfrac{(r-1)}{2.3}\,\dfrac{1}{x^2} \\ + r\,\dfrac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4.5}\,\dfrac{1}{x^4} - \ldots \end{array} \right\}$$

§. 11. Zuſatz. Da $A\,\mathrm{cotang}\,x = \frac{\pi}{2} - A\,\mathrm{tang}\,x$, ſo wird, dx als beſtändig angenommen,

$$\frac{d^n A\,\mathrm{cotang}\,x}{dx^n} = \mp 1.2\ldots(n-1)\cos\zeta^n.\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right) \text{ (§. 9)}$$

$$= \mp 1.2\ldots(n-1).\sin z^n.\sin nz, \text{ wo } z = A\,\mathrm{cotang}\,x.$$

Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential wird demnach $d^n A\,\mathrm{cotang}\,x = d^n z = -\sin z.\sin z.P^n x$
$+\frac{1}{2}\sin z^2.\sin 2z.P^2 x\,(n-1) - \frac{1}{3}\sin z^3.\sin 3z.P^3 x(n-2)$
$+\frac{1}{4}\sin z^4.\sin 4z.P^4 x\,(n-3) - \ldots.$

§. 12. Anmerkung. Wenn dx als beständig betrachtet wird, so ist

$$\frac{d^{2r-1} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^{2r-1}} = \pm 1.2.3..(2r-2)\cos\zeta^{2r-1}\cos(2r-1)\zeta,$$

und

$$\frac{d^{2r} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^{2r}} = \mp 1.2.3..(2r-1).\cos\zeta^{2r}\sin 2r\zeta; \text{ oder}$$

für jedes n, $\frac{d^n A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^n} = \pm 1.2.3..(n-1)\cos\zeta^n.\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)$,

wo $\zeta = A\,\mathrm{tang}\,x$, und die obern Zeichen für ungerade r und n, die untern für gerade gelten. Die Allgemeinheit dieser vorhin (§. 9) analytisch gefundenen Formeln läßt sich nun auch auf andere Art, synthetisch, durch den Schluß von n auf n+1, darthun. Es ist nehmlich

$$\frac{d^{n+1} A\,\mathrm{tang}\,x}{dx^n} = \pm 1.2\ldots(n-1).d\left\{\cos\zeta^n\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\right\}$$

$$= \mp 1.2\ldots(n-1)\left\{\begin{array}{l} n\cos\zeta^{n-1}d\zeta\sin\zeta.\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right) \\ +nd\zeta.\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\cos\zeta^n \end{array}\right\}$$

$$= \mp 1.2\ldots n.d\zeta \operatorname{cof}\zeta^{n-1}\operatorname{cof}\left((n+1)\zeta - n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \mp 1.2\ldots n.dx \operatorname{cof}\zeta^{n+1}\operatorname{fin}(n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),$$

weil $dx = d\operatorname{tang}\zeta = \frac{d\zeta}{\operatorname{cof}\zeta^2}$.

§. 13. Anmerkung. Die allgemeine Formel für $d^n A\operatorname{tang} x$ (§. 9) läßt ſich auch aus der vorhin (§. 5) erwieſenen für $d^n \log x$ herleiten, vermittelſt des Ausdrucks:

$$A\operatorname{tang} x = \frac{1}{2r-1}\log\left(\frac{1+xr-1}{1-xr-1}\right)$$ q)

So wird nehmlich $d^n A\operatorname{tang} x =$

$$\frac{1}{2r-1}d^n\log(1+xr-1) - \frac{1}{2r-1}d^n\log(1-xr-1).$$

Nun iſt $d^n\log(1\pm xr-1) =$

$$\frac{1}{1\pm xr-1}\cdot p^n x - \frac{1}{2(1\pm xr-1)^2}\cdot p^2 x(n-1)$$

$$+ \frac{1}{3(1\pm xr-1)^3}p^3 x(n-2) - \ldots,$$

für die Scale:

$$P\left(\pm dx.r-1, \pm\frac{d^2x.r-1}{1.2}, \pm\frac{d^3x.r-1}{1.2.3}, \ldots\right)$$

Nimmt man aber folgende Scale an:

$$P\left(dx, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \ldots\right), \text{ ſo}$$

q) Käſtners Anal. d. Unendl. §. 328.

wird $p^r xn = (\pm r - 1)^r . P^r xn$ (vergl. §. 8);

ferner ist $\frac{1}{(1 \pm x\sqrt{r-1})^r} = \frac{\cos\zeta^r}{(\cos\zeta \pm \sin\zeta . \sqrt{r-1})^r}$

$= \cos\zeta^r . (\cos r\zeta \pm \sin r\zeta . \sqrt{r-1})$. Daraus

folgt $d^n \log (1 \pm x\sqrt{r-1}) =$

$\pm r - 1 . \cos\zeta (\cos\zeta \pm \sin\zeta . \sqrt{r-1}) P xn$

$\pm \frac{1}{2} \cos\zeta^2 (\cos 2\zeta \pm \sin 2\zeta . \sqrt{r-1}) P^2 x(n-1)$

$\pm \frac{1}{3} \sqrt{r-1} . \cos\zeta^3 (\cos 3\zeta \pm \sin 3\zeta . \sqrt{r-1}) P^3 x(n-2) - \ldots$

dieſen Werth ſubſtituirt, ergiebt ſich für $d^n A \operatorname{tang} x$ der obige Ausdruck.

§. 14. Anmerkung. (zu §. 9. n. 3) Für $\sin mz$ und $\cos mz$ ſind außer denen (§. 10) erwähnten Ausdrücken folgende beyde bekannt:

1) $\sin mz = \sin z . \left\{ \begin{array}{l} (2^{m-1} \cos z^{m-1} - (m-2)\, 2^{m-3} \cos z^{m-3} \\ + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} 2^{m-5} \cos z^{m-5} - \ldots \end{array} \right\}$

2) $\cos mz = 2^{m-1} \cos z^m - \frac{m}{1} 2^{m-3} \cos z^{m-2}$

$+ m \frac{(m-3)}{1.2} 2^{m-5} \cos z^{m-4} - m \frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3} 2^{m-7} \cos z^{m-6} + \ldots$ r)

Setzt man in dem erſten derſelben für z, $\frac{\pi}{2} - \zeta$, und ſchreibt die Glieder in umgekehrter Ordnung, ſo wird

r) Euler l. c. §. 234. 243. Klügel n. 72. S. 56, n. 84. S. 80. Vergl. L'Hoſpital Traité analytique des ſections coniques p. 436 etc.

1. a) für ein gerades m,

$$\sin m\zeta = \cos\zeta \cdot \left\{ \begin{matrix} m f\zeta - m\frac{(m^2-4)}{1.2.3} f\zeta^3 \\ + m\frac{(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4} f\zeta^4 - \ldots \end{matrix} \right\}$$

1. b) für ein ungerades m,

$$\cos m\zeta = \cos\zeta \cdot \left(1 - \frac{(m^2-1)}{1.2} f\zeta^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} f\zeta^4 - \ldots\right)$$

Durch eben dieses Verfahren ergiebt sich aus der zweyten Formel für $\cos mz$:

2. a) für ein gerades m,

$$\cos m\zeta = 1 - \frac{m^2}{1.2} f\zeta^2 + m^2\frac{(m^2-4)}{1.2.3.4} f\zeta^4$$
$$- m^2\frac{(m^2-4)(m^2-16)}{1.2..6} f\zeta^6 + \ldots$$

2. b) für ein ungerades m,

$$\sin m\zeta = m f\zeta - m\frac{(m^2-1)}{1.2.3} f\zeta^3 + m\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} f\zeta^5 - \ldots$$

Von diesen 4 Formeln finden sich die 1. a und 2. b bey den erwähnten Schriftstellern, aus andern Gründen abgeleitet [s]). Ich weiß nicht, ob sonst die Bemerkung ist gemacht worden, daß diese beyden Formeln unmittelbar aus (1) und (2) durch obige Substitution folgen. Die Formel (2. a) kommt erst in Eulers Integralrechnung vor [t]), aber die

s) Euler §. 238. 236; Klügel S. 65. n. 76. S. 62. n. 74.

t) Institt. Calc. Integr. Vol. I. §. 181.

(1. b) erinnere ich mich nicht ſonſt wo gefunden zu haben. Uebrigens kann man auch (1) aus (2), ſo wie (1. a) und (1. b) aus (2. a) und (2, b), durch Differentiation herleiten.

§. 15. Aufgabe. Das nte Differential von A ſin x zu finden, ohne Rückſicht auf ein beſtändiges Differential.

Auflöſung. 1) Es kommt wieder, wie in (9), nur darauf an, die höhern Differentialien von A ſin x zu finden, wenn dx als beſtändig angenommen wird. Nun iſt $\frac{dA\sin x}{dx}$

$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, alſo $\frac{d^{r+1}A\sin x}{dx^{r+1}} = \frac{d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}{dx^r}$

Die Differentialien von $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ erhält man durch das in (9) gebrauchte Verfahren. Entwickelt man nehmlich

$[1-(x+u)^2]^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2-2xu-u^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$+\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}u(2x+u) + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 1\cdot 2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}u^2(2x+u)^2$

$+\ldots$ nach Potenzen von u, ſo wird

$$\frac{d^r \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}{dx^r} = 1.3.5\ldots(2r-1)\ \frac{x^r}{(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}}$$

$$\left\{1 + \frac{r(r-1)}{2r-1}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\right) + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.(2r-1)(2r-3)}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= \frac{d^{r+1} A \sin x}{dx^{r+1}} = X^{r+1} \text{ (vergl. §. 4.)}$$

2) Daraus folgt, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential, $d^n A \sin x$

$$= X' P x n + \frac{X''}{1.2} P^2 x (n-1) + \frac{X'''}{1.2.3} P^3 x (n-2) + \ldots$$

Da $A \cos x = \frac{\pi}{2} - A \sin x$, so ergiebt sich daraus leicht auch $d^n A \cos x$.

§. 16. Zusatz. Euler giebt [u]) für $d^r \frac{1}{r(1-x^2)} = d^r y$, wenn dx beständig ist, folgenden Ausdruck:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \frac{1.2.3..r}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ x^r + \tfrac{1}{2} r \frac{(r-1)}{1.2} x^{r-2} + \frac{1.3}{2.4} \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4} x^{r-4} + \ldots \right\}$$

Dieser Ausdruck, der dort nicht allgemein erwiesen ist, ergiebt sich durch eben das Verfahren, wie der vorhin (§. 14. 2) gefundene, wenn man nur $(1-(x+u)^2)^{-\frac{1}{2}}$ auf andere Art entwickelt. Es ist nehmlich diese Größe

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{xu}{1-x}\right)^2 + \frac{u^2}{(1-x^2)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

u) Institt. Calc. Diff. P. I. Cap. V. §. 177.

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{xu}{1-x^2}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{xu}{1-x^2}\right)^{-3} \left(\frac{u^2}{(1-x^2)^2}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(1 - \frac{xu}{1-x^2}\right)^{-5} \frac{u^4}{(1-x^2)^4} - \ldots \right\}$$

Aus der Auflösung der Potenzen von $1 - \frac{xu}{1-x^2}$ folgt das übrige. Auch läßt sich die Formel für $d^r \frac{1}{r(1-x^2)}$ so darstellen:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ x^r + \frac{r(r-1)}{2^2} x^{r-2} \right.$$
$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(2 \cdot 4)^2} x^{r-4} + \ldots \right\}$$

Für ein gerades r ergiebt sich, wenn man die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung schreibt,

$$\frac{d^r y}{dx^r} = [1.3.5 \ldots (r-1)]^2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{r^2}{1.2} x^2 + \frac{r^2(r-2)^2 x^4}{1.2.3.4} \right.$$
$$\left. + \frac{r^2(r-2)^2(r-4)^2 x^6}{1.2.3 \ldots 6} + \ldots \right\}$$

eben so für ein ungerades r,

$$\frac{d^r y}{dx^r} = (1.3.5 \ldots r)^2 \frac{x}{(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{(r-1)^2}{2 \cdot 3} x^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(r-1)^2(r-3)^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^4 + \ldots \right\}$$

§. 17. Lehnſatz. Die Summe folgender unendlichen Reihe:

$$p.1^n + p^2.2^n + p^3.3^n + p^4.4^n + \ldots,$$

iſt $= \dfrac{A'p + A''p^2 + A'''p^3 \ldots + A^N p^n}{(1-p)^{n+1}}$,

wo $A^I = 1^n$

$A^{II} = 2^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}$

$A^{III} = 3^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}\,2^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}$

$A^{IV} = 4^n - {}^{n+1}\mathfrak{A}\,3^n + {}^{n+1}\mathfrak{B}\,2^n - {}^{n+1}\mathfrak{C}$

u. ſ. w. v).

§. 18. Aufgabe. Das nte Differential von tang. x zu finden, wenn dx, oder kein Differential als beſtändig angenommen wird.

Auflöſung. 1) Es iſt $\text{tang}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\,(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{2}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}\right)$$

also $d^n \text{tang}\,x = -\dfrac{2}{\sqrt{-1}}\, d^n \left(\dfrac{1}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}\right)$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-1}}\, d^n \left(1 - e^{2x\sqrt{-1}} + e^{4x\sqrt{-1}} - e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots\right)$$

v) Dieſe Summation habe ich anderswo bewieſen. (Verſuch einer neuen Summationsmethode. S. 71) Sie iſt eine Folge aus einer allgemeinen, welche ebendaſelbſt (S. 69) vorkommt. Ueber die Größen A^I, A^{II}, A^{III}, . . . , welche auch ſonſt bey Summationen gebraucht werden, vergl. L. Euleri Inſtitt. Calc. Diff. P. II. Cap. VII. §. 173. Die hieſigen Ausdrücke ſind von den dortigen verſchieden, durch die Hindenburgiſchen Zeichen der Binomialcoefficienten.

Wird nun dx als beständig angenommen, so ist $d^n e^{\alpha x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x\sqrt{-1}}(\alpha\sqrt{-1})^n dx^n$, folglich unter eben dieser Voraussetzung,

$$\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} = \frac{2}{\sqrt{-1}}(\sqrt{-1})^n(2^n e^{2x\sqrt{-1}} - 4^n e^{4x\sqrt{-1}} + 6^n e^{6x\sqrt{-1}} - \ldots)$$

$$= 2^{n+1}(\sqrt{-1})^{n+1}(-e^{2x\sqrt{-1}} + 2^n e^{4x\sqrt{-1}} - 3^n e^{6x\sqrt{-1}} + \ldots)$$

2) Die unendliche Reihe, durch welche $\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n}$ ausgedrückt ist, läßt sich nach dem vorhergehenden Lehnsatze (§. 17) summiren: wenn das dortige $p = -e^{2x\sqrt{-1}}$ gesetzt wird, so ist $\frac{1}{1-p} = \frac{1}{1+e^{2x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}}}$

$= \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2\cos x}$; also $\frac{d^n \operatorname{tang} x}{dx^n} =$

$\frac{(\sqrt{-1})^{n+1}}{\cos x^{n+1}.(-1)^n} \cdot e^{-(n+1)x\sqrt{-1}}$ multiplicirt in

$(A^N e^{2nx\sqrt{-1}} - A^{N-1} e^{2(n-1)x\sqrt{-1}} + A^{N-2} e^{2(n-2)x\sqrt{-1}} - \ldots)$

$$= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{n-1}.\cos x^{n+1}} \begin{pmatrix} A^N e^{(n-1)x\sqrt{-1}} - A^{N-1} e^{(n-3)x\sqrt{-1}} \\ + A^{N-2} e^{(n-5)x\sqrt{-1}} - \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{-1})^{n-1}.\cos x^{n+1}} \begin{Bmatrix} A^N \cos(n-1)x - A^{N-1}\cos(n-3)x \\ + A^{N-2}\cos(n-5)x - \ldots \\ + \sqrt{-1}\,[A^N \sin(n-1)x \\ - A^{N-1}\sin(n-3)x \\ + A^{N-2}\sin(n-5)x - \ldots] \end{Bmatrix}$$

3) Um diese Ausdrücke auf eine mögliche Form zu bringen, ist zuerst zu bemerken, daß in der Reihe der Größen A^I, A^{II}, A^{III}, . . A^N, je zwey Glieder einander gleich

sind, deren eins vom Anfang so weit absteht, als das andre vom Ende: also $A^{I} = A^{N}$, $A^{II} = A^{N-1}$, $A^{III} = A^{N-2}$, u. s. w. Zugleich sind die Bögen, deren Sinusse oder Cosinusse bey der Formel für $d^n \operatorname{tang} x$ (2) in zwey solche Bögen multiplicirt sind, einander entgegengesetzt, sonst gleich. Nun sind zwey Fälle zu unterscheiden.

a) Es sey n eine ungerade Zahl $= 2r-1$, so heben sich in (2) die Glieder, welche Sinusse enthalten, gegenseitig auf: wenn man dagegen die Glieder mit Cosinussen, je zwey und zwey verbindet, da denn das mittlere allein übrig bleibt, so ergiebt sich

$$\frac{d^{2r-1} \operatorname{tang} x}{dx^{2r-1}} = \pm \frac{\left(\begin{array}{l} 2A' \cos 2(r-1)x - 2A'' \cos 2(r-2)x \\ +2A''' \cos 2(r-3)x \ldots \pm 2A^{r-1} \cos x + A^{r} \end{array}\right)}{\cos x^{2r}}$$

$$= \frac{\left(\begin{array}{l} A^{r} - 2A^{r-1} \cos 2x + 2A^{r-2} \cos 4x \\ -2A^{r-3} \cos 6x \ldots \pm 2A' \cos 2(r-1)x \end{array}\right)}{\cos x^{2r}}$$

4) Es sey.

b) n eine gerade Zahl $= 2r$, so heben sich die Glieder mit Cosinussen gegenseitig auf, und die mit Sinussen lassen sich combiniren; so wird

$$\frac{d^{2r} \operatorname{tang} x}{dx^{2r}} = \pm 2 \frac{\left(\begin{array}{l} A' \sin(2r-1)x - A'' \sin(2r-3)x \\ +A''' \sin(2r-5)x \ldots \pm A^{r} \sin x \end{array}\right)}{\cos x^{2r+1}}$$

$$= \frac{2\left(\begin{array}{l} A^{r} \sin x - A^{r-1} \sin 3x + A^{r-2} \sin 5x \\ - \ldots \pm A' \sin(2r-1)x \end{array}\right)}{\cos x^{2r+1}}$$

Die Coefficienten A', A'', A''', . . . mit ihrem Gesetz, sind aus §. (17) bekannt, wo für (a), $n = 2r-1$; für (b), $n = 2r$; zu setzen ist.

5) Nachdem auf diese Weise die höhern Differentiale von $\text{tang}\, x$ bestimmt sind, für ein beständiges dx, so folgt, ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential,

$$d^n \text{tang}\, x = X' P x n + \frac{X''}{1.2} P^2 x\,(n-1) + \frac{X'''}{1.2.3} P^3 x\,(n-2) + \ldots \text{ (§. 4)}$$

§. 19. Zusatz. Von $\text{cotang}\, x$ lassen sich die höhern Differentialien aus den vorhergehenden Formeln leicht ableiten, wenn man $\frac{\pi}{2} - x$ anstatt x setzt: so verwandeln sich $\cos x$; $\cos 2x$; $\cos 4x$; $\cos 6x$; ... in $\sin x$; $-\cos 2x$; $+\cos 4x$; $-\cos 6x$; .... und $\sin x$; $\sin 3x$; $\sin 5x$; ... in $\cos x$; $-\cos 3x$; $+\cos 5x$; ... Folglich wird, dx als beständig angenommen.

a) $$\frac{d^{2r-1}\,\text{cotang}\, x}{dx^{2r-1}} = \frac{-\left(\begin{matrix} A^r + 2A^{r-1}\cos 2x + 2A^{r-2}\cos 4x \\ +2A^{r-3}\cos 6x \ldots + 2A'\cos 2(r-1)x \end{matrix}\right)}{\sin x^{2r}}$$

und b) $$\frac{d^{2r}\,\text{cotang}\, x}{dx^{2r}} = \frac{2\left(\begin{matrix} A^r\cos x + A^{r-1}\cos 3x + A^{r-2}\cos 5x \\ + \ldots + A'\cos\,(2r-1)x \end{matrix}\right)}{\sin x^{2r+1}}$$

§. 20. **Aufgabe. Das nte Differential von cosec. x und sec. x zu finden, wenn dx, oder kein Differential als beständig angenommen wird.**

Auflösung. 1) Es ist $\text{tang}x + \text{cotang}x = \frac{1+\text{tang}^2 x}{\text{tang}\, x}$

$= \frac{\text{tang}\, x}{\sin x^2} = \frac{1}{\sin x . \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$, also $\frac{1}{\sin x} = \text{cosec}\, x$

$= \frac{1}{2}(\text{tang}\frac{1}{2}x + \text{cotang}\frac{1}{2}x)$.

Vermittelst dieser Gleichung ist gegenwärtige Aufgabe auf die vorhergehende (§. 18) reducirt. Es wird demnach, für ein beständiges dx,

a) $\frac{2^{2r} d^{2r-1} \text{cosec.}\, x}{dx^{2r-1}}$

$= \frac{\left(\begin{matrix} A^r - 2A^{r-1}\cos x + 2A^{r-2}\cos 2x \\ - 2A^{r-3}\cos 3x \ldots + 2A'\cos(r-1)x \end{matrix}\right)}{(\cos\frac{1}{2}x)^{2r}}$

$- \frac{\left(\begin{matrix} A^r + 2A^{r-1}\cos x + 2A^{r-2}\cos 2x \\ + 2A^{r-3}\cos 3x + \ldots + 2A'\cos(r-1)x \end{matrix}\right)}{(\sin\frac{1}{2}x)^{2r}}$

b) $\frac{2^{2r} d^{2r} \text{cosec}\, x}{dx^{2r}} =$

$\frac{\left\{\begin{matrix} A^r \sin\frac{x}{2} - A^{r-1}\sin\frac{3x}{2} + A^{r-2}\sin\frac{5x}{2} \\ - A^{r-3}\sin\frac{7x}{2} + \ldots \pm A'\sin\left(\frac{2r-1}{2}\right)x \end{matrix}\right\}}{(\cos\frac{1}{2}x)^{2r+1}}$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} A^r \operatorname{cof}\frac{x}{2} + A^{r-1}\operatorname{cof}\frac{3x}{2} + A^{r-2}\operatorname{cof}\frac{5x}{2} \\ + \ldots + A'\operatorname{cof}\frac{(2r-1)x}{2} \end{array}\right\}}{(\operatorname{sin}\frac{1}{2}x)^{2r+1}}$$

Andere gleichgeltende Ausdrücke folgen aus der Gleichung: $\operatorname{cosec.} x = \operatorname{cotang}\frac{1}{2}x - \operatorname{cotang} x$.

2) Setzt man für x, $\frac{\pi}{2} - x$, so ergiebt sich aus (1) $d^n \operatorname{sec.} x$, für ein beständiges dx.

3) Von $\operatorname{cosec.} x$ und $\operatorname{sec.} x$ lassen sich dann ferner die höhern Differentialien, ohne Rücksicht auf ein beständiges, durch die Formel §. (4) ausdrücken.

VI.

Auflösung einiger verwickelteren Coefficientengleichungen [a]).

§. 1. Aufgabe.

Zwischen den Coefficienten zweyer Reihen p, q, und der Potenzen der letztern, finde für jedes unbestimmte n folgendes Verhalten statt:

$$p\varkappa n = q\varkappa n + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1) + \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa(n-2) + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} q^n\varkappa 1$$

Man soll die Coefficienten von q durch die Coefficienten der Reihe p und ihrer Potenzen ausdrücken: oder die gegebene Coefficientengleichung nach q auflösen.

Auflösung. 1) Um den Sinn dieser Aufgabe deutlicher einzusehen, besonders sich zu überzeugen, daß und wie sie bestimmt sey: wird es nicht undienlich seyn, die ersten Coefficienten von q durch Hülfe des folgenden recurrirenden Verfahrens zu bestimmen. Zuerst ist für $n=1$, $p\varkappa 1 = q\varkappa 1$, also $q\varkappa 1$ bestimmt.

a) Man vergleiche E. S. c. a. A. S. 144—152, ingl. Arch. der Math. H. VII. S. 350, 351. S.

Ferner wird für $n=2$, $p\varkappa 2 = q\varkappa 2 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 1$,

also $q\varkappa 2 = p\varkappa 2 - \frac{1}{1.2} q\varkappa 1$. Aber aus dem gefundenen $q\varkappa 1$ folgt $q^2\varkappa 1 = (q\varkappa 1)^2 = (p\varkappa 1)^2 = p^2\varkappa 1$; demnach wird $q\varkappa 2 = p\varkappa 2 - \frac{1}{2} p^2\varkappa 1$. So ist der 2te Coefficient bestimmt.

Für $n=3$ ergiebt sich $p\varkappa 3 = q\varkappa 3 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2$

$+ \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1$, oder $q\varkappa 3 = p\varkappa 3 - \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2 - \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1$.

Aber durch die beyden ersten Coefficienten von q sind eben so viel jeder Potenz von q bestimmt [b]). Es ist nehmlich

$q^3\varkappa 1 = (q\varkappa 1)^3 = (p\varkappa 1)^3 = p^3\varkappa 1$; $q^2\varkappa 2 = \frac{2q\varkappa 2 . q^2\varkappa 1}{q\varkappa 1}$

$= 2q\varkappa 2 . q\varkappa 1 = (2p\varkappa 2 - p^2\varkappa 1)\, p\varkappa 1 = 2p\varkappa 2 . p\varkappa 1 - p^2\varkappa 1 . p\varkappa 1$

$= p^2\varkappa 2 - p^3\varkappa 1$; folglich wird $q\varkappa 3 = p\varkappa 3 - \frac{1}{2}(p^2\varkappa 2 - p^3\varkappa 1)$

$- \frac{1}{2.3} p^3\varkappa 1 = p\varkappa 3 - \frac{1}{2} p^2\varkappa 2 + \frac{1}{3} p^3\varkappa 1$.

So läßt sich fortfahren, und es erhellt leicht, daß auf diese Art nach und nach jeder Coefficient der Reihe q nach der Ordnung durch p bestimmt werde. Man setze, es seyen die Coefficienten von q, vom 1sten bis zum $(n-1)$ten bereits gefunden, so folgen daraus eben so viel Coefficienten der Potenzen von q, und es ergiebt sich dann auch der nte Coefficient von q, nehmlich aus der angenommenen Gleichung,

b) Weil nach der Localformel für das Polynomium q,

$$q^m\varkappa(n+1) = \left\{\begin{matrix} (m-n+1)q\varkappa 2 . q^m\varkappa n \\ +(2m-n+2)q\varkappa 3 . q^m\varkappa(n+1) \\ +\ldots+ mnq\varkappa(n+1) . q^m\varkappa 1 \end{matrix}\right\} : nq\varkappa 1$$

$$q\varkappa n = p\varkappa n - \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1)$$

$$- \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa(n-2) \ldots - \frac{1}{1\ldots n} q^n\varkappa 1$$

wo rechts des Gleichheitszeichens alles gegeben ist.

3) Anstatt dieses weitläufigen Verfahrens dient nun folgendes ungleich kürzeres, wodurch man auf einmal einen allgemeinen Ausdruck für $q\varkappa n$ erhält. Da es willkührlich ist, nach welcher veränderlichen Größe, und nach welchen Exponenten (in arithmetischer Progression) die Reihe q fortgehe, so setze man

$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$

Daher wird $q^r = q^r\varkappa 1.x^r + q^r\varkappa 2.x^{r+1} + q^r\varkappa 3.x^{r+2} + \ldots + q^r\varkappa n.x^{r+n-1} + \ldots$.

Nun betrachte man folgende Reihe:

$$q + \frac{q^2}{1.2} + \frac{q^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{q^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

deren Summe bekanntlich $= e^q - 1$ ist, so wird, q durch x ausgedrückt,

$$e^q - 1 = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 1 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2 + \ldots + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1 + \ldots + \frac{1}{1\ldots 3} q^3\varkappa(n-2)$$

$$+ \ldots + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1\ldots n} q^n\varkappa 1$$

also $(e^q-1)\varkappa n = q\varkappa n + \frac{1}{1.2}q^2\varkappa(n-1) + \ldots + \frac{1}{1..n}q^n\varkappa 1$ $= p\varkappa n$. Man darf daher die andere Reihe $p = e^q-1$ setzen [c]). So wird $e^q = p+1$, und $q = \log(p+1)$ $= p - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{4}p^4 + \ldots$ Setzt man hier für q und p die Reihen nach x, so erhält man sogleich $q\varkappa n = p\varkappa n$ $- \frac{1}{2}p^2\varkappa(n+1) + \frac{1}{3}p^3\varkappa(n-2) - \ldots \pm \frac{1}{n}p^n\varkappa 1$, welches der verlangte Ausdruck für einen unbestimmten Coefficienten der Reihe q ist: womit auch die in (1) berechneten Beyspiele für $n = 1, 2, 3$ übereinstimmen.

§. 2. Zusatz. Für die Scale und den Index

$$p\begin{pmatrix} a & ; & b & , & c & , & d & \ldots \\ 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

ist also $q\varkappa n = a^nA - \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC - \frac{1}{4}b^nD \ldots \pm \frac{1}{n}n^nN$

Nimmt man bey der vorigen Scale den Index

$$\begin{pmatrix} -a & , & -b & , & -c & , & -d & \ldots \\ 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

so wird $-q\varkappa n = a^nA + \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC \ldots + \frac{1}{n}n^nN$

$$= \frac{i^n \mathfrak{J}^n}{n}$$ [d]).

c) Nicht, man muß. Die angenommene Coefficientengleichung ist nehmlich gar nicht mit der Reihengleichung $e^q - 1 = p$ identisch, weil ja p und q nach andern Exponenten, als die hier angenommenen sind, selbst nach verschiedenen veränderlichen Größen fortschreiten können. Aber was aus einer speciellen Reihengleichung in Rücksicht des Coefficienten hergeleitet wird, gilt allgemein von der Coefficientengleichung.

d) Von diesem Hindenburgischen Zeichen, H. v. Prasse, Usus Log. Infinit. in Theor. aequat. §. XX. p. 19.

§. 3. Aufgabe. Die Coefficientengleichung:

$$p\times n = q\times n - \frac{1}{1.2.3}q^3\times(n-1) + \frac{1}{1.2..5}q^5\times(n-2)\ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2..2n-1}q^{2n-1}\times 1$$

nach q aufzulösen.

Auflösung. 1) Anstatt das weitläufige Verfahren (§. 2; 1, 2) hier zu wiederholen, welches doch nur zur Erläuterung gebraucht worden, kann man sogleich ein dem andern (3) ähnliches Verfahren gebrauchen.

Man setze also

$$q = q\times 1.x + q\times 2.x^3 + q\times 3.x^5 + \ldots + q\times n.x^{2n-1} + \ldots$$

folglich $q^r = q^r\times 1.x^r + q^r\times 2.x^{r+2} + q^r\times 3.x^{r+4} + \ldots + q^r\times n.x^{r+2n-2} + \ldots$

Nun betrachte man die Reihe

$$\sin q = q - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^5}{1..5} - \frac{q^7}{1..7} + \ldots \pm \frac{q^{2n-1}}{1.2.3..2n-1} \mp \ldots$$

so wird q durch x ausgedrückt

$$\sin q = q\times 1.x + q\times 2.x^3 + q\times 3.x^5 + \ldots + q\times n.x^{2n-1}$$
$$- \frac{1}{1.2.3}q^3\times 1 - \frac{1}{1.2.3}q^3\times 2 - \frac{1}{1.2.3}q^3\times(n-1) + \text{etc}$$
$$+ \frac{1}{1..5}q^5\times 1 + \frac{1}{1..5}q^5\times(n-2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2..2n-1}q^{2n-1}\times 1$$

also $(\sin q)\times n = p\times n$.

2) Man darf daher $p = \sin q$ setzen. Daraus wird

$$q = \text{Arc. sin. } p = p + \tfrac{1}{2}\frac{p^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{p^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{p^7}{7} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n-2}\frac{p^{2n-1}}{2n-1}$$

also, q und p durch x ausgedrückt,

$$qxn = pxn + \frac{1}{2.3}p^3x(n-1) + \frac{1.3}{2.4.5}p^5x(n-2) + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}p^7x(n-3) + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)(2n-1)}p^{2n-1}x\text{I}$$

§. 4. Zusatz. Für Scale und Zeiger

$$p\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

ist also $qxn = a^nA + \frac{1}{2.3}c^{n+1}C + \frac{1.3}{2.4.5}b^{n+2}D + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}e^{n+3}E + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)(2n-1)}\,{}^{n-1}_{2n+1}\mathcal{N}^{n-1}$

wo die Distanzexponenten $n-1$ im letztern Gliede über $\mathcal{N}$ und n, die $(n-1)$te Combinationsclasse nach der nten, d. i. die $(2n-1)$te Classe, und den $(2n-1)$ten Polynomialcoefficienten andeuten. Man könnte auch so schreiben: $\frac{n-1}{n^n\mathcal{N}}$ wo der Distanzexponent sich auf alle drey, den Polynomialcoefficienten, die Classe und die Summte bezöge.

§. 5. Aufgabe. Die Coefficientengleichung

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa(n-1) + Q\varkappa 3.q^{a+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q\varkappa n.q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

nach q aufzulösen.

Auflösung. 1) Da die veränderlichen Größen, nach welchen die Reihen p. q, Q fortgehen, so wie die Exponenten willkührlich können angenommen werden, so setze man

$$p = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots + p\varkappa n.x^{a+(n-1)d} + \ldots$$
$$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^{1+d} + q\varkappa 3.x^{1+2d} + \ldots + q\varkappa n.x^{1+(n-1)d} + \ldots$$
$$Q = Q\varkappa 1.q^{a} + Q\varkappa 2.q^{a+d} + Q\varkappa 3.q^{a+2d} + \ldots + Q\varkappa n.q^{a+(n-1)d} + \ldots$$

2) Drückt man in der dritten Reihe die Potenzen von q durch x nach der 2ten Reihe aus, da nehmlich

$$q^{r} = q^{r}\varkappa 1.x^{r} + q^{r}\varkappa 2.x^{r+d} + q^{r}\varkappa 3.x^{r+2d} + \ldots\ldots$$

so wird

$$Q = Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 1.x^{a} + Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 2.x^{a+d} + Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots$$
$$+ Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa 1 \quad + Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa 2$$
$$+ Q\varkappa 3.q^{a+2d}\varkappa 1$$

d. i. wenn man, was in einerley Potenz von x multiplicirt ist, vermöge der angenommenen Gleichung verändert,

$$Q = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots = p.$$

3) Nun wird aus der dritten Reihe in (1) durch Umkehrung

$$q^{s} = \frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.Q^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.Q^{\frac{s+d}{a}}$$
$$+ \frac{s}{s+2d}\,Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.Q^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots.$$

$$\text{also} = \frac{s}{s}\, Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d}\, Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}$$

$$+ \frac{s}{s+2d}\, Q^{\frac{-s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots .$$

Setzt man hier für die Potenzen von p ihre Reihen nach x, wo

$$p^{\sigma} = p^{\sigma} \varkappa 1 . x^{a\sigma} + p^{\sigma} \varkappa 2 . x^{a\sigma+d} + p^{\sigma} \varkappa 3 . x^{a\sigma+2d} + \ldots .$$

so ergiebt sich

$$q^{s} = \frac{s}{s}\, Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 1 . x^{s}$$

$$+ \frac{s}{s}\, Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 2 . x^{s+d} \;\Big|\; + \frac{s}{s}\, Q^{\frac{+s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 3 . x^{s+2d}$$

$$+ \frac{s}{s+d}\, Q^{\frac{+s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa 1 \;\Big|\; + \frac{s}{s+d}\, Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa 2$$

$$\Big|\; + \frac{s}{s+2d}\, Q^{\frac{+s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{+s+2d}{a}} \varkappa 1$$

also wird $q^{s} \varkappa n =$

$$\frac{s}{s}\, Q^{\frac{+s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa n + \frac{s}{s+d}\, Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa (n-1)$$

$$+ \frac{s}{s+2d}\, Q^{\frac{+s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}} \varkappa (n-2) + \text{etc} . .$$

$$+ \ldots . + \frac{s}{s+(n-1)d}\, Q^{\frac{+s-(n-1)d}{a}} \varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}} \varkappa 1$$

So ist mithin der unbestimmte Coefficient nicht bloß von q; sondern von jeder Potenz von q durch bekannte Größen ausgedrückt. Ob nun gleich dieser Ausdruck aus der speciellen Voraussetzung (1) hergeleitet worden, so gilt er doch allgemein.

§. 6. Aufgabe. Die vorige Gleichung nach Q a
zulösen.

Auflösung. 1) Den vorigen Schlüssen gemäß, se
man wieder $p = Q$, so wird $p^s = Q^s$

d. i. $p^s\varkappa 1 . x^{sa} + p^s\varkappa 2 . x^{sa+d} + p^s\varkappa 3 . x^{sa+2d} + \ldots$

$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$

2) Nun wird aus der für q angenommenen Reihe durch
Umkehrung

$$x^\sigma = \frac{\sigma}{\sigma} q^{-\sigma}\varkappa 1 . q^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma+d} q^{-\sigma-d}\varkappa 2 . q^{\sigma+d} + \frac{\sigma}{\sigma+2d} q^{-\sigma-2d}\varkappa 3 . q^{\sigma+2d} + \ldots$$

Drückt man demnach die Potenzen von x in der Glei-
chung (1) durch q aus, so wird

$$p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa} q^{-sa}\varkappa 1 . q^{sa}$$

$$+ p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 2 . q^{sa+d} \quad + p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$$

$$+ p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 1 \quad + p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 2$$

$$+ p^s\varkappa 3 . \frac{(sa+2d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 1$$

$$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$$

Was zu einerley Potenz von q gehört, beyderseits
gleichgesetzt, ergiebt sich

$$Q^s x n = \frac{1}{sa+(n-1)d} \text{ multiplicirt in}$$

$$\left.\begin{aligned} sa.\, p^s x 1.\, q^{sa+(n-1)d} x n + (sa+d)\, p^s x 2.\, q^{sa+(n-1)d} x (n-1) \\ + (sa+2d)\, p^s x 3.\, q^{sa+(n-1)d} x (n-2) \\ + \ldots\ldots\ldots \\ + [sa+(n-1)d]\, p^s x n.\, q^{sa+(n-1)d} x 1 \end{aligned}\right\}$$

§. 7. Zusatz. In der Gleichung §. 6, 1 drücke man die Potenzen von q durch x aus, da nehmlich

$$q^{\varrho} = q^{\varrho} x 1 . x^{\varrho} + q^{\varrho} x 2 . x^{\varrho+d} + q^{\varrho} x 3 . x^{\varrho+2d} + \ldots\ldots,$$

wird

$$p^s x 1 . x^{sa} + p^s x 2 . x^{sa+d} + p^s x 3 . x^{sa+2d} + \ldots\ldots$$

$$= Q^s x 1 . q^{sa} x 1 . x^{sa} \left| \begin{array}{l} + Q^s x 1 . q^{sa} x 2 . x^{sa+d} \\ + Q^s x 2 . q^{sa+d} x 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} + Q^s x 1 . q^{sa} x 3 . x^{sa+2d} + \ldots \\ + Q^s x 2 . q^{sa+d} x 2 \\ + Q^s x 3 . q^{sa+2d} x 1 \end{array} \right.$$

folglich,

$$p^s x n = Q^s x 1 . q^{sa} x n + Q^s x 2 . q^{sa+d} x (n-1) + Q^s x 3 . q^{sa+2d} x (n-2) + \ldots\ldots + Q^s x n . q^{sa+(n-1)d} x 1$$

Es läßt sich demnach aus der angenommenen Gleichung für pxn folglich eine ähnliche Formel für den unbestimmten Coefficienten jeder Potenz von p herleiten. Aus §. 5, 6, 7, ergiebt sich folgender Satz.

§. 8. Satz. Wenn zwischen den Coefficienten dreyer Reihen p, q, Q, für jedes n, folgendes Verhalten statt findet:

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1 . q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2 . q^{a+d}\varkappa (n-1) + Q\varkappa 3 . q^{a+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q\varkappa n . q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

so wird auch ſeyn für jeden Exponenten s,

1) $$p^{s}\varkappa n = Q^{s}\varkappa 1 . q^{sa}\varkappa n + Q^{s}\varkappa 2 . q^{sa+d}\varkappa (n-1) + Q^{s}\varkappa 3 . q^{sa+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q^{s}\varkappa n . q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

2) $$q^{s}\varkappa n = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa (n-1) + \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa (n-2) + \ldots + \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

3) $$Q^{s}\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d}$$ multiplicirt in

$$\left\{ \begin{array}{l} sap^{s}\varkappa 1 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)\, p^{s}\varkappa 2 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa (n-1) \\ + (sa+2d)\, p^{s}\varkappa 3 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa (n-2) + \ldots \\ + [sa+(n-1)d]\, p^{s}\varkappa n . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1. \end{array} \right\}$$

VII.

Entwickelung des Beweiſes für die Reverſionsformel von La Grange, in ſeiner Théorie des fonctions analytiques §. 97 u. f. nebſt einigen Zuſätzen; von.

M. Johann Wilhelm Pfaff.

Inhaltsanzeige.

§. 1. Erklärung einiger Zeichen.
§. 2. Erſtes Problem. $z=x+yfz$; man ſucht z. Auflöſung von La Grange.
§. 2—5. Entwickelung obiger Auflöſung.
§. 6. Zweytes Problem. Man ſucht φz, wenn z aus §. 2 bekannt iſt. Auflöſung von La Grange §. 98.
§. 7—8. Entwickelung dieſer Auflöſung.
§. 9. Auflöſung vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes.
§. 10. 11. Zuſätze.
§. 12. 13. Drittes Problem. Man ſucht φz ohne daß z als bekannt aus §. 2. angenommen wird. Auflöſung von La Grange und Entwickelung §. 99.
§. 15. 16. Viertes Problem. $z=t+xfz+yFz$. Man ſucht φz.
§. 17 18. 19. Probleme aus der Differentialrechnung, vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis auflösbar, welche im Zuſammenhange mit dem Reverſionsproblem ſtehen.
§. 20. Das Allgemeine in dem Verf. von La Grange. §. 100 ſqq.
§. 21. Allgemeineres Problem, nebſt einem Beyſpiele aus La Grange §. 165. 166.

§. 1.

Ich habe mich im Folgenden der gewöhnlichen Zeichen der Differentialrechnung bedienet. Sie hängen, wie es ſcheint, mit den Begriffen, auf welchen gewöhnlich jene Rechnung gegründet wird, gut zuſammen: La grange, der jene Begriffe verläßt, hat auch die Zeichen in ſeiner Schrift nicht beybehalten. Zur Vergleichung, ohne die Theorie darzuſtellen, dient alſo Folgendes.

$$q\varkappa n = p\varkappa n - \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1)$$

$$- \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa(n-2) \ldots - \frac{1}{1\ldots n} q^n\varkappa 1$$

wo rechts des Gleichheitszeichens alles gegeben ist.

3) Anstatt dieses weitläufigen Verfahrens dient nun folgendes ungleich kürzeres, wodurch man auf einmal einen allgemeinen Ausdruck für $q\varkappa n$ erhält. Da es willkührlich ist, nach welcher veränderlichen Größe, und nach welchen Exponenten (in arithmetischer Progression) die Reihe q fortgehe, so setze man

$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$

Daher wird $q^r = q^r\varkappa 1.x^r + q^r\varkappa 2.x^{r+1} + q^r\varkappa 3.x^{r+2} + \ldots + q^r\varkappa n.x^{r+n-1} + \ldots$

Nun betrachte man folgende Reihe:

$$q + \frac{q^2}{1.2} + \frac{q^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{q^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

deren Summe bekanntlich $= e^q - 1$ ist, so wird, q durch x ausgedrückt,

$$e^q - 1 = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^2 + q\varkappa 3.x^3 + \ldots + q\varkappa n.x^n + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 1 + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa 2 + \ldots + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3} q^3\varkappa 1 + \ldots + \frac{1}{1\ldots 3} q^3\varkappa(n-2)$$

$$+ \ldots + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1\ldots n} q^n\varkappa 1$$

also $(e^q-1)\varkappa n = q\varkappa n + \frac{1}{1.2} q^2\varkappa(n-1) + \ldots + \frac{1}{1..n} q^n\varkappa 1$

$= p\varkappa n$. Man darf daher die andere Reihe $p = e^q - x$ setzen [c]). So wird $e^q = p+1$, und $q = \log(p+1)$ $= p - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{4}p^4 + \ldots$ Setzt man hier für q und p die Reihen nach x, so erhält man sogleich $q\varkappa n = p\varkappa n$ $- \frac{1}{2}p^2\varkappa(n+1) + \frac{1}{3}p^3\varkappa(n-2) - \ldots \pm \frac{1}{n} p^n\varkappa 1$, welches der verlangte Ausdruck für einen unbestimmten Coefficienten der Reihe q ist: womit auch die in (1) berechneten Beyspiele für $n = 1, 2, 3$ übereinstimmen.

§. 2. Zusatz. Für die Scale und den Index

$$p\begin{pmatrix} a\,; & b\,, & c\,, & d\,\ldots \\ 1\,, & 2\,, & 3\,, & 4\,\ldots \end{pmatrix}$$

ist also $q\varkappa n = a^nA - \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC - \frac{1}{4}b^nD \ldots \pm \frac{1}{n} n^n\mathcal{N}$

Nimmt man bey der vorigen Scale den Index

$$\begin{pmatrix} -a\,, & -b\,, & -c\,, & -d\,\ldots. \\ 1\,, & 2\,, & 3\,, & 4\,\ldots. \end{pmatrix}$$

so wird $-q\varkappa n = a^nA + \frac{1}{2}b^nB + \frac{1}{3}c^nC \ldots, + \frac{1}{n} n^n\mathcal{N}$

$$= \frac{i^n\mathfrak{J}^r}{n}$$ [d]).

c) Nicht, man muß. Die angenommene Coefficientengleichung ist nehmlich gar nicht mit der Reihengleichung $e^q - 1 = p$ identisch, weil ja p und q nach andern Exponenten, als die hier angenommenen sind, selbst nach verschiedenen veränderlichen Größen fortschreiten können. Aber was aus einer speciellen Reihengleichung in Rücksicht des Coefficienten hergeleitet wird, gilt allgemein von der Coefficientengleichung.

d) Von diesem Hindenburgischen Zeichen, H. v. Prasse, Usus Log. Infinit. in Theor. aequat. §. XX. p. 19.

§. 3. Aufgabe. Die Coefficientengleichung:

$$p\times n = q\times n - \frac{1}{1.2.3}q^3\times(n-1) + \frac{1}{1.2..5}q^5\times(n-2)\ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2..2n-1}q^{2n-1}\times 1$$

nach q aufzulösen.

Auflösung. 1) Anstatt das weitläufige Verfahren (§. 2; 1, 2) hier zu wiederholen, welches doch nur zur Erläuterung gebraucht worden, kann man sogleich ein dem andern (3) ähnliches Verfahren gebrauchen.

Man setze also

$$q = q\times 1.x + q\times 2.x^3 + q\times 3.x^5 + \ldots + q\times n.x^{2n-1} + \ldots$$

folglich $q^r = q^r\times 1.x^r + q^r\times 2.x^{r+2} + q^r\times 3.x^{r+4} + \ldots + q^r\times n.x^{r+2n-2} + \ldots$

Nun betrachte man die Reihe

$$\sin q = q - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^5}{1..5} - \frac{q^7}{1..7} + \ldots \mp \frac{q^{2n-1}}{1.2.3..2n-1} \mp \ldots$$

so wird q durch x ausgedrückt

$$\sin q = q\times 1.x + q\times 2.x^3 + q\times 3.x^5 + \ldots + q\times n.x^{2n-1}$$
$$- \frac{1}{1.2.3}q^3\times 1 - \frac{1}{1.2.3}q^3\times 2 - \frac{1}{1.2.3}q^3\times(n-1) + \text{etc}$$
$$+ \frac{1}{1..5}q^5\times 1 + \frac{1}{1..5}q^5\times(n-2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2..2n-1}q^{2n-1}\times 1$$

also $(\sin q)\times n = p\times n$.

2) Man darf daher $p = \sin q$ setzen. Daraus wird

$$q = \text{Arc. fin. } p = p + \tfrac{1}{2}\frac{p^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{p^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{p^7}{7} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n-2}\frac{p^{2n-1}}{2n-1}$$

also, q und p durch x ausgedrückt,

$$qxn = pxn + \frac{1}{2.3}p^3x(n-1) + \frac{1.3}{2.4.5}p^5x(n-2) + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}p^7x(n-3) + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)(2n-1)}p^{2n-1}x1$$

§. 4. Zusatz. Für Scale und Zeiger

$$p\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

ist also $qxn = a^nA + \frac{1}{2.3}c^{n+1}C + \frac{1.3}{2.4.5}b^{n+2}D + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}e^{n+3}E + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)(2n-1)}\,{}^{n-1}_{2n+1}\mathcal{N}^{n-1}_{n}$

wo die Distanzexponenten $n-1$ im letztern Gliede über $\mathcal{N}$ und n, die $(n-1)$te Combinationsclasse nach der nten, d. i. die $(2n-1)$te Classe, und den $(2n-1)$ten Polynomialcoefficienten andeuten. Man könnte auch so schreiben: $\frac{n-1}{n^n\mathcal{N}}$ wo der Distanzexponent sich auf alle drey, den Polynomialcoefficienten, die Classe und die Summe bezöge.

§. 5. Aufgabe. Die Coefficientengleichung

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa(n-1) + Q\varkappa 3.q^{a+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q\varkappa n.q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

nach q aufzulösen.

Auflösung. 1) Da die veränderlichen Größen, nach welchen die Reihen p. q, Q fortgehen, so wie die Exponenten willkührlich können angenommen werden, so setze man

$$p = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots + p\varkappa n.x^{a+(n-1)d} + \ldots$$
$$q = q\varkappa 1.x + q\varkappa 2.x^{1+d} + q\varkappa 3.x^{1+2d} + \ldots + q\varkappa n.x^{1+(n-1)d} + \ldots$$
$$Q = Q\varkappa 1.q^{a} + Q\varkappa 2.q^{a+d} + Q\varkappa 3.q^{a+2d} + \ldots + Q\varkappa n.q^{a+(n-1)d} + \ldots$$

2) Drückt man in der dritten Reihe die Potenzen von q durch x nach der 2ten Reihe aus, da nehmlich

$$q^{r} = q^{r}\varkappa 1.x^{r} + q^{r}\varkappa 2.x^{r+d} + q^{r}\varkappa 3.x^{r+2d} + \ldots\ldots$$

so wird

$$Q = Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 1.x^{a} + Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 2.x^{a+d} + Q\varkappa 1.q^{a}\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots$$
$$+ Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa 1 \quad + Q\varkappa 2.q^{a+d}\varkappa 2$$
$$+ Q\varkappa 3.q^{a+2d}\varkappa 1$$

d. i. wenn man, was in einerley Potenz von x multiplicirt ist, vermöge der angenommenen Gleichung verändert,

$$Q = p\varkappa 1.x^{a} + p\varkappa 2.x^{a+d} + p\varkappa 3.x^{a+2d} + \ldots = p.$$

3) Nun wird aus der dritten Reihe in (1) durch Umkehrung

$$q^{s} = \frac{s}{s}\,Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1.Q^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d}\,Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2.Q^{\frac{s+d}{a}}$$
$$+ \frac{s}{s+2d}\,Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3.Q^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots\ldots$$

$$\text{also} = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}$$
$$+ \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}} + \ldots .$$

Setzt man hier für die Potenzen von p ihre Reihen nach x, wo

$$p^{\varrho} = p^{\varrho} \varkappa 1 . x^{a\varrho} + p^{\varrho} \varkappa 2 . x^{a\varrho+d} + p^{\varrho} \varkappa 3 . x^{a\varrho+2d} + \ldots .$$

so ergiebt sich

$$q^s = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 1 . x^s$$

$$+ \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 2 . x^{s+d} \quad \Big| \quad + \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa 3 . x^{s+2d}$$
$$+ \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa 1 \quad \Big| \quad + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa 2$$
$$\Big| \quad + \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}} \varkappa 1$$

also wird $q^s \varkappa n =$

$$\frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}} \varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}} \varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa (n-1)$$
$$+ \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}} \varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}} \varkappa (n-2) + \text{etc} . .$$
$$+ \ldots . + \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}} \varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}} \varkappa 1$$

So ist mithin der unbestimmte Coefficient nicht bloß von q; sondern von jeder Potenz von q durch bekannte Größen ausgedrückt. Ob nun gleich dieser Ausdruck aus der speciellen Voraussetzung (1) hergeleitet worden, so gilt er doch allgemein.

§. 6. Aufgabe. Die vorige Gleichung nach Q aufzulösen.

Auflösung. 1) Den vorigen Schlüssen gemäß, setzt man wieder $p = Q$, so wird $p^s = Q^s$

d. i. $p^s\varkappa 1 . x^{sa} + p^s\varkappa 2 . x^{sa+d} + p^s\varkappa 3 . x^{sa+2d} + \ldots\ldots$

$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots\ldots$

2) Nun wird aus der für q angenommenen Reihe durch Umkehrung

$$x^\sigma = \frac{\sigma}{\sigma} q^{-\sigma}\varkappa 1 . q^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma+d} q^{-\sigma-d}\varkappa 2 . q^{\sigma+d} + \frac{\sigma}{\sigma+2d} q^{-\sigma-2d}\varkappa 3 . q^{\sigma+2d} + \ldots$$

Drückt man demnach die Potenzen von x in der Gleichung (1) durch q aus, so wird

$$p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa} q^{-sa}\varkappa 1 . q^{sa}$$

$$+ p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 2 . q^{sa+d} \quad + p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$$

$$+ p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 1 \quad + p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 2$$

$$+ p^s\varkappa 3 . \frac{(sa+2d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 1$$

$$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots\ldots$$

Was zu einerley Potenz von q gehört, beyderseits gleichgesetzt, ergiebt sich

$$Q^s \varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d} \text{ multiplicirt in}$$

$$sa.p^s\varkappa 1.q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)p^s\varkappa 2.q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-1) + (sa+2d)p^s\varkappa 3.q^{-sa-(n-1)d}\varkappa(n-2) + \ldots + [sa+(n-1)d]p^s\varkappa n.q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1$$

§. 7. Zusatz. In der Gleichung §. 6, 1 drücke man die Potenzen von q durch x aus, da nehmlich

$$q^\varrho = q^\varrho\varkappa 1.x^\varrho + q^\varrho\varkappa 2.x^{\varrho+d} + q^\varrho\varkappa 3.x^{\varrho+2d} + \ldots,$$

so wird

$$p^s\varkappa 1.x^{sa} + p^s\varkappa 2.x^{sa+d} + p^s\varkappa 3.x^{sa+2d} + \ldots$$
$$= Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 1.x^{sa} \left| \begin{array}{l} + Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 2.x^{sa+d} \\ + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} + Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 3.x^{sa+2d} + \ldots \\ + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa 2 \\ + Q^s\varkappa 3.q^{sa+2d}\varkappa 1 \end{array}$$

folglich,

$$p^s\varkappa n = Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa n + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa(n-1) + Q^s\varkappa 3.q^{sa+2d}\varkappa(n-2) + \ldots + Q^s\varkappa n.q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

Es läßt sich demnach aus der angenommenen Gleichung für $p\varkappa n$ folglich eine ähnliche Formel für den unbestimmten Coefficienten jeder Potenz von p herleiten. Aus §. 5, 6, 7, ergiebt sich folgender Satz.

§. 8. Satz. Wenn zwischen den Coefficienten dreyer Reihen p, q, Q, für jedes n, folgendes Verhalten statt findet:

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1 . q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2 . q^{a+d}\varkappa (n-1) + Q\varkappa 3 . q^{a+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q\varkappa n . q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

so wird auch ſeyn für jeden Exponenten s,

1) $$p^{s}\varkappa n = Q^{s}\varkappa 1 . q^{sa}\varkappa n + Q^{s}\varkappa 2 . q^{sa+d}\varkappa (n-1) + Q^{s}\varkappa 3 . q^{sa+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q^{s}\varkappa n . q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

2) $$q^{s}\varkappa n = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa (n-1) + \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa (n-2) + \ldots + \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

3) $$Q^{s}\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d}$$ multiplicirt in

$$\left\{ \begin{array}{l} sap^{s}\varkappa 1 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)\, p^{s}\varkappa 2 . q^{-sa-(n-2)d}\varkappa (n-1) \\ + (sa+2d)\, p^{s}\varkappa 3 . q^{-sa-(n-3)d}\varkappa (n-2) + \ldots \\ + [sa+(n-1)d]\, p^{s}\varkappa n . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1. \end{array} \right\}$$

VII.

Entwickelung des Beweiſes für die Reverſionsformel von La Grange, in ſeiner Théorie des fonctions analytiques §. 97 u. f. nebſt einigen Zuſätzen; von

M. Johann Wilhelm Pfaff.

Inhaltsanzeige.

§. 1. Erklärung einiger Zeichen.
§. 2. Erſtes Problem. $z=x+yfz$; man ſucht z. Auflöſung von La Grange.
§. 2—5. Entwickelung obiger Auflöſung.
§. 6. Zweytes Problem. Man ſucht φz, wenn z aus §. 2 bekannt iſt. Auflöſung von La Grange §. 98.
§. 7—8. Entwickelung dieſer Auflöſung.
§. 9. Auflöſung vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes.
§. 10. 11. Zuſätze.
§. 12. 13. Drittes Problem. Man ſucht φz ohne daß z als bekannt aus §. 2. angenommen wird. Auflöſung von La Grange und Entwickelung §. 99.
§. 15. 16. Viertes Problem. $z=t+xfz+yFz$. Man ſucht φz.
§. 17 18. 19. Probleme aus der Differentialrechnung, vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis auflösbar, welche im Zuſammenhange mit dem Reverſionsproblem ſtehen.
§. 20. Das Allgemeine in dem Verf. von La Grange. §. 100 ſqq.
§. 21. Allgemeineres Problem, nebſt einem Beyſpiele aus La Grange §. 165. 166.

§. 1.

Ich habe mich im Folgenden der gewöhnlichen Zeichen der Differentialrechnung bedienet. Sie hängen, wie es ſcheint, mit den Begriffen, auf welchen gewöhnlich jene Rechnung gegründet wird, gut zuſammen: La grange, der jene Begriffe verläßt, hat auch die Zeichen in ſeiner Schrift nicht beybehalten. Zur Vergleichung, ohne die Theorie darzuſtellen, dient alſo Folgendes.

Wenn $y = \varphi x$; ſo iſt

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi' x = (\varphi x)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi'' x = (\varphi x)''$$

Eben ſo, wenn $z = \Phi(x,y)$ ſo iſt

$$z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi'(x,y) = \varphi'(x)$$

$$z_, = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \varphi_,(x,y) = \varphi'(y)$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = z^m{}_n = \varphi^m{}_n\,(x,y);$$

Ferner ſey $Q = F(x, y, z)$ einer Function von x, y und z, ſo iſt, wenn x, y, z unabhängig von einander ſind

$$dQ = \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}.dx + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dy + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dz$$

Und es bedeutet $\frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}$

das Differential jener Function in ſo fern x, unabhängig von den übrigen allein ſich ändert: welches man auch durch $\left(\frac{d.F'(x,y,z)}{dx}\right)$ ausdrückt, wenn x, y, z von einander unabhängig ſind:

Es ſey nun

$z = f(x, y)$; z abhängig von x und y.

ſo iſt

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

d. h. differentiirt in ſofern x, zugleich aber auch z, das von ihm abhängt, ſich ändert.

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und $$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = \left(\frac{d f(x,y)}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\delta . f(x,y)}{\delta y} = \left(\frac{d f(x,y)}{dy}\right)$$

da x und y von einander unabhängig ſind; und man erhält die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x}}{\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Zugleich habe ich in der vollſtändigen Entwicklung der Darſtellung, als vorzüglich bequem, die Zeichen der combinatoriſchen Analyſis gebraucht, wodurch die Ueberſicht der Sätze höchſt vereinfacht und erleichtert wird.

§. 2. Erſtes Problem. Wenn

$$z = x + yfz$$

wo fz eine Function von z bedeutet, und man verlangt z durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen von y

fortschreitet; (Lagrange l. c. §. 97) so wird man annehmen

$$z = x + yfx + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots .$$

Anstatt hier nun fz durch die unbekannten Coefficienten auszudrücken, und diesen Werth in der obigen Gleichung zu substituirten, eliminirt man fz vermittelst der Differentiation. Es ist nämlich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 1 + y\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = fz + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - fz.\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Und wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$fz = \frac{z-x}{y} \text{ substituirt}$$

erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right).(z-x) - \left(\frac{dz}{dy}\right)y = 0$$

Aus dieser Gleichung, mit der angenommenen für z, verbunden, erhält man, wenn $fx = A$,

$$\begin{vmatrix} A + 1B & y + 1C & y^2 + \ldots = 0 \\ -A + \frac{dA}{dx}\cdot A & + \frac{dA}{dx}\cdot B & \\ -2B & + \frac{dB}{dx}\cdot A & \\ & -3C & \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \dot{A}.\frac{d\dot{A}}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d\dot{A}^2}{dx}$$

$$2\dot{C} = \dot{B}.\frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{A}\frac{d\dot{B}}{dx};\quad \dot{C} = \tfrac{1}{2}\frac{d(\dot{A}\dot{B})}{dx}$$

$$3\dot{D} = \dot{C}.\frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{B}\frac{d\dot{B}}{dx} + \dot{A}\frac{d\dot{C}}{dx};\quad \dot{D} = \tfrac{1}{3}\frac{d(\dot{A}\dot{C} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{B})}{dx}$$

diese Ausdrücke finden sich einfacher

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \tfrac{1}{2}.\frac{d.\dot{A}^2}{dx}$$

$$\dot{C} = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^2.\dot{A}^3}{dx^2}$$

$$\dot{D} = \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{d^3.\dot{A}^4}{dx^3}$$

Also überhaupt

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{1\,2}\frac{d.(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^2.(fx)^3}{dx^2} + \ldots.$$

§. 3. Dies ließe sich so darstellen und erweisen; Nach der Formel für die Multiplication zweyer Reihen, verglichen mit obigem, erhält man, von A angezählt

$$(z-x)xn = \frac{1}{n-1}.\tfrac{1}{2}.\frac{d.b^nB}{dx}$$

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1 . q^{n}\varkappa n + Q\varkappa 2 . q^{a+d}\varkappa (n-1) + Q\varkappa 3 . q^{a+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q\varkappa n . q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

so wird auch ſeyn für jeden Exponenten s,

1) $$p^{s}\varkappa n = Q^{s}\varkappa 1 . q^{sa}\varkappa n + Q^{s}\varkappa 2 . q^{sa+d}\varkappa (n-1) + Q^{s}\varkappa 3 . q^{sa+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q^{s}\varkappa n . q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

2) $$q^{s}\varkappa n = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa (n-1) + \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa (n-2) + \ldots + \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

3) $$Q^{s}\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d}$$ multiplicirt in

$$\left\{ \begin{array}{l} sap^{s}\varkappa 1 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)\, p^{s}\varkappa 2 . q^{-sa-(n-2)d}\varkappa (n-1) \\ + (sa+2d)\, p^{s}\varkappa 3 . q^{-sa-(n-3)d}\varkappa (n-2) + \ldots \\ + [sa+(n-1)d]\, p^{s}\varkappa n . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1. \end{array} \right\}$$

VII.

Entwickelung des Beweiſes für die Reverſionsformel von La Grange, in ſeiner Théorie des fonctions analytiques §. 97 u. f. nebſt einigen Zuſätzen; von

M. Johann Wilhelm Pfaff.

Inhaltsanzeige.

§. 1. Erklärung einiger Zeichen.
§. 2. Erſtes Problem. $z=x+yfz$; man ſucht z. Auflöſung von La Grange.
§. 2—5. Entwickelung obiger Auflöſung.
§. 6. Zweytes Problem. Man ſucht φz, wenn z aus §. 2 bekannt iſt. Auflöſung von La Grange §. 98.
§. 7—8. Entwickelung dieſer Auflöſung.
§. 9. Auflöſung vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes.
§. 10. 11. Zuſätze.
§. 12. 13. Drittes Problem. Man ſucht φz ohne daß z als bekannt aus §. 2. angenommen wird. Auflöſung von La Grange und Entwickelung §. 99.
§. 15. 16. Viertes Problem. $z=t+xfz+yFz$. Man ſucht φz.
§. 17. 18. 19. Probleme aus der Differentialrechnung, vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis auflösbar, welche im Zuſammenhange mit dem Reverſionsproblem ſtehen.
§. 20. Das Allgemeine in dem Verf. von La Grange. §. 100 ſqq.
§. 21. Allgemeineres Problem, nebſt einem Beyſpiele aus La Grange §. 165. 166.

§. 1.

Ich habe mich im Folgenden der gewöhnlichen Zeichen der Differentialrechnung bedienet. Sie hängen, wie es ſcheint, mit den Begriffen, auf welchen gewöhnlich jene Rechnung gegründet wird, gut zuſammen: La grange, der jene Begriffe verläßt, hat auch die Zeichen in ſeiner Schrift nicht beybehalten. Zur Vergleichung, ohne die Theorie darzuſtellen, dient alſo Folgendes.

Wenn $y = \varphi x$; ſo iſt

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi' x = (\varphi x)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi'' x = (\varphi x)''$$

Eben ſo, wenn $z = \Phi(x,y)$ ſo iſt

$$z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi'(x,y) = \varphi'(x)$$

$$z_, = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \varphi_,(x,y) = \varphi'(y)$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = z^m{}_n = \varphi^m{}_n\,(x,y);$$

Ferner ſey $Q = F(x, y, z)$ einer Function von x, y und z, ſo iſt, wenn x, y, z unabhängig von einander ſind

$$dQ = \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}.dx + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dy + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dz$$

Und es bedeutet $\frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}$

das Differential jener Function in ſo fern x, unabhängig von den übrigen allein ſich ändert: welches man auch durch $\left(\frac{d.F'(x,y,z)}{dx}\right)$ ausdrückt, wenn x, y, z von einander unabhängig ſind:

Es ſey nun

$z = f(x, y)$; z abhängig von x und y,

so ist

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

d. h. differentiirt in sofern x, zugleich aber auch z, das von ihm abhängt, sich ändert.

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = \left(\frac{d f(x,y)}{dx}\right)$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\delta . f(x,y)}{\delta y} = \left(\frac{d f(x,y)}{dy}\right)$$

da x und y von einander unabhängig sind; und man erhält die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x}}{\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Zugleich habe ich in der vollständigen Entwicklung der Darstellung, als vorzüglich bequem, die Zeichen der combinatorischen Analysis gebraucht, wodurch die Uebersicht der Sätze höchst vereinfacht und erleichtert wird.

§. 2. Erstes Problem. Wenn

$$z = x + yfz$$

wo fz eine Function von z bedeutet, und man verlangt z durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen von y

fortschreitet; (Lagrange l. c. §. 97) so wird man annehmen

$$z = x + yfx + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots .$$

Anstatt hier nun fz durch die unbekannten Coefficienten auszudrücken, und diesen Werth in der obigen Gleichung zu substituirten, eliminirt man fz vermittelst der Differentiation. Es ist nämlich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 1 + y\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = fz + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - fz.\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Und wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$fz = \frac{z-x}{y} \text{ substituirt}$$

erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right).(z-x) - \left(\frac{dz}{dy}\right)y = 0$$

Aus dieser Gleichung, mit der angenommenen für z, verbunden, erhält man, wenn $fx = A$,

$$\begin{array}{l|l|l} \dot{A} + 1\dot{B} & y + 1\dot{C} & y^2 + \ldots = 0 \\ -\dot{A} + \frac{d\dot{A}}{dx}\cdot\dot{A} & + \frac{d\dot{A}}{dx}\cdot\dot{B} & \\ \quad - 2\dot{B} & + \frac{d\dot{B}}{dx}\cdot\dot{A} & \\ & - 3\dot{C} & \end{array}$$

Hieraus folgt

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \dot{A}. \frac{d\dot{A}}{dx} = \tfrac{1}{2} \frac{d\dot{A}^2}{dx}$$

$$2\dot{C} = \dot{B}. \frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{A} \frac{d\dot{B}}{dx}; \quad \dot{C} = \tfrac{1}{2} \frac{d(\dot{A}\dot{B})}{dx}$$

$$3\dot{D} = \dot{C}. \frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{B} \frac{d\dot{B}}{dx} + \dot{A} \frac{d\dot{C}}{dx}; \quad \dot{D} = \tfrac{1}{3} \frac{d(\dot{A}\dot{C} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{B})}{dx}$$

diese Ausdrücke finden sich einfacher

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \tfrac{1}{2}. \frac{d.\dot{A}^2}{dx}$$

$$\dot{C} = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^2.\dot{A}^3}{dx^2}$$

$$\dot{D} = \frac{1}{1.2.3.4}. \frac{d^3.\dot{A}^4}{dx^3}$$

Also überhaupt

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{1\,2} \frac{d.(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3} \frac{d^2.(fx)^3}{dx^2} + \ldots.$$

§. 3. Dies ließe sich so darstellen und erweisen; Nach der Formel für die Multiplication zweyer Reihen, verglichen mit obigem, erhält man, von A angezählt

$$(z-x)^n = \frac{1}{n-1}. \tfrac{1}{2}. \frac{d.\dot{b}^n B}{dx}$$

§. 6. Aufgabe. Die vorige Gleichung nach Q aufzulösen.

Auflösung. 1) Den vorigen Schlüssen gemäß, setze man wieder $p = Q$, so wird $p^s = Q^s$

d. i. $p^s\varkappa 1 . x^{sa} + p^s\varkappa 2 . x^{sa+d} + p^s\varkappa 3 . x^{sa+2d} + \ldots$

$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$

2) Nun wird aus der für q angenommenen Reihe durch Umkehrung

$$x^\sigma = \frac{\sigma}{\sigma} q^{-\sigma}\varkappa 1 . q^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma+d} q^{-\sigma-d}\varkappa 2 . q^{\sigma+d} + \frac{\sigma}{\sigma+2d} q^{-\sigma-2d}\varkappa 3 . q^{\sigma+2d} + \ldots$$

Drückt man demnach die Potenzen von x in der Gleichung (1) durch q aus, so wird

$$p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa} q^{-sa}\varkappa 1 . q^{sa}$$

$$+ p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 2 . q^{sa+d} \quad + p^s\varkappa 1 . \frac{sa}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$$

$$+ p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+d} q^{-sa-d}\varkappa 1 \quad + p^s\varkappa 2 . \frac{(sa+d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 2$$

$$+ p^s\varkappa 3 . \frac{(sa+2d)}{sa+2d} q^{-sa-2d}\varkappa 1$$

$$= Q^s\varkappa 1 . q^{sa} + Q^s\varkappa 2 . q^{sa+d} + Q^s\varkappa 3 . q^{sa+2d} + \ldots$$

Was zu einerley Potenz von q gehört, beyderseits gleichgesetzt, ergiebt sich

$$Q^s\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d} \text{ multiplicirt in}$$

$$\left.\begin{array}{l} p^s\varkappa 1.q^{sa+(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)p^s\varkappa 2.q^{sa+(n-2)d}\varkappa(n-1) \\ \qquad + (sa+2d)p^s\varkappa 3.q^{sa+(n-3)d}\varkappa(n-2) \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad + [sa+(n-1)d]p^s\varkappa n.q^{sa}\varkappa 1 \end{array}\right\}$$

§. 7. Zusatz. In der Gleichung §. 6, 1 drücke man die Potenzen von q durch x aus, da nehmlich

$$q^\varrho = q^\varrho\varkappa 1.x^\varrho + q^\varrho\varkappa 2.x^{\varrho+d} + q^\varrho\varkappa 3.x^{\varrho+2d} + \ldots\ldots,$$

wird

$$p^s\varkappa 1.x^{sa} + p^s\varkappa 2.x^{sa+d} + p^s\varkappa 3.x^{sa+2d} + \ldots\ldots$$

$$Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 1.x^{sa} \left|\begin{array}{l} + Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 2.x^{sa+d} \\ + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} + Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa 3.x^{sa+2d} + \ldots \\ + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa 2 \\ + Q^s\varkappa 3.q^{sa+2d}\varkappa 1 \end{array}$$

folglich,

$$p^s\varkappa n = Q^s\varkappa 1.q^{sa}\varkappa n + Q^s\varkappa 2.q^{sa+d}\varkappa(n-1) + Q^s\varkappa 3.q^{sa+2d}\varkappa(n-2) + \ldots\ldots + Q^s\varkappa n.q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

Es läßt sich demnach aus der angenommenen Gleichung für $p\varkappa n$ folglich eine ähnliche Formel für den unbestimmten Coefficienten jeder Potenz von p herleiten. Aus §. 5, 6, 7, ergiebt sich folgender Satz.

§. 8. Satz. Wenn zwischen den Coefficienten dreyer Reihen p, q, Q, für jedes n, folgendes Verhalten statt findet:

$$p\varkappa n = Q\varkappa 1 . q^{a}\varkappa n + Q\varkappa 2 . q^{a+d}\varkappa (n-1) + Q\varkappa 3 . q^{a+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q\varkappa n . q^{a+(n-1)d}\varkappa 1$$

so wird auch ſeyn für jeden Exponenten s,

1) $$p^{s}\varkappa n = Q^{s}\varkappa 1 . q^{sa}\varkappa n + Q^{s}\varkappa 2 . q^{sa+d}\varkappa (n-1) + Q^{s}\varkappa 3 . q^{sa+2d}\varkappa (n-2) + \ldots + Q^{s}\varkappa n . q^{sa+(n-1)d}\varkappa 1$$

2) $$q^{s}\varkappa n = \frac{s}{s} Q^{\frac{-s}{a}}\varkappa 1 . p^{\frac{s}{a}}\varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}}\varkappa 2 . p^{\frac{s+d}{a}}\varkappa (n-1) + \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}}\varkappa 3 . p^{\frac{s+2d}{a}}\varkappa (n-2) + \ldots + \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}}\varkappa n . p^{\frac{s+(n-1)d}{a}}\varkappa 1$$

3) $$Q^{s}\varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d}$$ multiplicirt in

$$\left\{ \begin{array}{l} sap^{s}\varkappa 1 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa n + (sa+d)\, p^{s}\varkappa 2 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa (n-1) \\ + (sa+2d)\, p^{s}\varkappa 3 . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa (n-2) + \ldots \\ + [sa+(n-1)d]\, p^{s}\varkappa n . q^{-sa-(n-1)d}\varkappa 1. \end{array} \right\}$$

VII.

Entwickelung des Beweiſes für die Reverſionsformel von La Grange, in ſeiner Théorie des fonctions analytiques §. 97 u. f. nebſt einigen Zuſätzen; von

M. Johann Wilhelm Pfaff.

Inhaltsanzeige.

§. 1. Erklärung einiger Zeichen.
§. 2. Erſtes Problem. $z=x+yfz$; man ſucht z. Auflöſung von La Grange.
§. 3—5. Entwickelung obiger Auflöſung.
§. 6. Zweytes Problem. Man ſucht φz, wenn z aus §. 2 bekannt iſt. Auflöſung von La Grange §. 98.
§. 7—8. Entwickelung dieſer Auflöſung.
§. 9. Auflöſung vermittelſt des polynomiſchen Lehrſatzes.
§. 10. 11. Zuſätze.
§. 12. 13. Drittes Problem. Man ſucht φz ohne daß z als bekannt aus §. 2. angenommen wird. Auflöſung von La Grange und Entwickelung §. 99.
§. 15. 16. Viertes Problem. $z=t+xfz+yFz$. Man ſucht φz.
§. 17 18. 19. Probleme aus der Differentialrechnung, vermittelſt der combinatoriſchen Analyſis auflösbar, welche im Zuſammenhange mit dem Reverſionsproblem ſtehen.
§. 20. Das Allgemeine in dem Verf. von La Grange. §. 100 ſqq.
§. 21. Allgemeineres Problem, nebſt einem Beyſpiele aus La Grange §. 165. 166.

§. 1.

Ich habe mich im Folgenden der gewöhnlichen Zeichen der Differentialrechnung bedienet. Sie hängen, wie es ſcheint, mit den Begriffen, auf welchen gewöhnlich jene Rechnung gegründet wird, gut zuſammen: La grange, der jene Begriffe verläßt, hat auch die Zeichen in ſeiner Schrift nicht beybehalten. Zur Vergleichung, ohne die Theorie darzuſtellen, dient alſo Folgendes.

Wenn $y = \varphi x$; ſo iſt

$$\frac{dy}{dx} = y' = \varphi' x = (\varphi x)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi'' x = (\varphi x)''$$

Eben ſo, wenn $z = \varphi(x,y)$ ſo iſt

$$z' = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi'(x,y) = \varphi'(x)$$

$$z_, = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \varphi_,(x,y) = \varphi'(y)$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = z^m{}_n = \varphi^m{}_n\,(x,y);$$

Ferner ſey $Q = F(x, y, z)$ einer Function von x, y und z, ſo iſt, wenn x, y, z unabhängig von einander ſind

$$dQ = \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}.dx + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dy + \frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta z}.dz$$

Und es bedeutet $\frac{\delta.F'(x,y,z)}{\delta x}$

das Differential jener Function in ſo fern x, unabhängig von den übrigen allein ſich ändert: welches man auch durch $\left(\frac{d.F'(x,y,z)}{dx}\right)$ ausdrückt, wenn x, y, z von einander unabhängig ſind:

Es ſey nun

$z = f(x, y)$; z abhängig von x und y,

so ist

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x} + \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)$$

d. h. differentiirt in sofern x, zugleich aber auch z, das von ihm abhängt, sich ändert.

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y} + \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta z} \cdot \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = \left(\frac{d f(x,y)}{dx}\right)$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\delta . f(x,y)}{\delta y} = \left(\frac{d f(x,y)}{dy}\right)$$

da x und y von einander unabhängig sind; und man erhält die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{\delta F'(x,y,z)}{\delta x}}{\left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{\delta . F'(x,y,z)}{\delta y}} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Zugleich habe ich in der vollständigen Entwicklung der Darstellung, als vorzüglich bequem, die Zeichen der combinatorischen Analysis gebraucht, wodurch die Uebersicht der Sätze höchst vereinfacht und erleichtert wird.

§. 2. Erstes Problem. Wenn

$$z = x + y f z$$

wo fz eine Function von z bedeutet, und man verlangt z durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen von y

fortschreitet; (Lagrange l. c. §. 97) so wird man annehmen

$$z = x + yfx + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 + \ldots .$$

Anstatt hier nun fz durch die unbekannten Coefficienten auszudrücken, und diesen Werth in der obigen Gleichung zu substituirten, eliminirt man fz vermittelst der Differentiation. Es ist nämlich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 1 + y\left(\frac{dz}{dx}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = fz + y\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{dfz}{dz}$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) - fz.\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

Und wenn man aus der gegebenen Gleichung

$$fz = \frac{z-x}{y} \text{ substituirt}$$

erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right).(z-x) - \left(\frac{dz}{dy}\right)y = 0$$

Aus dieser Gleichung, mit der angenommenen für z, verbunden, erhält man, wenn $fx = A$,

$$\begin{vmatrix} \dot{A} + 1\dot{B} & y + 1\dot{C} \\ -\dot{A} + \frac{d\dot{A}}{dx}\cdot\dot{A} & + \frac{d\dot{A}}{dx}\cdot\dot{B} \\ -2\dot{B} & + \frac{d\dot{B}}{dx}\cdot\dot{A} \\ & -3\dot{C} \end{vmatrix} \quad y^2 + \ldots = 0$$

Hieraus folgt

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \dot{A}.\frac{d\dot{A}}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d\dot{A}^2}{dx}$$

$$2\dot{C} = \dot{B}.\frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{A}\frac{d\dot{B}}{dx};\quad \dot{C} = \tfrac{1}{2}\frac{d(\dot{A}\dot{B})}{dx}$$

$$3\dot{D} = \dot{C}.\frac{d\dot{A}}{dx} + \dot{B}\frac{d\dot{B}}{dx} + \dot{A}\frac{d\dot{C}}{dx};\quad \dot{D} = \tfrac{1}{3}\frac{d(\dot{A}\dot{C} + \tfrac{1}{2}\dot{B}\dot{B})}{dx}$$

diese Ausdrücke finden sich einfacher

$$\dot{A} = \dot{A}$$

$$\dot{B} = \tfrac{1}{2}.\frac{d.\dot{A}^2}{dx}$$

$$\dot{C} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^2.\dot{A}^3}{dx^2}$$

$$\dot{D} = \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^3.\dot{A}^4}{dx^3}$$

Also überhaupt

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{1\,2}\frac{d.(fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^2.(fx)^3}{dx^2} + \ldots.$$

§. 3. Dies ließe sich so darstellen und erweisen; Nach der Formel für die Multiplication zweyer Reihen, verglichen mit obigem, erhält man, von A angezählt

$$(z-x)xn = \frac{1}{n-1}\cdot\tfrac{1}{2}.\frac{d.b^nB}{dx}$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot d. \left\{ \begin{matrix} \varkappa 1 . \varkappa (n-1) \\ \varkappa 2 . \varkappa (n-2) \\ \vdots \quad \vdots \\ \varkappa r . \varkappa (n-r) \\ \vdots \quad \vdots \\ \varkappa (n-1) . \varkappa 1 \end{matrix} \right\} : dx$$

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots \\ \varkappa 1, & \varkappa 2, & \varkappa 3, & \varkappa 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

Oder,

$$(z-x)\varkappa n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{d.(z-x)^2 \varkappa (n-1)}{dx}$$

eine allgemeine Localformel für die Coefficienten, ihrer Form nach merkwürdig. So ist beym Tayloriſchen Satze $\varkappa n = \frac{1}{n} d.\varkappa (n-1)$. In einem Problem bey Euler. Inſt. Calc. Int. Tom. I. §. 656.

$$\varkappa n = \left(\frac{d.\varkappa (n-1)}{dx} \right) + V. \left(\frac{d.\varkappa (n-1)}{dy} \right).$$

§. 3. Man nehme das Geſetz als wahr an, was eben gefunden worden, ſo folgt, aus der Gleichung (§. 2)

$$\frac{d^{n-1}(fx)^n}{1.2.3..n}$$

$$= \frac{1}{2.(n-1)} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \begin{matrix} fx. \dfrac{d^{n-2}.(fx^{n-1})}{dx^{n-2}.1.2..n-1} \\ + \dfrac{d.(fx^2)}{1.2\,dx^2} \cdot \dfrac{d^{n-3}.(fx^{n-2})}{dx^{n-3}1.2..n-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ + \dfrac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3..r} \cdot \dfrac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}1.2..n-r} \\ \vdots \quad \vdots \end{matrix} \right\}$$

Oder anders

$$2.(n-1)\,d^{n-2}.(fx^n)$$

$$= {}^{n}\mathfrak{A}.\,fx\,.\,\frac{d^{n-2}.(fx^{n-1})}{dx^{n-2}}$$

$$+ {}^{n}\mathfrak{B}.\,\frac{d.(fx^2)}{dx}\,\frac{d^{n-3}(fx^{n-2})}{dx^{n-3}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+ {}^{n}\mathfrak{K}.\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}}\,\frac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+ {}^{n}\mathfrak{U}.\,\frac{d^{n-2}(fx^{n-1})}{dx^{n-2}}\,.\,fx$$

§. 4. Man ſetze die Scale und den Zeiger

$$p\left\{\begin{matrix} fx, & \frac{dfx}{1}, & \frac{d^2fx}{1.2}, & \frac{d^3fx}{1.2.3}, & \frac{d^4fx}{1.2.3.4} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

ſo iſt, nach H. Prof. Rothe (Archiv II. H. VIII. p. 228 ſqq. IV H. IV, p. 431.)

$$\frac{d^{n-2}(fx^n)}{1.2.3\ldots.n-2.dx^{n-2}} = p^n\varkappa^{(n-1)}$$

Alſo wird die erſte Formel des 3ten Syhs

$$\frac{2}{n} \cdot p^n x(n-1) = \frac{1}{2} \cdot px1 \cdot \frac{p^{n-1}x(n-1)}{n-1} + \frac{p^2x2}{2} \cdot \frac{p^{n-2}x(n-2)}{n-2} + \frac{p^3x3}{3} \cdot \frac{p^{n-3}x(n-3)}{n-3} \vdots \quad \vdots + \frac{p^{n-1}x(n-1)}{n-1} \cdot px1.$$

Von der Wahrheit dieser Formel überzeugt man sich, wenn man bey Herrn Prof. Rothe (formulae de Reversione Serierum demonstratio universalis §. VI.) in der Formel A, setzt $s=1$, $c=0$, $h=1$, $f=1$, $d=1$. Folglich ist die erste Formel wahr, folglich das Gesetz der Reihe allgemein erwiesen.

§. 5. Da $z = x + yfz$;

und $z = x + y\left[fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots\right]$

So folgt hieraus:

$$fz = fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots.$$

§. 6. Zweytes Problem. Wenn man die gefundene Reihe für z als bekannt annimmt, eine Reihe für φz, nach Potenzen von y fortschreitend, zu finden (La Grange §. 98).

Es sey $\varphi z = u$;

ſo iſt $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$$

dieſen Werth in der Gleichung §. 3. ſubſtituirt, erhält man:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(z-x) = y\left(\frac{du}{dy}\right)$$

eine Gleichung ohne φz

Man ſetze

$$u = \dot{P} + \dot{Q}y + \dot{R}y^2 + \dot{S}y^3 + \ldots\ldots$$

ſo folgt:

$$0 = \left[\frac{d\dot{P}}{dx} + \frac{d\dot{Q}}{dx}y + \frac{d\dot{R}}{dx}y^2 + \frac{d\dot{S}}{dx}y^3 + \ldots\right]$$

$$\left(fx + \frac{y}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots\right)$$

$$-\dot{Q} \quad -2\dot{R}y \quad -3\dot{S}y^2 \quad -4\dot{T}y^3$$

daraus, nach wirklicher Multiplication

$$\delta = \left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{P}}{dx} fx + \frac{d\dot{Q}}{dx} fx \\ &- \dot{Q} + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} \\ &- 2\dot{R} \end{aligned}\right\} y + \left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{R}}{dx} fx \\ &+ \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} \\ &+ \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d^2(fx^3)}{1.2.3} \\ &- 3\dot{S} \end{aligned}\right\} y^2 + \ldots$$

Folglich

$$\dot{Q} = \frac{d\dot{P}}{dx} \cdot fx$$

$$2\dot{R} = \frac{d\dot{Q}}{dx} \cdot fx + \frac{d\dot{P}}{dx} \cdot \frac{d(fx)^2}{1.2}\text{; und substituirt}$$

$$= \frac{d^2\dot{P}}{dx^2} fx^2 + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} fx + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} \cdot fx$$

$$\dot{R} = d. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx)^2 \right\}}{2.dx}$$

$$3\dot{S} = \frac{d\dot{R}}{dx} \cdot fx = d^2. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx^2) \right\}}{1.2.dx^2} fx$$

$$+ \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} + d \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} fx. \right\} \frac{d(fx^2)}{1.2}}{dx}$$

$$+\frac{d\dot{P}}{dx}\cdot\frac{d^2(fx^3)}{1.2.3}$$

und nach Entwicklung

$$\dot{S}=d^2\left\{\frac{d\dot{P}}{dx}(fx)^3\right\}\Big|1.2.3.\,dx^2 \quad \text{eben ſo } \dot{T}=d^3\frac{d\dot{P}}{dx}(fx^4)\Big|1.2.3.4.dx^3$$

Folglich, da man $\dot{P}=\varphi x$ hat, wegen

$$\varphi z=\varphi[x+yfz+\ldots]$$

ſo erhält man

$$\varphi z=\varphi x+\left\{\frac{d\varphi x}{dx}fx\right\}y+d\left\{\frac{d\varphi x}{dx}(fx)^2\right\}\Big|1.2\;dx^2\,y^2+\ldots$$

wo das allgemeine Glied

$$\varphi z.\,s(n+1)y^n=d^{n-1}\left\{\frac{d\varphi x}{dx}fx^n\right\}\Big|1.2.3\ldots n-1.dx^{n-1}\cdot y^n$$

§. 7. Dies ließe ſich allgemein ſo darſtellen und erweiſen:

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot d. \begin{Bmatrix} x1 \,.\, x(n-1) \\ x2 \,.\, x(n-2) \\ \vdots \quad \vdots \\ xr \,.\, x(n-r) \\ \vdots \quad \vdots \\ x(n-1) \,.\, x1 \end{Bmatrix} : dx$$

$$\begin{pmatrix} A, B, C, D \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots \\ x1, x2, x3, x4 \ldots \end{pmatrix}$$

Oder,

$$(z-x)xn = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{d.(z-x)^2 x(n-1)}{dx}$$

eine allgemeine Localformel für die Coefficienten, ihrer Form nach merkwürdig. So ist beym Tayloriſchen Satze $xn = \frac{1}{n} d.x(n-1)$. In einem Problem bey Euler. Inſt. Calc. Int. Tom. I. §. 656.

$$xn = \left(\frac{d.x(n-1)}{dx}\right) + V. \left(\frac{d.x(n-1)}{dy}\right)$$

§. 3. Man nehme das Geſetz als wahr an, was oben gefunden worden, ſo folgt, aus der Gleichung (§. 2)

$$\frac{d^{n-1}(fx)^n}{1.2.3..n}$$

$$= \frac{1}{2.(n-1)} \cdot \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} fx. \dfrac{d^{n-2}.(fx^{n-1})}{dx^{n-2}.1.2..n-1} \\ + \dfrac{d.(fx^2)}{1.2\,dx^2} \cdot \dfrac{d^{n-3}.(fx^{n-2})}{dx^{n-3}.1.2..n-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ + \dfrac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3..r} \cdot \dfrac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}.1.2..n-r} \\ \vdots \quad \vdots \end{Bmatrix}$$

Oder anders

$$2.(n-1)\,d^{n-2}.(fx^n)$$
$$= {}^nA.\,fx.\,\frac{d^{n-2}.(fx^{n-1})}{dx^{n-2}}$$
$$+ {}^nB.\,\frac{d.(fx^2)}{dx}\,\frac{d^{n-3}(fx^{n-2})}{dx^{n-3}}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ {}^nR.\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}}\,\frac{d^{n-r-1}(fx^{n-r})}{dx^{n-r-1}}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ {}^nU.\,\frac{d^{n-2}(fx^{n-1})}{dx^{n-2}}.\,fx$$

§. 4. Man ſetze die Scale und den Zeiger

$$p\left\{\begin{matrix} fx, & \frac{dfx}{1}, & \frac{d^2fx}{1.2}, & \frac{d^3fx}{1.2.3}, & \frac{d^4fx}{1.2.3.4} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\}$$

ſo iſt, nach H. Prof. Rothe (Archiv II. H. VIII. p. 228 ſqq. IV H. IV, p. 431.)

$$\frac{d^{n-2}(fx^n)}{1.2.3\ldots.n-2.dx^{n-2}} = p^n\varkappa(n-1)$$

Alſo wird die erſte Formel des 3ten Syſts

$$\frac{2}{n} \cdot p^n x(n-1) = \frac{1}{2} \cdot px1 \cdot \frac{p^{n-1}x(n-1)}{n-1} + \frac{p^2x2}{2} \cdot \frac{p^{n-2}x(n-2)}{n-2} + \frac{p^3x3}{3} \cdot \frac{p^{n-3}x(n-3)}{n-3} \vdots \quad \vdots + \frac{p^{n-1}x(n-1)}{n-1} \cdot px1.$$

Von der Wahrheit dieser Formel überzeugt man sich, wenn man bey Herrn Prof. Rothe (formulae de Reversione Serierum demonstratio universalis §. VI.) in der Formel A, setzt $s=1$, $c=0$, $h=1$, $f=1$, $d=1$. Folglich ist die erste Formel wahr, folglich das Gesetz der Reihe allgemein erwiesen.

§. 5. Da $z = x+yfz$;

und $z = x+y\left[fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + ..\right]$

So folgt hieraus:

$$fz = fx + \frac{y}{1.2} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots.$$

§. 6. Zweytes Problem. Wenn man die gefundene Reihe für z als bekannt annimmt, eine Reihe für φz, nach Potenzen von y fortschreitend, zu finden (La Grange §. 98).

Es sey $\varphi z = u$;

ſo iſt $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right) \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$$

dieſen Werth in der Gleichung §. 3. ſubſtituirt, erhält man:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)(z-x) = y\left(\frac{du}{dy}\right)$$

eine Gleichung ohne φz

Man ſetze

$$u = \dot{P} + \dot{Q}y + \dot{R}y^2 + \dot{S}y^3 + \ldots\ldots$$

ſo folgt:

$$0 = \left[\frac{d\dot{P}}{dx} + \frac{d\dot{Q}}{dx}y + \frac{d\dot{R}}{dx}y^2 + \frac{d\dot{S}}{dx}y^3 + \ldots\right]$$

$$\left(fx + \frac{y}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{1.2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \ldots\right)$$

$$-\dot{Q} \quad -2\dot{R}y \quad -3\dot{S}y^2 \quad -4\dot{T}y^3$$

daraus, nach wirklicher Multiplication

$$\delta = \left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{P}}{dx} fx + \frac{d\dot{Q}}{dx} fx \\ &- \dot{Q} + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} \\ &- 2\dot{R} \end{aligned}\right\} y + \left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{R}}{dx} fx \\ &+ \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} \\ &+ \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d^2(fx^3)}{1.2.3} \\ &- 3\dot{S} \end{aligned}\right\} y^2 + \dots$$

Folglich

$$\dot{Q} = \frac{d\dot{P}}{dx} . fx$$

$$2\dot{R} = \frac{d\dot{Q}}{dx} . fx + \frac{d\dot{P}}{dx} . \frac{d(fx)^2}{1.2} ; \text{ und substituirt}$$

$$= \frac{d^2\dot{P}}{dx^2} fx^2 + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} fx + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} . fx$$

$$\dot{R} = d. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx)^2 \right\}}{2.dx}$$

$$3\dot{S} = \frac{d\dot{R}}{dx} . fx = d^2. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx^2) \right\}}{1.2.dx^2} fx$$

$$+ \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} + d \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} fx. \right\} \frac{d(fx^2)}{1.2}}{dx}$$

$$+\frac{\dot{dP}}{dx}\cdot\frac{d^2(fx^3)}{1.2.3}$$

und nach Entwicklung

$$\dot{S}=d^2\left\{\frac{\dot{dP}}{dx}(fx)^2\right\}\Big|1.2.3.\,dx^2 \quad \text{eben ſo } \dot{T}=d^3\frac{\dot{dP}}{dx}(fx^4)\Big|1.2.3.4.\,dx^3$$

Folglich, da man $\dot{P}=\varphi x$ hat, wegen

$$\varphi z=\varphi[x+yfz+\ldots]$$

ſo erhält man

$$\varphi z=\varphi x+\left\{\frac{d\varphi x}{dx}fx\right\}y+d\left\{\frac{d\varphi x}{dx}(fx)^2\right\}\Big|1,2\;dx^2\,y^2+\ldots$$

wo das allgemeine Glied

$$\varphi_{x,n}(n+1)y^n=d^{n-1}\left\{\frac{d\varphi x}{dx}fx^n\right\}\Big|1.2.3\ldots n-1.dx^{n-1}\cdot y^n$$

§. 7. Dies ließe ſich allgemein ſo darſtellen und erweiſen:

Man erhält aus der erſten Formel

$$n\varphi z \,.\, x(n+1)$$
$$= \tfrac{1}{1}\,\frac{d.\,x^n}{dx}\,.\,fx$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\frac{d.x(n-1)}{dx}\,.\,\frac{d(fx^2)}{dx}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{1}{1.2.3..r}\,\frac{d.x(n+1-r)}{dx}\,.\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{1}{1.2.3..n}\,.\,\frac{dP}{dx}\,.\,\frac{d^{n-1}(fx^n)}{dx^{n-1}}$$

dieſer Ausdruck ſoll, nach der Vorausſetzung, gleich ſeyn

$$\frac{d^{n-1}.\left\{\frac{dP}{dx}\,(fx^n)\right\}}{1.2.3\ldots n-1.\,dx^{n-1}}$$

Entwickelt man nach dem bekannten Satze für $\frac{d^n.PQ}{dx^n}$ letzteres Differential nach der Form

$$A\,\frac{d^nP}{dx^n}+B.\,\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}}+C.\,\frac{d^{n-2}P}{dx^{n-2}}\text{ u. ſ. w.}$$

wo A, B, C ... bekannt ſind; ebenfalls nach dem nämlichen Satze die Differentiale von x^n; $x(n-1)$ ... (deren Geſetz, der Vorausſetzung gemäs, als bekannt angenommen wird) ſo muß, was in beyden entwickelten Ausdrücken einerley Factor $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ hat, gleich ſeyn; und man erhält, die Hindenburgiſchen Binomialzeichen gebraucht;

$$\frac{{}^{n-1}\mathfrak{A}}{1.2.3..(n-1)}\,d^r(fx^{n-r}).\,fx = \frac{{}^{n-1}\mathfrak{A}}{1.2.3..n-1}\,d^r(fx)^n$$

$$\frac{{}^{n-2}\mathfrak{A}}{1.2.3..(n-2)}\,d^{r-1}(fx^{n-2})\,\frac{d.(fx^2)}{1.2}$$

$$\frac{{}^{n-3}\mathfrak{A}}{1.2.3..(n-3)}\,d^{r-2}(fx^{n-3})\,\frac{d^2.(fx^3)}{1.2.3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-l-1}\mathfrak{A}}{1.2.3..(n-l-1)}\,d^{r-l}(fx^{n-l-r})\,\frac{d^l fx^{(l+r)}}{1.2.3..l+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-r+1}\mathfrak{A}}{1.2.3..(n-r)}\,d.(fx^{n-r})\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3..r}$$

$$\frac{1}{1.2.3..(n-r-1)}\,fx^{n-r-1}\,\frac{d^r(fx^{r+1})}{1.2.3..r+1}$$

Durch Reduction wird das allgemeine $(l+1)$te Glied

$$\frac{1}{l+1}\cdot\frac{{}^{n-1}\mathfrak{A}}{1.2.3..n-1}\cdot{}^{r}\mathfrak{L}\,d^{r-1}(fx^{n-l-r})\,d^l(fx^{l+1})$$

Oder

$$\frac{1}{l+1}\cdot\frac{{}^{n-1}\mathfrak{A}}{1.2.3..n-1}\cdot 1.2.3..r.\,\frac{d^{r-1}(fx^{n-l-r})}{1.2.3...r-1}\cdot\frac{d^l(fx^{l+1})}{1.2.3...l}$$

Daraus folgt, den Satz (§. 4) zu Hülfe genommen, aus obiger Formel

$$\frac{1}{n} p^{n-1} \cdot \varkappa(r+1)\, p\varkappa 1$$
$$+ \frac{1}{2} p^{n-2}\, \varkappa 1\, p^2 \varkappa 2$$
$$+ \frac{1}{3} p^{n-3}\, \varkappa(r-1)\, p^3 \varkappa 3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{l+1} p^{n-l-2}\, \varkappa(r-1)\, p^{l+1} \varkappa(l+1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{r+1} p^{n-r-1}\, \varkappa 1 p^{r+1}\, \varkappa(r+1)$$
$$= p^n \varkappa(r+1)$$

Von der Wahrheit dieſer Formel überzeugt man ſich leicht aus dem Satze bey Hrn. Prof. Rothe l. c. in der Formel B.

§. 8. Demnach iſt, wenn man

$$\varphi z\, \varkappa(n+1) = d^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1.2.3..n-1.dx^{n-r}} = \Sigma$$

(wo Σ die recurrirende Formel für dieſen Coefficienten §. 7 bedeutet) ſezt, ſodann Σ und $d^{n-1}\frac{\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1..n-1.dx^{n-1}}$ nach den Differentialen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ entwickelt, in jedem dieſer beyden Ausdrücke allgemein der Coefficient von $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ derſelbe, wie ſo eben erwieſen; alſo überhaupt

$$\Sigma = d^{n-1}\frac{\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1..n-1.\,dx^{n-1}}. \quad \text{W. z. E.}$$

§. 9. Wenn man $z = x + yfx + \frac{y^2}{1.2} d.(fx^2) + \ldots$

als bekannt annimmt, aus §. 2, ſo iſt nach dem Tayloriſchen Satze

$$\varphi z = \varphi x + y\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \ldots.$$

wenn man ſetzt mit Scale und Index

$$y = \left\{ \begin{matrix} yfx + \frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d(fx^2)}{dx} + y^3\cdot\frac{d^2(fx^3)}{1.2.3\,dx^2}.. \\ 1 \quad\quad 2 \quad\quad\quad\quad\quad 3 \quad \ldots \end{matrix} \right\}$$

Entwickelt man nach Potenzen von y, vermittelſt des Polynomialtheorems, ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + y\left|\begin{matrix} \frac{d\varphi x}{dx}\cdot a^1 A + \frac{d\varphi x}{dx} a^2 A \\ + \frac{d^2\varphi x}{1.2..dx^2} b^2 B \end{matrix}\right| y^2 + \ldots.$$

Vergleicht man dieſe Reihe mit der in §. 6 gefundenen, ſo erhält man

$$\delta = \frac{d\dot{P}}{dx} fx + \frac{d\dot{Q}}{dx} fx \Bigg\} y + \frac{d\dot{R}}{dx} fx \Bigg\} y^2 + \dots$$
$$- \dot{Q} + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} + \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2}$$
$$- 2\dot{R} + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{d^2(fx^3)}{1.2.3}$$
$$- 3\dot{S}$$

Folglich

$$\dot{Q} = \frac{d\dot{P}}{dx} \cdot fx$$

$$2\dot{R} = \frac{d\dot{Q}}{dx} \cdot fx + \frac{d\dot{P}}{dx} \cdot \frac{d(fx)^2}{1.2}; \text{ und substituirt}$$

$$= \frac{d^2\dot{P}}{dx^2} fx^2 + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} fx + \frac{d\dot{P}}{dx} \frac{dfx}{dx} \cdot fx$$

$$\dot{R} = d. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx)^2 \right\}}{2.dx}$$

$$3\dot{S} = \frac{d\dot{R}}{dx} \cdot fx = d. \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} (fx^2) \right\}}{1.2.dx^2} fx$$

$$+ \frac{d\dot{Q}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2} + d \frac{\left\{ \frac{d\dot{P}}{dx} fx. \right\}}{dx} \frac{d(fx^2)}{1.2}$$

$$+ \frac{\dot{dP}}{dx} \cdot \frac{d^2(fx^3)}{1.2.3}$$

und nach Entwicklung

$$\dot{S} = d^2 \left\{ \frac{\dot{dP}}{dx} (fx)^2 \right\} \Big| \text{ eben ſo } \dot{T} = d^3 \frac{\dot{dP}}{dx} (fx^4)$$
$$1.2.3.\,dx^2 \qquad\qquad 1.2.3.4.\,dx^3$$

Folglich, da man $\dot{P} = \varphi x$ hat, wegen

$$\varphi z = \varphi[x + yfz + \ldots]$$

ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx \right\} y + d \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} (fx)^2 \right\} y^2 + \ldots$$
$$1.2 \quad dx^2$$

wo das allgemeine Glied

$$\varphi_{z,n}(n+1)\,y^n = d^{n-1} \left\{ \frac{d\varphi x}{dx} fx^n \right\} \cdot y^n$$
$$1.2.3\ldots n-1.dx^{n-1}$$

§. 7. Dies ließe ſich allgemein ſo darſtellen und erweiſen:

Man erhält aus der ersten Formel

$$n\varphi z \cdot x(n+1) = \frac{1}{1}\frac{d.x^n}{dx} \cdot fx + \frac{1}{2}\frac{d.x(n-1)}{dx} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} \quad \vdots \quad \vdots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3..r}\frac{d.x(n+1-r)}{dx} \cdot \frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}} \quad \vdots \quad \vdots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3..n} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(fx^n)}{dx^{n-1}}$$

dieser Ausdruck soll, nach der Voraussetzung, gleich seyn

$$\frac{d^{n-1}.\left\{\frac{dP}{dx}(fx^n)\right\}}{1.2.3...n-1.\,dx^{n-1}}$$

Entwickelt man nach dem bekannten Satze für $\frac{d^n.PQ}{dx^n}$ letzteres Differential nach der Form

$$A\frac{d^nP}{dx^n} + B.\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} + C.\frac{d^{n-2}P}{dx^{n-2}} \text{ u. s. w.}$$

wo A, B, C ... bekannt sind; ebenfalls nach dem nämlichen Satze die Differentiale von xn; $x(n-1)$ ... (deren Gesetz, der Voraussetzung gemäs, als bekannt angenommen wird) so muß, was in beyden entwickelten Ausdrücken einerley Factor $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ hat, gleich seyn; und man erhält, die Hindenburgischen Binomialzeichen gebraucht;

$$\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-1)}\,d^r(fx^{n-r})\,.\,fx \;=\; \frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\,d^r(fx)^n$$

$$\frac{{}^{n-2}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-2)}\,d^{r-1}(fx^{n-2})\,\frac{d.(fx^2)}{1.2}$$

$$\frac{{}^{n-3}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-3)}\,d^{r-2}(fx^{n-3})\,\frac{d^2.(fx^3)}{1.2.3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-l-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-l-1)}\,d^{r-l}(fx^{n-l-r})\,\frac{d^l fx\,(l+r)}{1.2.3..l+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-r+1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-r)}\,d.(fx^{n-r})\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3..r}$$

$$\frac{1}{1.2.3..(n-r-1)}\,fx^{n-r-1}\,\frac{d^r(fx^{r+1})}{1.2.3..r+1}$$

Durch Reduction wird das allgemeine $(1+r)$te Glied

$$\frac{1}{l+1}\,.\,\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\,.\,{}^{r}\mathfrak{L}\,d^{r-l}(fx^{n-l-r})\,d^l(fx^{l+r})$$

Oder

$$\frac{1}{l+1}\,.\,\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\,.\,1.2.3...r.\,\frac{d^{r-l}(fx^{n-l-r})}{1.2.3...r-l}\,.\,\frac{d^l(fx^{l+r})}{1.2.3...l}$$

Daraus folgt, den Satz (§. 4) zu Hülfe genommen, aus obiger Formel

$$\frac{1}{1}\,p^{n-1}\,\varkappa(r+1)\,p\varkappa 1$$
$$+\ \frac{1}{2}\,p^{n-2}\,\varkappa r\,p^2\varkappa 2$$
$$+\ \frac{1}{3}\,p^{n-3}\,\varkappa(r-1)\,p^3\varkappa 3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{1}{l+1}\,p^{n-l-2}\,\varkappa(r-1)\,p^{l+1}\,\varkappa(l+1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{1}{r+1}\,p^{n-r-1}\,\varkappa 1 p^{r+1}\,\varkappa(r+1)$$
$$=p^n\varkappa(r+1)$$

Von der Wahrheit dieser Formel überzeugt man sich leicht aus dem Satze bey Hrn. Prof. Rothe l. c. in der Formel B.

§. 8. Demnach ist, wenn man

$$\varphi z\,\varkappa(n+1)=\frac{1}{1.2.3..n-1.dx^{n-r}}\,d^{n-1}.\left(\frac{dP}{dx}\,fx^n\right)=\Sigma$$

(wo Σ die recurrirende Formel für diesen Coefficienten §. 7 bedeutet) sezt, sodann Σ und $\frac{d^{n-1}\left(\frac{dP}{dx}\,fx^n\right)}{1..n-1.dx^{n-1}}$ nach den Differentialen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ entwickelt, in jedem dieser beyden Ausdrücke allgemein der Coefficient von $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ derselbe, wie so eben erwiesen; also überhaupt

$$\Sigma = d^{n-1}\frac{\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1\ldots n-1.\, dx^{n-1}}. \quad \text{W. z. E.}$$

§. 9. Wenn man $z = x + yfx + \frac{y^2}{1.2} d.(fx^2) + \ldots$

als bekannt annimmt, aus §. 2, ſo iſt nach dem Tayloriſchen Satze

$$\varphi z = \varphi x + y\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \ldots.$$

wenn man ſetzt mit Scale und Index

$$y = \left\{\begin{matrix} yfx + \frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d(fx^2)}{dx} + y^3\cdot\frac{d^2(fx^3)}{1.2.3\,dx^2}\ldots \\ 1 \quad 2 \qquad\qquad 3 \quad \ldots \end{matrix}\right\}$$

Entwickelt man nach Potenzen von y, vermittelſt des Polynomialtheorems, ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + y\left|\begin{matrix} \frac{d\varphi x}{dx}\cdot a^1 A + \frac{d\varphi x}{dx} a^2 A \\ + \frac{d^2\varphi x}{1.2..dx^2} b^2 B \end{matrix}\right| y^2 + \ldots.$$

Vergleicht man dieſe Reihe mit der in §. 6 gefundenen, ſo erhält man

$$\frac{d^{n-1}\left[\frac{d\Phi x}{dx} fx^n\right]}{1.2.3..n-1.n.\,dx^{n-1}} = \frac{d\Phi x}{dx} a^n A + \frac{d^2\Phi x}{2.dx^2} b^n B + \vdots \quad \vdots + \frac{d^r\Phi x}{1.2.3..r dx^r} \cdot r^n R + \vdots + \frac{d^n\Phi x}{1.2.3..n dx^n} \cdot n^n N$$

Entwickelt man linker Hand nach der bekannten Formel für die Differentiale von Producten, und vergleicht die Factoren von $d^r\Phi x$ in beyden Ausdrücken, welche gleich seyn müssen, so erhält man

$$\frac{r}{n} \cdot \frac{d^{n-r}.[fx^n]}{1.2.3...n-r} = r^n R$$

das heißt, wieder nach dem Satze §. 4. Wenn man die Reihen nimmt und Scalen

$$p = fx, \quad \frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^2fx}{1.2}, \quad \frac{d^3fx}{1.2.3}, \ldots$$
$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4$$

$$q\ [\ p\varkappa 1,\ \tfrac{1}{2}p^2\varkappa 2,\ \tfrac{1}{3}p^3\varkappa 3,\ \tfrac{1}{4}p^4\varkappa 4\ \ldots\ ]$$

so erhält man die Formel

$$\frac{r}{n}\, p^n \varkappa (n-r+1) = q^r \varkappa (n-r+1)$$

welches ein bekannter Satz aus der Lehre der Reversion ist, und der allgemein für jede Reihe p gilt.

Wenn man nämlich aus der Gleichung

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots = p$$

findet

$$x/n = \frac{1}{n} \; p^{-n} \times n. \; y^n$$

So kann man

$$x^m/n = \frac{m}{m+n-1} \; p^{-(m+n-1)} \times n \; y^n$$

auf zweyerley Art ausdrücken, wodurch man obige Formel erhält. (E. S. a. c. Abh. und darinn die Abhandl. meines Bruders: über Producte und Potenzen gewisser Reihen. 1 Satz, 2 Zusatz. Verglichen Ebendas. §. 18. 1, 2, 4.

§. 10. Die Formel §. 7 anfangs ist an sich merkwürdig, und ist, wenn das Gesetz der Coefficienten erwiesen ist, folgende:

$$d^{n-1} \cdot \frac{\left\{ \frac{d\varphi x}{dx} \cdot fx^n \right\}}{1.2.3 \ldots n-m.dx^{n-1}}$$

$$= d^{n-1} \cdot \frac{\left\{ \frac{d\varphi x}{dx} \; fx^{n-1} \right\}}{1.2.3 \ldots n-1} \; fx$$

$$+ d^{n-2} \cdot \frac{\left\{ \frac{d\varphi x}{dx} \; fx^{n-2} \right\}}{1.2.3 \ldots n-2.} \; \frac{d\,[fx^2]}{1.2.\,dx^2}$$

$$+ \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}$$

§. 11. Uebrigens lassen sich aus der Formel

$$\varphi z = \varphi x + y\left\{\frac{d\varphi x}{dx} fx\right\} + \frac{y^2}{1.2}\cdot d\left\{\frac{d\varphi x}{dx} fx^2\right\} : dx$$

auf die nämliche Art, wie aus dem Taylorischen Satze, (Rothe Archiv II. H.) Folgerungen ziehen. Z. B. $(\varphi z)^m$ kann man daraus, vermittelst des polynomischen Lehrsatzes, und vermittelst der Veränderung der blosen $\frac{d\varphi' x}{dx}$ in $m\varphi x^{m-1}$ identische Gleichungen erhalten, also daß

$$md^{n-1}\left\{\frac{\varphi x^{m-1}; fx^n}{1.2.3\ldots ndx^{n-1}}\right\} = {}^{m}\mathfrak{A}\varphi x^{m-1}a^nA + {}^{m}\mathfrak{B}\varphi x^{m-2}b^nB + {}^{m}\mathfrak{C}\varphi x^{m-3}c^nC + \ldots$$

für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} \varphi' x fx, & \frac{d(\varphi' x fx^2)'}{1.2} & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots \end{matrix}\right\}$

§. 12. Drittes Problem. Eine Reihe für $u = \varphi z$, ohne daß z (wie im 2ten Problem §. 6) als bekannt angenommen wird, nach Potenzen von y fortschreitend, zu finden. (La Grange §. 99)

Man habe §. 2. die Gleichung

1) $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) fz$; und §. 6

2) $\dfrac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \dfrac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$ Hieraus folgt

3) $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz$;

Betrachtet man alſo u als eine Function von y, x; ſo kann man jedes Differential derſelben nach y durch Differentiale nach x ausdrücken.

Es iſt aber, nach dem Tayloriſchen Satze (Archiv II. H. V. p. 201 ſqq. La Grange l. c. §. 45.)

$$u = \psi y + y\left(\frac{d\psi y}{dy}\right) + y^2 \frac{d^2\psi y}{1.2.\,dy^2} + \ldots$$

wenn $u = \psi y$ geſetzt, und nach der Differentiation $y = o$ ſubſtituirt wird;

Es iſt (no. 3)

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d.\,\varphi z}{dz}\right) . fz$$

Wenn man $y = o$ ſetzt

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) . fx$$

Ferner, wenn man weiter nach y in x differentiirt in 3)

$\frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^3u}{dxdy}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)$, und nach x,

$\frac{d^2u}{dxdy} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)$

Man erhält aus der erſten Formel

$$n\varphi z \cdot x(n+1) = \frac{1}{1}\frac{d.x^n}{dx} \cdot fx + \frac{1}{2}\frac{d.x(n-1)}{dx} \cdot \frac{d(fx^2)}{dx} + \vdots + \frac{1}{1.2.3..r}\frac{d.x(n+1-r)}{dx} \cdot \frac{d^{r-1}(fx^r)}{dx^{r-1}} + \vdots + \frac{1}{1.2.3..n} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(fx^n)}{dx^{n-1}}$$

dieſer Ausdruck ſoll, nach der Vorausſetzung, gleich ſeyn

$$\frac{d^{n-1} \cdot \left\{ \frac{dP}{dx} (fx^n) \right\}}{1.2.3...n-1.\, dx^{n-1}}$$

Entwickelt man nach dem bekannten Satze für $\frac{d^n.PQ}{dx^n}$ letzteres Differential nach der Form

$$A\frac{d^nP}{dx^n} + B.\frac{d^{n-1}P}{dx^{n-1}} + C.\frac{d^{n-2}P}{dx^{n-2}} \text{ u. ſ. w.}$$

wo A, B, C ... bekannt ſind; ebenfalls nach dem nämlichen Satze die Differentiale von xn; $x(n-1)$... (deren Geſetz, der Vorausſetzung gemäs, als bekannt angenommen wird) ſo muß, was in beyden entwickelten Ausdrücken einerley Factor $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ hat, gleich ſeyn; und man erhält, die Hindenburgiſchen Binomialzeichen gebraucht;

$$\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-1)}\,d^r(fx^{n-r})\,.\,fx \;=\; \frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\,d^r(fx)^n$$

$$\frac{{}^{n-2}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-2)}\,d^{r-1}(fx^{n-2})\,\frac{d.(fx^2)}{1.2}$$

$$\frac{{}^{n-3}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-3)}\,d^{r-2}(fx^{n-3})\,\frac{d^2.(fx^2)}{1.2.3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-l-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-l-1)}\,d^{r-l}(fx^{n-l-r})\,\frac{d^l fx\,(^{l+r})}{1.2.3..l+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{{}^{n-r+1}\mathfrak{R}}{1.2.3..(n-r)}\,d.(fx^{n-r})\,\frac{d^{r-1}(fx^r)}{1.2.3..r}$$

$$\frac{1}{1.2.3..(n-r-1)}\,fx^{n-r-1}\,\frac{d^r(fx^{r+1})}{1.2.3..r+1}$$

Durch Reduction wird das allgemeine $(1+r)$te Glied

$$\frac{1}{l+1}\,.\,\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..,n-1}\,.\,{}^{r}\mathfrak{L}\,d^{r-l}(fx^{n-l-r})\,d^l(fx^{l+r})$$

Oder

$$\frac{1}{l+1}\,.\,\frac{{}^{n-1}\mathfrak{R}}{1.2.3..n-1}\,.\,1.2.3..r.\,\frac{d^{r-l}(fx^{n-l-r})}{1.2.3...r-l}\,.\,\frac{d^l(fx^{l+r})}{1.2.3...l}$$

Daraus folgt, den Satz (§. 4) zu Hülfe genommen, aus obiger Formel

$$\frac{1}{1} p^{n-1} . \varkappa(r+1) p \varkappa 1$$
$$+ \frac{1}{2} p^{n-2} \varkappa r p^2 \varkappa 2$$
$$+ \frac{1}{3} p^{n-3} \varkappa(r-1) p^3 \varkappa 3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{l+1} p^{n-l-2} \varkappa(r-l) p^{l+1} \varkappa(l+1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$+ \frac{1}{r+1} p^{n-r-1} \varkappa 1 p^{r+1} \varkappa(r+1)$$
$$= p^n \varkappa(r+1)$$

Von der Wahrheit dieser Formel überzeugt man sich leicht aus dem Satze bey Hrn. Prof. Rothe l. c. in der Formel B.

§. 8. Demnach ist, wenn man

$$\varphi z \varkappa(n+1) = \frac{d^{n-1} . \left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1.2.3..n-1.dx^{n-1}} = \Sigma$$

(wo Σ die recurrirende Formel für diesen Coefficienten §. 7 bedeutet) sezt, sodann Σ und $\frac{d^{n-1}\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1..n-1.dx^{n-1}}$ nach den Differentialen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ entwickelt, in jedem dieser beyden Ausdrücke allgemein der Coefficient von $\frac{d^{n-r}P}{dx^{n-r}}$ derselbe, wie so eben erwiesen; also überhaupt

$$\Sigma = d^{n-1}\frac{\left(\frac{dP}{dx} fx^n\right)}{1..n-1.\,dx^{n-1}}. \quad \text{W. z. E.}$$

§. 9. Wenn man $z = x + yfx + \frac{y^2}{1.2} d.(fx^2) + \ldots$ als bekannt annimmt, aus §. 2, ſo iſt nach dem Tayloriſchen Satze

$$\varphi z = \varphi x + y\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^3\varphi x}{dx^3} + \ldots.$$

wenn man ſetzt mit Scale und Index

$$y = \left\{ \begin{matrix} yfx + \frac{y^2}{1.2}.\frac{d(fx^2)}{dx} + y^3.\frac{d^2(fx^3)}{1.2.3\,dx^2}.. \\ 1 \quad\quad 2 \quad\quad\quad\quad\quad 3 \quad \ldots \end{matrix} \right\}$$

Entwickelt man nach Potenzen von y, vermittelſt des Polynomialtheorems, ſo erhält man

$$\varphi z = \varphi x + y\left|\begin{matrix} \frac{d\varphi x}{dx}.\,a^1A + \frac{d\varphi x}{dx}\,a^2A \\ + \frac{d^2\varphi x}{1.2..dx^2}\,b^2B \end{matrix}\right| y^2 + \ldots.$$

Vergleicht man dieſe Reihe mit der in §. 6 gefundenen, ſo erhält man

$$\frac{d^{n-1}\left[\frac{d\Phi x}{dx} fx^n\right]}{1.2.3..n-1.n.\,dx^{n-1}} = \frac{d\Phi x}{dx} a^n A + \frac{d^2\Phi x}{2.dx^2} b^n B + \vdots \quad \vdots + \frac{d^r\Phi x}{1.2.3..r dx^r} \cdot r^n R + \vdots + \frac{d^n\Phi x}{1.2.3..n dx^n} \cdot n^n N$$

Entwickelt man linker Hand nach der bekannten Formel für die Differentiale von Producten, und vergleicht die Factoren von $d^r\Phi x$ in beyden Ausdrücken, welche gleich seyn müssen, so erhält man

$$\frac{r}{n} \cdot \frac{d^{n-r}.\,[fx^n]}{1.2.3...n-r} = r^n R$$

das heißt, wieder nach dem Satze §. 4. Wenn man die Reihen nimmt und Scalen

$$p = fx, \quad \frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^2fx}{1.2}, \quad \frac{d^3fx}{1.2.3}, \ldots$$
$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4$$

$$q\,[\,px1,\ \tfrac{1}{2}p^2x2,\ \tfrac{1}{3}p^3x3,\ \tfrac{1}{4}p^4x4\ \ldots\,]$$

so erhält man die Formel

$$\frac{r}{n}\, p^n x(n-r+1) = q^r x(n-r+1)$$

welches ein bekannter Satz aus der Lehre der Reversion ist; und der allgemein für jede Reihe p gilt.

Wenn man nämlich aus der Gleichung

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots = p$$

findet

$$x/n = \frac{1}{n}\, p^{-n} \varkappa n.\ y^n$$

So kann man

$$x^m/n = \frac{m}{m+n-1}\, p^{-(m+n-1)} \varkappa n\, y^n$$

auf zweyerley Art ausdrücken, wodurch man obige Formel erhält. (E. S. a. c. Abh. und darinn die Abhandl. meines Bruders: über Producte und Potenzen gewisser Reihen. 1 Satz, 2 Zusatz. Verglichen Ebendas. §. 18. 1, 2, 4.

§. 10. Die Formel §. 7 anfangs ist an sich merkwürdig, und ist, wenn das Gesetz der Coefficienten erwiesen ist, folgende:

$$\frac{d^{n-1}.\left\{\frac{d\varphi x}{dx}.\, fx^n\right\}}{1.2.3..n-m.dx^{n-1}}$$

$$= d^{n-1}.\frac{\left\{\frac{d\varphi x}{dx}\, fx^{n-1}\right\}}{1.2.3..n-1}\, fx$$

$$+ d^{n-2}.\frac{\left\{\frac{d\varphi x}{dx}\, fx^{n-2}\right\}}{1.2.3..n-2.}\,\frac{d\,[fx^2]}{1.2.dx^2}$$

$$+ \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}$$

§. 11. Uebrigens lassen sich aus der Formel

$$\varphi z = \varphi x + y\left\{\frac{d\varphi x}{dx} fx\right\} + \frac{y^2}{1.2} \cdot d\left\{\frac{d\varphi x}{dx} fx^2\right\} : dx$$

auf die nämliche Art, wie aus dem Taylorischen Satze, (Rothe Archiv II. H.) Folgerungen ziehen. Z. B. $(\varphi z)^m$ kann man daraus, vermittelst des polynomischen Lehrsatzes, und vermittelst der Veränderung der blosen $\frac{d\varphi' x}{dx}$ in $m\varphi x^{m-1}$ identische Gleichungen erhalten, also daß

$$md^{n-1}\left\{\frac{\varphi x^{m-1} \cdot fx^n}{1.2.3 \ldots n dx^{n-1}}\right\} = {}^{m}\mathfrak{A}\varphi x^{m-1} a^n A + {}^{m}\mathfrak{B}\varphi x^{m-2} b^n B + {}^{m}\mathfrak{C}\varphi x^{m-3} c^n C + \ldots$$

für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} \varphi' x fx, & \frac{d(\varphi' x fx^2)'}{1.2} & \ldots \\ 1. & 2 & \ldots \end{matrix}\right\}$

§. 12. Drittes Problem. Eine Reihe für $u = \varphi z$, ohne daß z (wie im 2ten Problem §. 6) als bekannt angenommen wird, nach Potenzen von y fortschreitend, zu finden. (La Grange §. 99)

Man habe §. 2. die Gleichung

1) $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) fz$; und §. 6

2) $\dfrac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \dfrac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dy}\right)}$ Hieraus folgt

3) $\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz;$

Betrachtet man alſo u als eine Function von y, x; ſo kann man jedes Differential derſelben nach y durch Differentiale nach x ausdrücken.

Es iſt aber, nach dem Taylorſchen Satze (Archiv II. H. V. p. 201 ſqq. La Grange l. c. §. 45.)

$$u = \psi y + y\left(\frac{d\psi y}{dy}\right) + y^2 \frac{d^2\psi y}{1.2.\,dy^2} + \ldots$$

wenn $u = \psi y$ geſetzt, und nach der Differentiation $y = o$ ſubſtituirt wird;

Es iſt (no. 3)

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) fz = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d.\varphi z}{dz}\right) . fz$$

Wenn man $y = o$ ſetzt

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) . fx$$

Ferner, wenn man weiter nach y in x differentiirt in 3)

$\frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)$, und nach x,

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) fz + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)$$

Subſtituirt man dieſen Werth von $\frac{d^2u}{dxdy}$ und den Werth von $\frac{dz}{dy}$ aus 1) ſo erhält man

$$4)\quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left\{\frac{d\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)fz^2\right\}}{dx}\right\}$$

Ferner wird

$$\frac{d^3u}{dy^3} = d^2.\frac{\left\{\frac{du}{dx}fz^2\right\}}{dxdy}$$

Es iſt aber

$$\left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dy}\right\} = \left\{\frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^3\right)}{dx}\right\}$$

vermittelſt ähnlicher Subſtitutionen, wie 4) erwieſen wurde; alſo

$$5)\quad \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) = d^2.\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)fz^3}{(dx^2)}$$

Ueberhaupt

$$\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right) = d^{n-1}.\frac{\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)fz^n\right\}}{dx^{n-1}}$$

Und wenn man nach der Differentiation $y = o$, alſo $z = x$; $fz = fx$; $u = \varphi x$, ſetzt;

$$\varphi z = \varphi x + y.\frac{d\varphi x}{dx} fx + \frac{y^2}{1.2} d\frac{\left(\frac{d\varphi x}{dx} fx^2\right)}{dx} + \ldots$$

wie oben. §. 6.

§. 13. Daß aber allgemein

$$\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) = d^{n-1}.\frac{\left\{\left(\frac{du}{dx}\right) fz^n\right\}}{dx^{n-1}}$$

folgt ſogleich; wenn nämlich

$$\left(\frac{d^{n-1} u}{dy^{n-1}}\right) = d^{n-2}.\frac{\left(\frac{du}{dx} fz^{n-1}\right)}{dx^{n-2}}$$

ſo iſt

$$\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right) = d^{n-2}.\frac{\left\{d.\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)(fz)^{n-1}\right\}\right\}}{dx^{n-2}}$$

Es iſt aber

$$d.\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} fz^{n-1} = \frac{d^2 u}{dxdy} fz^{-n-1} + (n-1)\left(\frac{du}{dx}\right) fz^{-n-2}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)$$

und die Werthe von

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right); \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ no. I}$$

ſubſtituirt,

$$\text{d.}\left(\frac{du}{dx}\right)fz^{-n-1} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(fz)^n + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dfz}{dz}\right)(fz)^{n-1}$$

$$\overline{\qquad dy \qquad} \qquad + (n-1)\left(\frac{dfz}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)fz^{n-1}$$

$$= \text{d.}\left(\frac{du}{dx} \cdot fz^n\right)$$

$$\overline{\qquad\qquad dx \qquad\qquad}$$

folglich die obige Formel; alſo der Satz wahr.

§. 14. Dieſer letzteren Methode bedient ſich Couſin in der Auflöſung der Gleichung $x = \varphi(x, y, z)$; nach z, wenn φ in eine Function von y allein übergeht, für $z = 0$. Introduction à l'étude de l'aſtron. phyſique p. 302 ſeq. Und es reducirt ſich das Problem darauf, das Differential von u nach y durch Differentiale nach x auszudrücken; welches Problem ſo ſich ausdrücken läßt: Wenn z eine Function zweyer veränderlichen Größen iſt (x, y) das Differential jeder Function von z nach jeder Function von x, durch Differentiale nach Functionen von y auszudrücken. (S. Meines Bruders Disquiſit. analyticae etc.)

§. 15. Viertes Problem. Erweitert man das Tayloriſche Theorem auf die Functionen von zwey, drey u. ſ. w. veränderlichen Größen, ſo werden durch ähnliche Schlüſſe, wie §. 12, 13, erhalten:

Wenn $z = t + xfz + yFz$; ſo iſt

$$\varphi z = \varphi t + xft.\ d.\frac{\varphi t}{dt} + \frac{x^2}{1.2}.\ d.\frac{\left(ft^2.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

$$+ y.Ft.\ d.\frac{\varphi t}{dt} + \frac{y^2}{1.2}.\ d.\frac{\left(Ft^2.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

$$+ xy.\ d.\frac{\left(Ft.\,ft.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt} + \ldots$$

Wo überhaupt das allgemeine Glied ſeyn wird

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.\ d^{n-1}.\frac{\left(ft^n.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}\ d^{n-1}\frac{\left(Ft^n\,\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{x^{n-1}.y}{1.2.3\ldots n-1.1}\ d^{n-1}\frac{\left(ft^{n-1}.Ft.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

$$+ \frac{x^{n-2}y^2}{1.2.3\ldots n-2.1.2}\ d^{n-1}\frac{\left(ft^{n-2}\ .Ft^2.\frac{d\varphi t}{dt}\right)}{dt^{n-1}}$$

u. ſ. w., nach der bekannten Formel des Tayloriſchen Satzes.

§. 16. Sucht man den Werth von z durch den Weg der Elimination, wie §. 2, ſo erhält man, durch Vergleichung einer Menge identiſcher Formeln z. B.

$$\frac{d^n}{1.2.3\ldots n.dt^n}(ft^{n+1}.Ft)$$

$$=\frac{d^n}{1.2\ldots(n+1)dt^n}(ft^{n+1}.)\ Ft$$

$$+\frac{d^{n-1}}{2\ldots n.\,dt^{n-1}}(ft^n.)\frac{d}{dt}(Ft.\ ft)$$

$$+\frac{d^{n-2}}{2.3\ldots n-1.\,dt^{n-2}}(ft^{n-1})\frac{d^2}{1.2.dt^2}(Ft\,ft^2)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$+\frac{d^{n-r}}{2.3\ldots(n-r+1)\,dt^{n-r}}(ft^{n-r+1})\frac{d^r}{2.3\ldots r\,dt^r}(Ft.\ ft^r)$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

$$ft.\frac{d^n}{2.3\ldots n\,dt^n}(Ft\,ft^n)$$

welches für den Coefficienten von $x^{n+1}.y$ die Glieder ſind.

Aus dieſen Formeln werden ſich, wie §. 4. Coefficientengleichungen ergeben, z. B.

$$(P^{n+1}Q)\,x(n+1) = \frac{P^{n+1}}{n+1}\,x(n+1).\ Qx1$$
$$+\frac{P^{n}}{n}\,xn.\ PQ.\ x2$$
$$+\frac{P^{n-1}}{n-1}\,x(n-1).\ P^2Q.\ x3$$
$$\vdots$$
$$+\frac{P^{n-r+1}}{n-r+1}\,x(n-r+1).\ P^rQ.x(r+1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+ Px1.\ P^nQ.\ x(n+1)$$

von dessen Wahrheit man sich sogleich überzeugt, wenn man $P^rQ\,x(r+1)$ entwickelt. Vergl. Archiv V. Heft IX. p. 67, 97.

Wollte man für den Coefficienten von $x^m y^2$ solch eine Gleichung finden; so würde sich ergeben

$$[P^mQ^2]\,x(m+1)$$
$$= \frac{P^m}{m}\,xm.\ \frac{Q^2x^2}{1.2}$$
$$+\frac{P^{m-1}}{m-1}\,x(m-1)\ 2.\ \frac{PQ^2}{1.2}\,x3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$+\frac{Px1}{1}\,m.\ P^{m-1}\ \frac{Q^2}{1.2}\,x(m+1)$$
$$+\alpha\ Qx1.\ [P^mQ]\,x(m+1)$$
$$+\beta\ QPx2.\ [P^{m-1}Q]\,xm$$
$$+\gamma\ QP^2x3.\ [P^{m-2}Q]\,x(m-1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Um das Geſetz dieſer Formel zu entdecken, muß folg
des Problem, gleichſam das allgemeine des bekannten D
cerptionsproblems, aufgelöſt werden: Es iſt ein Prod
zweyer Größen (Potenzen) $a^r \times b^m$ von der nten Dimen
gegeben; Man ſoll dies Product zerlegen, oder als
ſammengeſetzt darſtellen, aus zwey (oder mehrern) Factore
deren Dimenſionen zuſammen den gegebenen gleich, die D
menſion der Größe a aber immer = r, der Größe b immer =
werde; z. B. a^3b^2; wird zerlegt in $a^3 \times b^2$; $a^2 \times b^2 a$, $a \times b^2 a$
$a^3 b \times b$; $a^2 b \times ba$; Setzt man hier $a = b$; ſo hat man d
bekannte Discerptionsproblem: die Binionen zu finden.

§. 17. Es kam in §. 12 und 14 darauf an, Differen
tiale einer Function von veränderlichen Größen, nach eine
derſelben, durch Differentiale nach der andern auszudrücke
Das heißt, wenn $F(x, y, z) = 0$ gegeben, wo z ein
Function von x und y; ſo iſt (wie bekannt, La Grange §. 9

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{\delta . F(x,y,z)}{dx}\right)}{\left(\frac{\delta . F(x,y,z)}{dy}\right)} \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

und es fragt ſich (Fünftes Problem) nach dem weitern Ge
ſetz für $\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$. Die Darſtellung ſolcher Geſetze vermit
telſt der combinatoriſchen Analyſis, ſcheint allein
zum Zweck zu führen, in leichter Ausübung. S. §. 14.

§. 18. So, um ein Beyſpiel anzuführen, das hieher
gehört; wenn [Lambert. Mémoires de Berlin 1770. Ob-
ſervations analytiques §. 15 a)] die Gleichung gegeben iſt:

a) Ein für die Geſchichte des Reverſionsproblems ſehr intereſ-
ſanter Aufſatz: Es erhellet daraus, daß Lambert zuerſt die

$$Fz + yfz = \varphi x$$

nn soll Fz, durch eine Reihe nach y fortschreitend, aus-
ücken:

So ist fz als eine gegebene Function von Fz anzusehen,
f'z; und so erhält man FZ = z und φx = X gesetzt,
Gleichung:

$$Z + yf'Z = X; \text{ also nach §. 2.}$$

$$Zx(n+1).y^n = \frac{1}{1.2.3..n} y^n . \frac{d^n . f'X^n}{dX^n}.$$

Sechstes Problem. Und es fragt sich, $\frac{d^n . f'X}{dX^n}$
auszudrücken, durch Differentiation nach x; wo übrigens
ls gegeben ebenfalls angenommen werden die Differentia-
k von X nach x. Vermittelst der combinatorischen
Reversionsformel, angewandt auf das Verfahren
das Lagrange l. c. §. 200 wo er das nämliche Problem
auflöst, erhält man sehr leicht

$$\frac{d^n . f'X}{1..ndx^n} = \frac{df'X}{dx} \frac{1}{n} p^{-1} xn$$

$$+ \frac{d^2 . f'X}{1.2..dx^2} \frac{1}{n-1} p^{-2} x(n-1)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ \frac{d^r . f'X}{1.2..r.dx^r} \frac{1}{n+1-r} p^{-r} x(n+1-r)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Veranlassung an Euler und Lagrange gab, das Problem
zu behandeln.

Wenn man für die Reihe p annimmt

$$p\left[\frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{1.2.dx^2}, \frac{d^3X}{1.2.3.dx^3}, \cdots\right].$$

An einem andern Ort §. 63 zeigt Lagrange wie man das allgemeine Gesetz übersehen könnte, nämlich. Es ist bekanntlich;

$$\frac{d.\varphi X}{dx} = \frac{d.\varphi X}{dx} \cdot \frac{dX}{dX}; \text{ also}$$

$$\frac{\frac{d.\varphi X}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{d.\varphi X}{dX}, \text{ folglich den nämlichen Schluß}$$

fortgesetzt;

$$\frac{d.\frac{\varphi X}{dx}}{d.\frac{dX}{dx}} = \frac{d^2.\varphi X}{dX^2}$$

Also erhält man überhaupt, das nte Differential von φX nach X, wenn man φX nach x differentiirt und durch $\frac{dX}{dx}$ dividirt; diesen Quotienten nach x differentiirt und aufs Neue durch $\frac{dX}{dx}$ dividirt; kurz nach jeder Differen-

tiation wieder dividirt: obige Formel, welche sich noch mannichfaltig umwandeln läßt (S. Meines Bruders Disquisitt. analyt.) zeigt das Gesetz viel deutlicher; und es läßt sich übrigens blos aus der Theorie der combinatorischen Involutionen [b]), auf Differentiation angewandt, zeigen; daß, wenn Q eine Function von x, und man differentiirt $\frac{I}{Q}$ nach x, dividirt mit Q_2, differentiirt wieder den Quotienten nach x, und dividirt aufs Neue, u. s. f. man nach einer nmal wiederholten Differentiation und Division erhalte, in combinatorischen Zeichen,

$$1.2.3\ldots n + \frac{-(n+1)\mathfrak{A}^n A}{Q^{n+3}} + \frac{-(n+1)\mathfrak{B}^n B}{Q^{n+3}} + \ldots$$

oder in Lokalzeichen

$$1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ p^{-(n+1)}\varkappa(n+1)$$

für Scale und Zeiger

$$p\left\{\begin{matrix} \frac{dQ}{1.2.dx}, & \frac{d^2Q}{1.2.3.dx^2}, & \frac{d^3Q}{1..4.dx^3}, & \ldots \\ 1, & 2, & 3 & \ldots \end{matrix}\right\}$$

So hängen diese Probleme mit dem Reversionsproblem zusammen; und ich füge folgende Auflösung noch hinzu, welche sich auf §. 14 und 17 bezieht.

§. 19. Siebentes Problem. Es sey $Q = F[x,y,z]$ einer Function von x und y und z; wo z ebenfalls eine

b) Dahin gehören Probleme; wie sie Hr. Prof. Rothe oben §. 4. aufgelöst hat: solche, wie Hr. D. Kramp, C. S. c. a. A. S. 44 sqq.; die Vte und VIte Aufgabe; solche, wie hier das VIte und VIIte: davon in meinem Aufsatze. Wie auch das bekannte $d^n.xy$, dessen Gesetz Leibnitz gegeben. Aeußerst interessant in Hinsicht auf dergleichen Probleme aus der Differentialrechnung ist ein Aufsatz von Lagrange Memoires de Berlin 1772. Sur une nouvelle espece de Calcul relatif à la differenciation et à l'integration des quantités variables.

Function von x und y sey; Es bedeute §. 1. $\frac{\partial Q}{\partial z}$ den Werth der Function, wenn man differentiirt und z allein als veränderlich angimmt; eben so $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, nach y und x differentiirt, in sofern nicht zugleich z sich mit ändert; aber $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ u. s. w. den Werth, in so fern x und auch z sich ändert: So fragt man, wie läßt sich der Werth von $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ das heißt der Werth nach nmaliger Differentiation nach x, indem hiebey sich zugleich z ändert, ausdrücken durch Werthe, aus Differentiationen blos nach x und z, (indem jede dieser Größen als unabhängig betrachtet wird) und $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Es wird, wie aus blos combinatorischen Constructionen folgt,

$$\left[\frac{d^nQ}{1.2..ndx^n}\right] = \frac{\partial^nQ}{1..n.\partial x^n} + \frac{\partial^{n-2}Q}{\partial z.2..n-3\,\partial x^{n-3}}a^3A$$

$$+ \frac{\partial^nQ}{\partial z.1.2..n-1.\partial x^{n-1}}a^1A + \frac{\partial^{n-1}Q}{1.2.\partial z^2.2..n-3\partial x^{n-3}}b^3B$$

$$+ \frac{\partial^{n-1}Q}{\partial z.1.2..n-2.\partial x^{n-2}}a^2A + \frac{\partial^nQ}{1.2.3.1.2..n-3.\partial z^3\partial x^{n-3}}c^3C$$

$$+ \frac{\partial^nQ}{1.2.\partial z^2.2.3..n-2.\partial z^{n-2}}b^2B + \text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc}$$

+ etc, wo das (r+1)te Glied wird

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n-r}\left\{\frac{d^{n-r+1}Q}{dz.dx^{n-r}}\cdot\frac{a^rA}{1}+\frac{d^{n-r+2}Q}{dz^2dx^{n-r}}\cdot\frac{b^rB}{1.2}+\frac{d^{n-r+3}Q}{dz^3.dx^{n-r}}\cdot\frac{c^rC}{1.2.3}+\ldots+\frac{d^nQ}{dz^n.dx^{n-r}}\cdot r^rR\right\}$$

und die Reihe mit dem $(n+1)$ten Gliede abbricht. Es erhellet aus dieser Formel, daß man auch fragen könne

Achtes Problem; $\frac{d^nz}{dx^n}$ auszudrücken

durch $\left(\frac{d^nQ}{dx^n}\right)$ und $\frac{d^sd^rQ}{dx^sdz^s}$ allgemein;

Oder, Neuntes Problem; $\frac{d^nQ}{dx^n}$ auszudrücken

durch $\frac{d^md^nQ}{dx^mdz^n}$ und $\frac{d^sd^rz}{dx^sdz^s}$.

Das zweyte Problem hat, wie sich zeigen ließe, der Darstellung und Form nach einige allgemeine Aehnlichkeit mit dem combinatorischen Reversionsproblem, weswegen ich es hier aufführe.

Nämlich, wenn

$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$

$x = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \ldots$ So ist

$$y = a\alpha^1Az + a\alpha^2A\left\{\begin{matrix}z^2 + a\alpha^3A\\ bb^2B\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}z^3 + \ldots\\ bb^3B\\ cc^3C\end{matrix}\right\}$$

Man nehme an, es sey eine Gleichung von letzterer Form gegeben; und man verlangt, man soll daraus a^1A; $a^2A\ldots$; b^2B; $b^3B\ldots$ u. s. w. finden. So wird sich dies

Problem, wie man sieht, darauf reduciren, x durch z auszudrücken: denn alsdann hat man α, β, γ . . . ; Man wird aus der ersten Gleichung y substituiren und vermittelst der Reversion x durch z aus der dritten Gleichung finden.

In der 3ten Gleichung, ist a der allgemeine Factor von der ersten horizontalen Reihe; eben so b der gemeinschaftliche Factor aller Coefficienten, welche aus der zweyten Potenz da sind, u. s. w.; Nun denke man sich eine Gleichung wie §. 18, wo für jeden Coefficienten ein verschiedenes a und b wird; ferner daß y selbst mehrere Werthe nach einander bekomme, von welchen wieder die a und b und c abhangen: so wird dies gleichsam ein allgemeines Problem, mit dem obigen seyn.

Es seyen a1, a2, a3 . . ; b1, b2, b3, . . gewisse gegebene Coefficienten; eben so, A, B, C, . . . $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, . . . Die a und b, u. s. w. ändern sich mit den A, B, C, . . . und dieser ihre Werthe, in sofern sie von B abhangen, zeichne man

$$\overset{2}{a1},\ \overset{2}{a2}\ \ldots\ \overset{2}{b1},\ \overset{2}{b2}\ \ldots$$

in sofern sie von C abhangen, durch

$$\overset{3}{a1},\ \overset{3}{a2},\ \overset{3}{a3}.\ \text{u. s. w.}$$

Nun habe man nach einander folgende Gleichungen, wo p irgend eine Reihe.

$1 = \mathfrak{A} + a_1 . p \times 1$

$$2 = \mathfrak{B} + a_1^2 . p \times 1 + a_2^2 . p \times 2 + b_1^2 . p^2 \times 1$$

$$3 = \mathfrak{C} + a_1^3 . p \times 1 + a_2^3 . p \times 2 + a_3^3 . p \times 3 + b_1^3 . p^2 \times 1 + b_2^3 . p^2 \times 2 + c_1^3 . p^3 \times 1$$

So iſt das VII Problem des §. 18 folgendes allgemein dargeſtellt

Es ſind $a^n, b^n, c^n \ldots$ allgemein gegeben, ſo wie auch p; woraus hat man alſo N

Oder es ſind

$\mathfrak{A}, a^n, b^n, c^n \ldots$, gegeben; Man ſoll aus jenen Gleichungen

$p \times n$

finden.

Letzteres Problem hat Aehnlichkeit mit dem Problem des Herrn D. Kramp [c]). Nur kommen dort keine höhern Potenzen von p vor. Blos die combinatoriſche Analyſis wird jenes Problem vorlegen und auflöſen.

c) De Aequationum decrementalium primi ordinis ſolutione generali. §. 18.

§. 20. Das Allgemeine des Eliminationsprocesses, welcher §. 2. und 6 uns auf eine einfachere Gleichung führte, stellt Lagrange §. 100 sqq. dar.

Es sey nämlich

$F(x, y, z) = \varphi p$, wo φp eine willkührliche Function ist; $p = f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ aber gegebene Functionen sind; überdies ist z eine Function von x und y. Man betrachte y als eine solche Function von x, daß das Differential von p verschwinde; so erhält man, indem man dies Differential wirklich $= o$ setzt, einen Werth von $\frac{dy}{dx}$ der unbestimmten Größe; Nämlich in dem man nach x differentiirt, erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{dz}{dx}\right)\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dy}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial z}\right] = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{dy}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right] = o$$

daraus folgt, durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$, welches durch die zweyte Gleichung bestimmt wird,

$$o = \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{dz}{dx}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z}\right\} + \left(\frac{dz}{dy}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

Dies ist zugleich die allgemeine Form, für alle Gleichung

vom ersten Grade, welche zum Integral eine Gleichung wie obige ist, haben, wo φ unbestimmt ist, welches eliminirt worden.

In unserm Falle für die Gleichung

$\frac{z-x}{y} = fz$, erhalten wir $F(x,y,z) = \frac{(z-x)}{y}$; $p=z$; $\varphi p = fz$

Also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{(z-x)}{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Nach diesen Substitutionen erhalten wir die Gleichung wie oben §. 2.

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)(z-y) - y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

§. 21. Anmerkung. Das Reversionsproblem, in der Gestalt, wie es hier, in der Theorie der Functionen, so wie in der ersten Auflösung von Lagrange (Memoires de Berlin 1768), und in der weit allgemeinern Behandlung von Lambert (ebend. 1770) auftritt, läßt sich vielleicht zum einzigen Problem der ganzen Functionentheorie ausdehnen. Wenigstens scheint es, daß Lambert, aus Gelegenheit seiner

Auflösungen, solch eine allgemeine Aussicht im Sinne hatte d).

Gewiß sah er die Auflösung der Differentialgleichungen vom ersten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen, als ein Exempel jenes Problems an, wenn er die Gleichung

$$o = \varphi y . \psi x . \int F(x, y)\, dx - \int \pi(x, y)\, dy + C$$

vermittelst desselben auflöst: und so sey es erlaubt, inzwischen folgendes allgemeine Problem (ohne Integration und Differentiation) vorzulegen:

Es sind m veränderliche Größen gegeben, $(x, y \ldots s)$ und zwischen ihnen $(m - r)$ Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z \ldots s \ldots) = F(x, y, z \ldots s)$$

Man soll 1) Jede Function von jeder Größe unter denselben, durch willkührliche gegebene Functionen von r Größen aus den m, welche man will, z. B. $\psi s = F(x, z, r, t \ldots)$ ausdrücken.

Aus Lagrange l. c. §. 165, 166 ließe sich folgendes Problem vorlegen. Es sind Größen gegeben, p, q, r, s, t. Man construire aus ihnen alle mtionen mit Wiederholungen,

d) Er sagt §. 1. Voila un probleme

$$f(x, y) = F(x, y);$$

d'une generalité peu commune, et dont la solution paroit promettre de nouveaux progres a l'Analyse; und §. 2. Je regarde la theorie des fonctions, dont on n'a encore que des parties isolées — Je dirai peut etre une autre fois, sous quel point de vue je l'envisage.

und versehe jede solcher mtionen mit einen Coefficienten; die Summe aller dieser mtionen seye

$$Q = \varphi(p, q, r, s, t \ldots)$$

Nun habe man die Gleichungen

$$\left(\frac{dQ}{dp}\right) = o; \left(\frac{dQ}{dq}\right) = o; \left(\frac{dQ}{dr}\right) = o$$

u. s. w., so viel, weniger eine, als Größen da sind; Was ist

$$Q' = \varphi' t$$

wenn alle jene Größen, außer einer, eliminirt worden?

VIII.

Auflösung des Elevationsproblems für Gleichungen von M. K. F. Haubert.

§. 1.

Die im sechsten Hefte des Archivs für reine und angew. Mathem. S. 184, 195, erwähnte Lambertische sowohl, als auch die zweyte von Herrn Prof. Fischer S. 193 ebendas. angegebene Methode, führen, weiter verfolgt, auf folgenden Satz:

Wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung vom rten Grade

$$x^r - \left(ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + s\right) = 0$$

alle auch in der nmal höhern:

$$x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)} + \ldots + Ax^{n^{r-2}} + A^{r-1} = 0$$

enthalten, leztere mithin durch erstere theilbar seyn soll; so müssen die Coefficienten jener, A, B, C ... A^{r-1}, so beschaffen seyn, daß sie folgende r Gleichungen Genüge leisten:

$$ {}^{n}\mathfrak{J} + A.^{n(r-1)}\mathfrak{J} + B.^{n(r-2)}\mathfrak{J} + \ldots + A.^{r-2}{}^{n}\mathfrak{J} + A^{r-1} = 0 $$

$$ {}^{n-1}\mathfrak{J} + A.^{n(r-1)-1}\mathfrak{J} + B.^{n(r-2)-1}\mathfrak{J} + \ldots + A.^{r-2}{}^{n-1}\mathfrak{J} = 0 $$

$$ {}^{n-2}\mathfrak{J} + A.^{n(r-1)-2}\mathfrak{J} + B.^{n(r-2)-2}\mathfrak{J} + \ldots + A.^{r-2}{}^{n-2}\mathfrak{J} = 0 $$

$$ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots $$

$$ {}^{n-(r-1)}\mathfrak{J} + A^{n(r-1)-(r-1)}\mathfrak{J} + B^{n(r-2)-(r-1)}\mathfrak{J} + \ldots + A^{n-(r-1)}\mathfrak{J} = 0 $$

$$ \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & a^{r-1} \end{matrix} \right\} $$

indem man unter ${}^{1}\mathfrak{J}$, ${}^{2}\mathfrak{J}$, ${}^{3}\mathfrak{J}$ u. ſ. w. Größen

$$ \left\{ \begin{matrix} 1\ 2\ 3 \ldots r \\ a\ b\ c \ldots a^{r-1} \end{matrix} \right\} $$

verſteht, die durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$$ {}^{1}\mathfrak{J} = a $$

$$ {}^{2}\mathfrak{J} = a.{}^{1}\mathfrak{J} + b $$

$$ {}^{3}\mathfrak{J} = a.{}^{2}\mathfrak{J} + b.{}^{1}\mathfrak{J} + c $$

$$ \vdots $$

$$ {}^{r}\mathfrak{J} = a.{}^{r-1}\mathfrak{J} + b.{}^{r-2}\mathfrak{J} + c.{}^{r-3}\mathfrak{J} + \ldots + a^{r-1} $$

$$ \vdots $$

$$ {}^{r+m}\mathfrak{J} = a.{}^{r+m-1}\mathfrak{J} + b.{}^{r+m-2}\mathfrak{J} + c.{}^{r+m-3}\mathfrak{J} + \ldots + a.{}^{m}\mathfrak{J}^{r-1} $$

Dies ergiebt ſich durch die erwähnte Lambertiſche Methode, vermöge welcher man die nmal höhere der obigen Gleichungen, dem Produkt der gegebenen durch die Gleichung vom (n−1)rten Grade, wie

$$x^{(n-1)r} + \alpha x^{(n-1)r-1} + \beta x^{(n-1)r-2} + \ldots + \alpha^{(n-1)r-1} = 0,$$

gleichsetzt, wo sodann von den durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x in jener nmal höhern Gleichung und in diesem entwickelten Produkte sich ergebenden Gleichungen, durch die $(n-1)r$ ersten die Werthe der angenommenen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \alpha^{(n-1)r-1}$, wenn man will, von einander unabhängig durch A, B, C ... und

$$\left\{\begin{matrix} {}^{1}\mathfrak{J}^{r}, & {}^{2}\mathfrak{J}^{r}, & {}^{3}\mathfrak{J}^{r} \ldots \\ 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{matrix}\right\} r$$

ausgedrückt werden mögen, die r letzten aber gerade die r oben angeführten seyn werden. Eben dasselbe kann durch die erwähnte Fischerische Methode erhalten werden, unter Voraussetzung der Auflösung der Aufgabe: den Quotienten

$$\frac{+ Ay^{\alpha} + By^{\beta} + \ldots + My^{\mu}}{\left(1 - (ay + by^2 + \ldots + a^{r-1} y^r\right)}$$

in einer nach positiven Potenzen von y fortlaufenden Reihe, nebst deren Ergänzung oder dem Reste, mit independent ausgedrückten Coefficienten anzugeben. Auf dasselbe Resultat gelangt man auch, wenn man vermittelst des Satzes, daß, wenn r und m ganze positive Zahlen sind, und

$$x^r = ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + a^{r-1}$$

, alsdenn

$$x^{r+m} = \left.\begin{array}{l} a.\,{}^{m}\mathfrak{J} \\ +b.\,{}^{m-1}\mathfrak{J} \\ +c.\,{}^{m-2}\mathfrak{J} \\ \vdots \\ +a.\,{}^{r-1}\,{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J} \end{array}\right\} \times x^{r-1} + \left.\begin{array}{l} b.\,{}^{m}\mathfrak{J} \\ +c.\,{}^{m-1}\mathfrak{J} \\ +d.\,{}^{m-2}\mathfrak{J} \\ \vdots \\ +a.\,{}^{r-1}\,{}^{m-(r-2)}\mathfrak{J} \end{array}\right\} \times x^{r-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} +c.\,{}^{m}\mathfrak{J} \\ +d.\,{}^{m-1}\mathfrak{J} \\ \vdots \\ +a.\,{}^{r-1}\,{}^{m-(r-3)}\mathfrak{J} \end{array}\right\} \times x^{r-3} + \ldots + \left.\begin{array}{l} a.\,{}^{r-2}\,{}^{m}\mathfrak{J} \\ +a.\,{}^{r-1}\,{}^{m-1}\mathfrak{J} \end{array}\right\} x + a.\,{}^{r-1}\,{}^{m}\mathfrak{J}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & a^{r-1} \end{array}\right\}.$$

(welcher Satz, wie man leicht finden wird, für $n=1$, $=2$, und wenn für irgend ein n, auch für $n+1$, mithin allgemein gilt) statt der Potenzen von x in der n mal höhern Gleichung ihre Werthe in den niedrigern Potenzen $x^{r-1}, x^{r-2}, \ldots x$ substituirt, nnd nach dieser Verwandlung jedes Gliedes Coefficienten $=0$ setzt. Hiebey gelegentlich folgende Relation:

$${}^{m+n}\mathfrak{J} = {}^{m}\mathfrak{J}.\,{}^{n}\mathfrak{J} + b.\,{}^{m-1}\mathfrak{J}\,{}^{n-1}\mathfrak{J} + c.\left\{\begin{array}{l} +{}^{m-1}\mathfrak{J}\,{}^{n-2}\mathfrak{J} \\ \quad {}^{m-2}\mathfrak{J}\,{}^{n-1}\mathfrak{J} \end{array}\right\}$$

$$+d\left\{\begin{array}{l} \quad {}^{m-1}\mathfrak{J}\,{}^{n-3}\mathfrak{J} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}\,{}^{n-2}\mathfrak{J} \\ +{}^{m-3}\mathfrak{J}\,{}^{n-1}\mathfrak{J} \end{array}\right\} + \ldots + a.\,{}^{r-1}\left\{\begin{array}{l} \quad {}^{m-1}\mathfrak{J}\,{}^{n-(r-1)}\mathfrak{J} \\ +{}^{m-2}\mathfrak{J}\,{}^{n-(r-2)}\mathfrak{J} \\ + \ldots \\ +{}^{m-(r-1)}\mathfrak{J}\,{}^{n-1}\mathfrak{J} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & r \\ a & b & c & \ldots & a^{r-1} \end{array}\right\}$$

welche man leicht für n = 1, = 2 u. s. w., und überhaupt, wenn für n, auch für n+1 wahr findet wird.

Man kann bemerken, daß zu bequemerer Entwickelung von Produkten, wie $^{m}\mathfrak{J} . {}^{n}\mathfrak{J}$, vermittelst vorher construirter Involution zur Summe m+n (den Zeiger gesetzt wie bisher) oft, die übrigens nicht schwierige Auflösung folgender Aufgabe dienen mag:

Für eine gegebene Buchstabencomplexion zur Summe m+n, den Zahlencoefficienten zu finden, der ihr zukommt, wenn sie unter die Theile des entwickelten Produkts $^{m}\mathfrak{J} . {}^{n}\mathfrak{J}$ gehören soll. — So auch für Produkte wie $^{m}\mathfrak{J} . {}^{n}\mathfrak{J} . {}^{p}\mathfrak{J}$ u. s. f.

§. 2. Bey Betrachtung der zweyten von Lambert in seinen Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, II Theil, S. 222 flg. angegebenen Methode, unser Elevationsproblem aufzulösen, wird man, statt des daselbst angeführten Neutonischen Satzes, die independenten Ausdrücke der Summe jeder Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aus deren Coefficienten oder den verschiedenen Klassen der Combinationen jener Wurzeln simpliciter ohne Wiederholungen (Hindenburgs Polyn. Lehrf. S. 290), und umgekehrt der letztern aus den erstern (S. 110. 178. flgg.) vorausgesetzt, von selbst auf folgenden Schluß geleitet:

Da, die gegebene Gleichung

$$x^{r} - (ax^{r-1} + bx^{r-2} + cx^{r-3} + \ldots + {}^{r-1}a) = 0,$$

deren Wurzeln α, β, γ u. s. w., ferner $\alpha^{m} + \beta^{m} + \gamma^{m} + \text{etc} = S(m)$, und die nmal höhere $x^{nr} + Ax^{n(r-1)} + Bx^{n(r-2)} + Cx^{n(r-3)} + \ldots + {}^{r-1}A = 0$ gesetzt, vermöge der beyden Sätze für die vorhin genannten independenten Ausdrücke die Größen A,

B, C . . . durch S(n), S(2n), S(3n) . . ., diese S(n), S(2n), S(3n) . . . aber, durch die Coefficienten a, b, c . . . independent sich ausdrücken lassen; so folgt, daß die Coefficienten A, B, C . . . der nmal erhöhten Gleichung sich aus den gegebenen a, b, c . . . independent ausdrücken lassen.

So ist z. B. für $x=5$, $n=6$,

$$\frac{S(6)}{1} = 6\left\{\frac{f^6F}{6} - \frac{e^6E}{5} + \frac{d^6D}{4} - \frac{c^6C}{3} + \frac{b^6B}{2}\right\}$$

$$\frac{S(12)}{2} = 6\left\{\frac{m^{12}M}{12} - \frac{l^{12}L}{11} + \frac{k^{12}K}{10} - \ldots - \frac{c^{12}C}{3^{12}}\right\}$$

$$\frac{S(18)}{3} = 6\left\{\frac{s^{18}S}{18} - \frac{r^{18}R}{17} + \frac{q^{18}Q}{16} - \ldots + \frac{b^{18}D}{4}\right\}$$

u. s. w. $\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{matrix}\right\}$

und $A = -\frac{a^1A}{1}$

$$B = -\frac{a^2A}{1} + \frac{b^2B}{2}$$

$$C = -\frac{a^3A}{1} + \frac{b^3B}{2} - \frac{c^3C}{3} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\left\{\frac{S(6)}{1}, \frac{S(12)}{2}, \frac{S(18)}{3}, \frac{S(24)}{4}, \frac{S(30)}{5}\right\}$$

Anmerkung. Die in diesem §. angegebenen Formeln findet man auch, wenn man aus den beyden Gleichungen

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$x^6 - v = 0$$

die x, nach der von Lagrange in den Memoires de Berlin 1769 vorgetragenen Methode, eliminirt, und eine Gleichung in v erhält. In der That wird man auch finden, daß das Verfahren nach dieser Methode, die Ableitungen der beyden independenten Ausdrücke für die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aus ihren Coefficienten, und dieser aus jenen, vermittelst des Logarithmen eines Polynomiums und des Ausdrucks für die Erhebung der Basis des natürlichen Logarithmensystems auf eine Potenz, deren Exponent ein Infinitinomium ist, so wie man diese Ableitungen in der angeführten Schrift des Herrn v. Prasse findet, in sich schließt.

§. 3. Den Beweis der beyden erwähnten Sätze (Polynom. Lehrs. S. 110. Usus Logarithm. infinitin. auctore de Prasse §. XXIX) betreffend, bemerke ich, daß dieselben aus dem angeführten Newtonischen Satze direkt und unmittelbar hergeleitet, mithin auch, wenn man will, wofern der letztere elementarisch erwiesen ist, wie dies z. B. in Maclaurin's Algebra, in Eulers Opusc. anal. Tom. I. p. 337. sqq., und in Kästner's Analysis endlicher Größen geschieht, als elementarisch erweislich (vgl. Polyn. Lehrs. S. 279.) betrachtet werden können. Zu dieser Ableitung dient die Betrachtung folgender Involutionen (I und II)

I.

A	a	a	a	
B	a	a	a	
A	b	a	a	
C	a	a		
A	a	b	a	
B	b	a		
A	c	a		
D	a			etc
A	a	a	b	
B	a	b		
A	b	b		
C	b			
A	a	c		
B	c			
A	d			
E				
etc				

II.

αa	βa	γa	δa	εa
	βb	γa	δa	εa
	αa	γb	δa	εa
		γc	δa	εa
	αa	βa	δb	εa
		βb	δb	εa
	αa		δc	εa
			δd	εa etc
αa	βa	γa		εb
	βb	γa		εb
	αa	γb		εb
		γc		εb
	αa	βa		εc
		βb		εc
		αa		εd
				εe
etc				

III.

a	a	a	a	
b	a	a	a	
a	b	a	a	
c	a	a		
a	a	b	a	
b	b	a		
a	c	a		
d	a			etc
a	a	a	b	
b	a	b		
a	b	b		
c	b			
a	a	c		
b	c			
a	d			
e				
etc				

deren Construction und Unterschied von der gewöhnlichen (III) durch den Augenschein erhellen wird, und die Auflösung folgender sich auf dieselbe beziehender Aufgaben:

Es sey $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ irgend eine Complexion, welche in der Involution (III) kmal enthalten sey (mithin K ihre Versetzungszahl). Die Summe der Complexionen zu finden, welche die Stellen der genannten in der Involution (I) besetzen.

Sie ist $\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \times$ 1.

$(\alpha, Abcd + \beta, aBcd + \gamma, abCd + \delta, abcD)\, a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}d^{\delta-1}$;

(woraus sich der in des Herrn v. Prasse angeführter. Schr
§. XXIII, XXIV. erwiesene Satz ergiebt)

Für eine gegebene Complexion aus den Element
a, b, c . . . in der Involution (II) die Summe der ihr b
ihren Versetzungen darinne zukommenden Coefficienten a
α, β, γ . . . zu finden.

Es sey z. B. die Complexion a^3b gegeben, welcher fü
den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{smallmatrix} \vdots \vdots\right)$ die Zahlencomplexion 1112 en
spricht. Man bilde folgendes Schema:

a^3b	1112	1235	$\alpha\beta\gamma\varepsilon$
1112	1121	1245	$\alpha\beta\delta\varepsilon$
	1211	1345	$\alpha\gamma\delta\varepsilon$
	2111	2345	$\beta\gamma\delta\varepsilon$

Man mache nämlich von der letztern alle Versetzungen, und
bilde aus jeder derselben eine neue Zahlencomplexion, deren
erstes, zweytes, drittes, . . . letztes Element
dem ersten, den zwey, den drey ersten, allen Elementen
der genannten Versetzung gleich sey; substituire alsdenn für
jede dieser neuen Zahlencomplexionen, die ihr für den Zeiger

$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{matrix}\right\}$ entsprechende Buchstabencomplexion;

die Summe dieser letztern wird der gesuchte Coefficient seyn.
Für das gegebene Beyspiel ist derselbe $= \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta$
$+ \alpha\gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon$; welches, wenn $\alpha = \frac{1}{1}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$,

$\delta = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ist; $= \frac{1}{1.2.3.5} + \frac{1}{1.2.4.5} + \frac{1}{1.3.4.5}$

$+ \frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3 \times 1.1.1.2}$ wird. Ueberhaupt dient
für den Fall der so eben erwähnten Bestimmungen von α,
β, γ . . ., welcher gerade bey der auf den obigen Gegen-

es zu machenden Anwendung eintritt, der Satz: daß,
n $\varphi(a^m b^n c^p \ldots l^s)$ eine Summe von Brüchen bedeutet,
n so viele sind, als von der Complexion $a^m b^n c^p \ldots l^s$
setzungen gemacht werden können, die ferner alle zum
er 1 haben, zum Nenner aber jede ein Produkt, das ei-
jener Versetzungen so entspricht, daß dessen

ster Factor	dem ersten Elemente der Versetzung,
e zweyte	der Summe der zwey ersten,
e dritte	der Summe der drey ersten
e letzte	der Summe aller Elem. der Vers. gleich sey,

enn

$$a^m b^n c^p \ldots l^s) = \frac{1}{1.2..m \times 1.2..n \times 1.2..p \times .. 1.2.. s \times a^m b^n c^p \ldots l^s}$$

; woraus z. B. sogleich $\varphi(1112)$ (welches für den Fall
$= \frac{1}{1}$, $p = \frac{1}{2}$, u. s. w. der Coefficient vom obigen $a^3 b$
den muß), $= \frac{1}{1.2.3 \times 1.1.1.2}$ folgt.

Ohne Voraussetzung des Newtonischen Satzes läßt sich
indepen dente Ausdruck der Summen von Potenzen der
urzeln einer Gleichung durch ihre Coefficienten unmittelbar
folgende Art herleiten:

Es seyen der Gleichung $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc}$
$= 0$, Wurzeln α, β, γ, etc; so ist

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc}}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc}}$$

$= \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \text{etc}$, wie sich durch Diffe-
ziiren oder auch durch Reduction der Brüche rechter Hand
f einerley Benennung ergiebt. Wenn man nun nach ne-
ven Potenzen von x auf beyden Seiten entwickelt und

ordnet, so findet sich $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc} = m.\,{}^n\mathfrak{J} - (m-1).\,{}^{n-1}\mathfrak{J}.A + (m-2).\,{}^{n-2}\mathfrak{J}.B - (m-3).\,{}^{n-3}\mathfrak{J}.C + (m-4).\,{}^{n-4}\mathfrak{J}.D - \text{etc}$; für den Zeiger $\left\{\begin{matrix} A & B & C & D & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{matrix}\right\}$ als Coefficient von $\frac{1}{x^{n+1}}$ auf beyden Seiten. Hieraus ist alsdenn leicht zu beweisen, daß, wenn z. B. $A^pB^qC^rD$ eine der Complexionen vorstellt, durch welche die Größe $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc}$ vermittelst A, B, C ... ausgedrückt wird, ihr Zahlencoefficient in diesem Ausdruck

$$= n\mathfrak{X}\,\frac{1.2\ldots(p+q+r+s-1)}{1\ldots p\mathfrak{X}\,1\ldots q\mathfrak{X}\,1\ldots r\mathfrak{X}\,1\ldots s}$$ seyn werde.

§. 4. Die Bemerkung vorausgeschickt, daß für eine gegebene Gleichung, wie

$$z = a\overset{n}{\curlyvee}x + b\overset{n}{\curlyvee}x^2 + c\overset{n}{\curlyvee}x^3 + \ldots + s\overset{n+2\;n}{\curlyvee}x^{n-1},$$ die nmal höhere in Absicht auf ihre Buchstabencoefficienten sich durch folgende Formel mit combinatorischen Ausdrücken darstellen lasse:

$$z^n + K\left\{\begin{matrix} {}^nB.z^{n-2} \\ +{}^nC.z^{n-3} \\ +{}^nD.z^{n-4} \\ \vdots \\ +{}^nN.z^{-1} \\ +{}^nN \end{matrix}\right\}x + K\left\{\begin{matrix} {}^{2n}Cz^{n-3} \\ +{}^{2n}Dz^{n-4} \\ +{}^{2n}Ez^{n-5} \\ \vdots \\ +{}^{2n}N.z^{-1} \\ +{}^{2n}N \end{matrix}\right\}x^2$$

$$+\ldots+K.\left\{\begin{matrix} {}^{(n-2)n}N.z^{-1} \\ +{}^{(n-2)n}N \end{matrix}\right\}x^{n-2} + K.{}^{(n-1)n}N.x^{n-1} \pm \left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ a & b & c & \ldots & a^{n-2} \end{matrix}\right\}.$$

wo der für jede Buchstabencomplexion besonders zu findende Zahlencoefficient inzwischen durch das unbestimmte K bezeichnet wird; läßt sich aus §. 2. eine Regel herleiten, um diesen Zahlencoefficienten für jede gegebene Buchstabencomplexion durch ein ziemlich einfaches independentes Verfahren zu finden.

Es sey z. B. $n = 6$, und die Buchstabencomplexion $a^2c^2e^2$ gegeben, welche zu ^{18}F gehört. Den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten sucht man nach folgendem Schema:

			I.	II.	III.	IV.	V.
a^2	c^2	e^2	3. 5. 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1}$	— 6	— 3. 5. 6
c^2	a^2	e^2	1 × 6	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 3. 3
ae	ae	c^2	2 × 3. 4	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 6. 6
ae	ae	c^2	2 × 2 × 1	$\frac{1}{2.2.2}$	$\frac{1}{1.2}$	— 6. 6. 6	— 9. 6
							— 9

Es wird nämlich die gegebene Buchstabencomplexion ($a^2c^2e^2$ ur Summe 18) in so viele Binionen, Ternionen u. s. w, on Complexionen, deren Summenexponenten n oder vielche von n (6,12) sind, als möglich, zerfällt. Von den beygefügn fünf Zahlencolumnen aber enthält die erste die Versetzungsthl der Union, oder der gegebenen Buchstabencomplexion, nd die Produkte der Versetzungszahlen der Theile jeder Bion, Ternion, in welche dieselbe zerfällt worden ist. Die veyte enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner e Dimensions- oder Klassenexponenten derselben Theile

sind; die dritte sodann Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1.2, 1.2.3 u. s. w. sind, jenachdem in einer Binion, Ternion u. s. w. ein und derselbe Theil einmal, zweymal (so wie hier ae in der Ternion) dreymal u. s. w. vorkommt; die vierte $-n, +n^2, -n^3$ u. s. w. (hier $-6, +6.6, -6.6.6$) mit abwechselnden Zeichen für die Union, für jede der Binionen, Ternionen u. s. w. Die fünfte endlich enthält die Produkte aus den Horizontalreihen; von welchen Produkten alsdenn die Summe (hier -9) der gesuchte Zahlencoefficient seyn wird.

§. 5. Aus Waring's Satz über die Summe alle Produkte irgend welcher Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, zu zwey und zwey, drey und drey u. s. w. combinirt (Probl. III. in dessen Meditationibus algebraicis, wovon die dritte Ausgabe zu Cambridge 1782 erschienen ist), namentlich auf die Gleichung $x^n - 1 = 0$ angewandt (Lemma XX ebendaselbst), ergiebt sich zunächst ein etwas verschiedenes, für die Ausübung meist etwas weitläufigeres Verfahren zu Bestimmung der Zahlencoefficienten, von welchen die Rede ist: von dessen Resultaten übrigens die Identität aus denen des erstern Verfahrens sich leicht wird darthun lassen. Zu Darstellung dieses Verfahrens nur ein Beyspiel ebenfalls an der Complexion $a^2 c^2 e^2$, vermittelst folgender Schema's:

$a^2\ c^2\ e^2$		$1.2.3.4.5$	-6	1	$-3.5.6$
c^2	a^2e^2	$1\times 1.2.3$	1	$2.2.2$	$+3.9$
ie	$a^2e'c^2$	$1\times 1.2.3$	.		$+3.3.3$
ie'	a^2ec^2	$1\times 1.2.3$	$+6.6$		$+3.3.3$
$i'e$	$ae'c^2$	$1\times 1.2.3$			$+3.3.3$
$i'e'$	aec^2	$1\times 1.2.3$			$+3.3.3$
i^2	ae $a'e'$	$1\times 1\times 1$	$-6.6.6$		$-3.3.3$
i^2	$a'e$ ae'	$1\times 1\times 1$			$-3.3.3$
					-9

Die am Ende beygefügte Formel für die sechsfache Erhöhung ist nach beyderley Verfahren berechnet worden, und damit hinlänglich verificirt.

§. 6. Die Mühe der Bestimmung der Zahlencoefficienten läßt sich beynahe um die Hälfte vermindern, wenn man bemerkt, welches sich auch a priori erweisen läßt, daß immer in den Coefficienten gleichweit von den äußersten abstehender Potenzen von x in der elevirten Gleichung, sowohl von denselben Zahlencoefficienten, begleitete, als auch sich nach einer gewissen Regel entsprechende und auseinander herzuleitende Buchstabencomplexionen vorkommen müssen; daher, wenn für eine $2n+1$ oder $2n+2$fache Erhöhung die Buchstaben- und zugehörige Zahlencoefficienten der $n+1$ersten Potenzen von x in der erhöhten Gleichung bestimmt sind, die Coefficienten der übrigen Potenzen sich leicht aus diesen herleiten lassen.

§. 7. Die obenangeführte Formel Waring's (Medit. Algebr. Probl. III,) betreffend, habe ich mich mit Auseinandersetzung des Beweises derselben beschäftigt, aus derselben, ohne Zuziehung von Lemm. XX, noch ein drittes, von den beyden vorhergehenden verschiedenes Verfahren zu Bestimmung der Zahlencoefficienten hergeleitet; und allgemei-

ner, aus dieser Formel, welche, um mich Kürze halber auf Cramer's Introd. à l'anal. des lignes courbes, appendice, n. III. zu beziehen, wenn man statt der p. 663 daselbst vorkommenden Zahlencomplexionen, die ihnen entsprechenden Facteurs-seconds denkt, aus den Gliedern der ersten Verticalreihe die Glieder aller übrigen Reihen ausdrücken lehrt, ein Verfahren hergeleitet, um aus den Gliedern der ersten Horizontalreihe (welches immer die Coefficienten einer gegebenen Gleichung sind) alle Glieder der übrigen Reihen auszudrücken; und zwar wiederum ein independentes Verfahren, durch welches für jede der leichtzufindenden Buchstabencomplexionen auch der zugehörige Zahlencoefficient bestimmt werden kann. Ich glaube ferner der Cramerischen Regel im angeführten Anhang, „pour supputer le produit de deux facteurs-seconds quelconques" eine Vervollständigung gegeben zu haben, deren sie bedurfte, und habe Gebrauch davon gemacht, um das Fermatische Problem der Wegschaffung der Irrationalitäten aus einer Gleichung wie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}=0$ aufzulösen. Bey einer zweyten Auflösung ebendesselben Problems habe ich ein der obigen analoges Zerfällungsverfahren zu Bestimmung der Zahlencoefficienten gebraucht. Man sehe die folgende Abhandlung IX.

Man hat im obigen (§. 2, 4) ein Beyspiel, wie Größen dargestellt werden können, welche durch Complexionen zu gewissen Summen nach Zeigern bestimmt werden, in welchen die den Zahlen entsprechenden Elemente selbst wiederum complexe Ausdrücke sind, die ebenfalls durch Complexionen zu gewissen Summen nach andern Zeigern bestimmt werden; oder, mit andern rein-analytischen Ausdrücken, ein Beyspiel, wie Größen independent gefunden werden können, die das Resultat recurrirender Ausdrücke sind, deren Relationsscalen selbst durch andere recurrirende Ausdrücke bestimmt werden. Es mag oft von Nutzen seyn, der obigen

analoge Methoden für solche Fälle zu haben. So habe ich ein Verfahren gefunden, um für jede Buchstabencomplexion in den Formeln S. 122. von Lagrange's neu mit Zusätzen herausgekommener Abhandlung de la résolution des équations numériques den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten independent zu finden, obgleich jedes Glied in diesen Formeln, nach p. 49. ebendaselbst, von mehrern recurrirenden Ausdrücken abhängt, deren einer die Relationsscale des andern bestimmt.

Die weitere Ausführung eines und des andern dieser Gegenstände vielleicht ein andermal.

Hier folgt die (§. 5. S. 245) versprochene Erhöhungsformel, nach der daselbst angegebenen Verification:

Formel für die sechsfache Erhöhung:

Wenn $z = \sqrt[6]{a}x + \sqrt[6]{b}x^2 + \sqrt[6]{c}x^3 + \sqrt[6]{d}x^4 + \sqrt[6]{e}x^5$, so i

$z^6 - 6ae - 6bd - 3c^2$ } z^4
$-6a^2d - 12abc - 2b^3$ } z^3
$-6a^3c - 9a^2b^2$ } z^2
$-6a^4bz$
$-a^6$

$x - 6be^2 - 12cde - 2d^3$ } z^3
$+9a^2e^2 + 0.abde + 0.ac^2e - 18acd^2 - 18b^2ce + 9b^2d^2 + 0.bc^2d + 3c^4$ } z^2
$+12a^3de + 0.a^2bce + 0.a^2bd^2 - 18a^2c^2d - 12ab^3e + 0.ab^2cd + 6b^4d - 6b^3c^2$ } z
$+6a^4ce + 3a^4d^2 - 6a^3b^2e - 2a^3c^3 - 12a^3bcd + 6a^2b^3d + 9a^2b^2c^2 - 6ab^4c + b^6$

$x^2 - 6ce^3 - 9d^2e^2$ } z^2
$+12abe^3 + 0.acde^2 + 0.b^2de^2 - 12ad^2e - 18bc^2e^2 + 0.bcd^2e + 6bd^4 + 12c^2de - 6c^2d^3$ } z
$-2a^3e^3 + 18a^2bde^2 - 9a^2c^2e^2 + 0.a^2cd^2e - 3a^2d^4 - 18ab^2d^2e + 0.ab^2ce^2 + 0.abc^2de + 12abcd^3 + 6ac^4e - 6ac^3d^2 - 3b^4e^2 + 12b^3cde + 2b^3d^3 - 6b^2c^3e - 9b^2c^2d^2 - 6bc^4d - c^6$

$x^3 - 6de^4z + 6ace^4 - 6ad^2e^3 + 3b^2e^4 - 12bcde^3 + 6bd^3e^2 - 2c^3e^3 + 9c^2d^2e^2 - 6cd^4e + d^6$

$x^4 -$

IX.

Auflösung einer andern, die Wegschaffung der Irrationalitäten aus Gleichungen, betreffenden Aufgabe; von M. K. F. Hauber.

§. 1.

Diese Aufgabe ist: Gleichungen, wie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$; von ihren Wurzelgrößen zu befreyen.

§. 2. Es wird dienlich seyn, gleich anfangs folgende Bemerkung zu machen: Da die Größen a, b, c, d, e in jeder der gegebenen Gleichungen auf einerley Art vorkommen, so werden sie auch in den gesuchten Gleichungen, welche lauter rationale Ausdrücke enthalten sollen, auf einerley Art vorkommen müssen. Wenn z. B. in einer der gesuchten Gleichungen ab^7 mit einem gewissen Zahlencoefficienten vorkommen sollte, so werden auch ba^7, ac^7, ca^7 u. s. w. mit demselben Zeichen und Zahlencoefficienten darinne vorkommen müssen.

§. 3. Man setze in der Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$, x statt $\sqrt{c}$, und gedenke sich die gesuchte Gleichung nach Potenzen von x geordnet; so kann man $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ als Auflösung derselben, oder $x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ als eine ihrer Wurzeln ansehen. Man weiß aber, daß, wenn $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ die Auflösung einer Gleichung vorstellt, zugleich auch $x+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $x-\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$,

$x - \sqrt{a} - \sqrt{b} = o$, Auflösungen derselben seyn werden; und da dieselbe mithin vier Wurzeln hat, wovon übrigens je zwey gleich sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben, so kann man hieraus schließen, daß gedachte Gleichung von der Form

$$x^4 + Ax^2 + B = o$$

$$(\text{oder } c^2 + Ac + B = o)$$

nämlich vom vierten Grade seyn, aber lauter gerade Potenzen von x enthalten werde.

Auf ähnliche Art wird man schließen, daß für die Gleichung $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = o$, die gesuchte folgende Form:

$$d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D' = o;$$

und für die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = o$, die gesuchte Form:

$$e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H'' = o$$

haben wird.

Ich werde zweyerley Arten vortragen, die Größen A, B; A′ ... D′; A″ ... H″; zu bestimmen.

Erste Art. §. 4. Für die Gleichung $x^4 + Ax^2 + B = o$, oder $c^2 + Ac + B = o$, ist eine ihrer Wurzeln, oder einer der Werthe von $x = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$; mithin $\sqrt{a} + \sqrt{b} + x$ (oder $+\sqrt{c}$) $= o$, ein Factor jener Gleichung. Eben so finden sich aus den übrigen Wurzeln die übrigen Factoren, $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; daher ist $c^2 + Ac + B$ = dem Producte

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (c - [\sqrt{a} + \sqrt{b}]^2) \times (c - [\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2) = c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2$; mithin $A = -2(a+b)$, $B = (a-b)^2$.

§. 5. Eben so findet sich, daß $d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D'$, die so eben gemachten Bestimmungen von A, B vorausgesetzt, seyn muß = dem Producte

von $(\sqrt{}d + \sqrt{}c)^4 + A.(\sqrt{}d + \sqrt{}c)^2 + B$

durch $(\sqrt{}d - \sqrt{}c)^4 + A.(\sqrt{}d - \sqrt{}c)^2 + B$

das ist,

$= (d-c)^4 + (A + \Sigma 1) \times A.(d-c)^2 + (B + A.\Sigma 1 + \Sigma 2) \times B$

wenn $(\sqrt{}d + \sqrt{}c)^2 + (\sqrt{}d - \sqrt{}c)^2$, d. i. $2(d+c) = \Sigma 1$,

$(\sqrt{}d + \sqrt{}c)^4 + (\sqrt{}d - \sqrt{}c)^4$, d. i. $2(d^2 + 6cd + c^2) = \Sigma 2$

gesetzt wird; und hieraus findet sich nach gehöriger Entwickelung

$A' = -4(a+b+c)$

$B' = 6(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + ac + bc)$

$C' = -4(a^3 + b^3 + c^3) + 4(a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2) - 40\,abc$

$D' = a^4 + b^4 + c^4 - 4(a^3b + a^3c + b^3c + ab^3 + ac^3 + bc^3) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$

§. 6. Und, diese Bedeutungen von A', B', C', D' beybehalten, findet sich ferner $e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H'' =$ dem Producte

von $(\sqrt{}e + \sqrt{}d)^8 + A'(\sqrt{}e + \sqrt{}d)^6 + B'(\sqrt{}e + \sqrt{}d)^4 + C'(\sqrt{}e + \sqrt{}d)^2 + D'$

durch $(\sqrt{}e - \sqrt{}d)^8 + A'(\sqrt{}e - \sqrt{}d)^6 + B'(\sqrt{}e - \sqrt{}d)^4 + C'(\sqrt{}e - \sqrt{}d)^2 + D'$,

d. i. $= (e-d)^8 + (A' + \Sigma'1) \times A' \times (e-d)^6 + (B' + A'.\Sigma 1' + \Sigma 2') \times B' \times (e-d)^4 + (C' + B'.\Sigma 1' + A'.\Sigma 2' + \Sigma 3') \times C + (e-d)^2 + (D' + C'.\Sigma 1' + B'.\Sigma 2' + A'.\Sigma 3' + \Sigma 4') \times D$, [a]

indem $(\sqrt{e}+\sqrt{d})^2+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^2=\Sigma 1'$
$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^4+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^4=\Sigma 2'$
$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^6+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^6=\Sigma 3'$
$(\sqrt{e}+\sqrt{d})^8+(\sqrt{e}-\sqrt{d})^8=\Sigma 4'$ gesetzt werden, wo offenbar ist, daß die Werthe $\Sigma 1' \ldots \Sigma 4'$, entwickelt, keine Wurzelgrößen mehr enthalten.

Die Entwickelung des Ausdrucks [α] könnte sehr mühsam scheinen, wegen dazu erforderlicher Multiplication ziemlich zusammengesetzter Ausdrücke in einander; inzwischen bin ich damit, und sonach mit Herleitung der im §. 11. für diesen Fall anzugebenden Formel, doch ziemlich leicht zu Stande gekommen, und zwar mit Hülfe gewisser Regeln „pour supputer le produit de deux facteurs-seconds quelconques", um mich Kürze halber auf die schon im vorigen Aufsatz angeführte Stelle in Cramer's Introd. à l'anal. des lig. courb. App. N. III. zu beziehen; von welchen Regeln ich ein andermal zu reden gedenke.

§. 7. Es wäre noch weiter, die nach dem vorhergehenden §. zu machenden Bestimmungen von $A'' \ldots H''$ vorausgesetzt, für $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}=0$, die gesuchte, von Wurzelgrößen freye Gleichung, folgende: Das Product

von $(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}+\sqrt{e})^{12}+\ldots+H''$

durch

$(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{16}+A''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{14}+B''(\sqrt{f}-\sqrt{e})^{12}+\ldots+H''$,

$$= (f-e)^{16} + (A'' + \Sigma 1'').\, A''.\, (f-e)^{14}$$
$$+ (B'' + A''\Sigma 1'' + \Sigma 2'').\, B''.\, (f-e)^{12}$$
$$+ (C'' + B''.\Sigma 1'' + A''\Sigma 2'' + \Sigma 3'').\, C''.\, (f-e)^{10}$$
$$+ (D'' + C''.\Sigma 1'' + B''.\Sigma 2'' + A''.\Sigma 3'' + \Sigma 4'').\, D''.\, (f-e)^{8}$$
$$+ (E'' + D''.\Sigma 1'' + C''.\Sigma 2'' + B''.\Sigma 3'' + A''.\Sigma 4'' + \Sigma 5'').\, E''.\, (f-e)^{6}$$
$$+ (F'' + E''.\Sigma 1'' + D''.\Sigma 2'' + C''.\Sigma 3'' + B''.\Sigma 4'' + A''\Sigma 5'' + \Sigma 6'').\, F''.\, (f-e)^{4}$$
$$+ (G'' + F''.\Sigma 1'' + E''.\Sigma 2'' + D''.\Sigma 3'' + C''.\Sigma 4'' + B''.\Sigma 5'' + A''.\Sigma 6'' + \Sigma 7'').\, G''.\, (f-e)^{2}$$
$$+ (H'' + G''.\Sigma 1'' + F''.\Sigma 2'' + E''.\Sigma 3'' + D''.\Sigma 4'' + C''.\Sigma 5'' + B''.\Sigma 6'' + A''.\Sigma 7'' + \Sigma 8'').\, H''$$
$$= 0,$$

wo
$$\Sigma 1'' = (rf + re)^2 + (rf - re)^2$$
$$\Sigma 2'' = (rf + re)^4 + (rf - re)^4$$
$$\vdots$$
$$\Sigma 8'' = (rf + re)^{16} + (rf - re)^{16}$$

Und so könnte man noch bey einer größern Anzahl gegebener Radicalien fortgehen.

Uebrigens kann man sich vermittelst der §. 2 gemachten Bemerkung ein gut Theil von der Mühe der Entwicklung dieser Ausdrücke ersparen; und ich habe gefunden, daß durch diese Bemerkung, mit den im vorhergehenden §. angeführten Hülfsmitteln zu Abkürzung der Rechnung verbunden, diese erste Art, die verlangten Gleichungen zu finden, für die Praxis kürzer ist und geschwinder zum Ziele führt, als die nun vorzutragende zweyte Methode, welche dazu dient, für jede gegebene Buchstabencomplexion in der verlangten Gleichung, den ihr zugehörigen Zahlencoëfficienten durch ein Verfahren zu finden, dessen Ausübung zwar nicht schwierig, aber oft sehr langwierig ist.

ordnet, so findet sich $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc} = m.\,{}^n\mathfrak{J}^r-(m-1).\,{}^{n-1}\mathfrak{J}^r.A+(m-2).\,{}^{n-2}\mathfrak{J}^r.B-(m-3).\,{}^{n-3}\mathfrak{J}^r.C+(m-4).\,{}^{n-4}\mathfrak{J}^r.D-\text{etc}$; für den Zeiger $\left\{\begin{matrix}A & B & C & D & \ldots\\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\end{matrix}\right\}$ als Coefficient von $\frac{1}{x^{n+r}}$ auf beyden Seiten. Hieraus ist alsdenn leicht zu beweisen, daß, wenn z. B. $A^pB^qC^rD^s$ eine der Complexionen vorstellt, durch welche die Größe $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc}$ vermittelst A, B, C ... ausgedrückt wird, ihr Zahlencoefficient in diesem Ausdruck

$$= n\times\frac{1.2\ldots(p+q+r+s-1)}{1\ldots p\times 1\ldots q\times 1\ldots r\times 1\ldots s}$$ seyn werde.

§. 4. Die Bemerkung vorausgeschickt, daß für eine gegebene Gleichung, wie

$$z = a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x^2}+c\sqrt[n]{x^3}+\ldots+a\sqrt[n+2\ n]{x^{n-1}},$$ die nmal höhere in Absicht auf ihre Buchstabencoefficienten sich durch folgende Formel mit combinatorischen Ausdrücken darstellen lasse:

$$z^n+K\left\{\begin{matrix}{}^nB.z^{n-2}\\ +{}^nC.z^{n-3}\\ +{}^nD.z^{n-4}\\ \vdots\\ +{}^nN.z^{-1}\\ +{}^nN\end{matrix}\right\}x+K\left\{\begin{matrix}{}^{2n}Cz^{n-3}\\ +{}^{2n}Dz^{n-4}\\ +{}^{2n}Ez^{n-5}\\ \vdots\\ +{}^{2n}N.z^{-1}\\ +{}^{2n}N\end{matrix}\right\}x^2$$

$$+\ldots+K.\left\{\begin{matrix}{}^{(n-2)n}N.z^{-1}\\ +{}^{(n-2)n}N\end{matrix}\right\}x^{n-2}+K.{}^{(n-1)n}N.x^{n-1}=0$$

$$\left\{\begin{matrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-1\\ a & b & c & \ldots & a^{n-2}\end{matrix}\right\}$$

o der für jede Buchstabencomplexion besonders zu findende ahlencoefficient inzwischen durch das unbestimmte K bezeichnet wird; läßt sich aus §. 2. eine Regel herleiten, um iesen Zahlencoefficienten für jede gegebene Buchstabencomlexion durch ein ziemlich einfaches independentes Verfahren u finden.

Es sey z. B. n = 6, und die Buchstabencomplexion c^2e^2 gegeben, welche zu ^{18}F gehört. Den ihr zugehörien Zahlencoefficienten sucht man nach folgendem Schema:

			I.	II.	III.	IV.	V.
a^2	c^2	e^2	3. 5. 6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{1}$	— 6	— 3. 5. 6
c^2	a^2	e^2	1 × 6	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 3. 3
ae	ae	c^2	2×3. 4	$\frac{1}{2.4}$	$\frac{1}{1}$	+ 6. 6	+ 3. 6. 6
ae	ae	c^2	2×2×1	$\frac{1}{2.2.2}$	$\frac{1}{1.2}$	— 6. 6. 6	— 9. 6
							— 9

s wird nämlich die gegebene Buchstabencomplexion ($a^2c^2e^2$ r Summe 18) in so viele Binionen, Ternionen u. s. w, n Complexionen, deren Summenexponenten n oder vielhe von n (6,12) sind, als möglich, zerfällt. Von den beygefügn fünf Zahlencolumnen aber enthält die erste die Versetzungsl der Union, oder der gegebenen Buchstabencomplexion, d die Produkte der Versetzungszahlen der Theile jeder Bin, Ternion, in welche dieselbe zerfällt worden ist. Die eyte enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner Dimensions- oder Klassenexponenten derselben Theile

sind; die dritte sodann Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1.2, 1.2.3 u. s. w. sind, jenachdem in einer Binion, Ternion u. s. w. ein und derselbe Theil einmal, zweymal (so wie hier ae in der Ternion) dreymal u. s. w. vorkommt; die vierte $-n, +n^2, -n^3$ u. s. w. (hier $-6, +6.6, -6.6.6$) mit abwechselnden Zeichen für die Union, für jede der Binionen, Ternionen u. s. w. Die fünfte endlich enthält die Produkte aus den Horizontalreihen; von welchen Produkten alsdenn die Summe (hier -9) der gesuchte Zahlencoefficient seyn wird.

§. 5. Aus Waring's Satz über die Summe aller Produkte irgend welcher Potenzen der Wurzeln einer Gleichung, zu zwey und zwey, drey und drey u. s. w. combinirt, (Probl. III. in dessen Meditationibus algebraicis, wovon die dritte Ausgabe zu Cambridge 1784 erschienen ist), namentlich auf die Gleichung $x^n - 1 = 0$ angewandt (Lemma XX ebendaselbst), ergiebt sich zunächst ein etwas verschiedenes, für die Ausübung meist etwas weitläufigeres Verfahren zu Bestimmung der Zahlencoefficienten, von welchen die Rede ist: von dessen Resultaten übrigens die Identität aus denen des erstern Verfahrens sich leicht wird darthun lassen. Zu Darstellung dieses Verfahrens nur ein Beyspiel, ebenfalls an der Complexion $a^2 c^2 e^2$, vermittelst folgendes Schema's:

$a^2\ c^2\ e^2$			1.2.3.4.5	— 6	1	— 3.5.6
c^2	a^2e^2		1 × 1 2 3	1	2.2.2	+ 3. 9
ae	$a'e'c^2$		1 × 1 2 3	.		+ 3. 3. 3
ae′	$a'ec^2$		1 × 1. 2. 3	+ 6.6		+ 3. 3. 3
a′e	$ae'c^2$		1 × 1. 2. 3			+ 3. 3. 3
a′e′	aec^2		1 × 1. 2. 3			+ 3. 3. 3
c^2	ae	a′e′	1 × 1 × 1	— 6.6.6		— 3. 3. 3
c^2	a′e	ae′	1 × 1 × 1			— 3. 3. 3
						— 9

Die am Ende beygefügte Formel für die sechsfache Erhöhung ist nach beyderley Verfahren berechnet worden, und damit hinlänglich verificirt.

§. 6. Die Mühe der Bestimmung der Zahlencoefficienten läßt sich beynahe um die Hälfte vermindern, wenn man bemerkt, welches sich auch a priori erweisen läßt, daß immer in den Coefficienten gleichweit von den äußersten abstehender Potenzen von x in der elevirten Gleichung, sowohl von denselben Zahlencoefficienten, begleitete, als auch sich nach einer gewissen Regel entsprechende und auseinander herzuleitende Buchstabencomplexionen vorkommen müssen; daher, wenn für eine 2n+1 oder 2n+2fache Erhöhung die Buchstaben- und zugehörige Zahlencoefficienten der n+1ersten Potenzen von x in der erhöhten Gleichung bestimmt sind, die Coefficienten der übrigen Potenzen sich leicht aus diesen herleiten lassen.

§. 7. Die obenangeführte Formel Waring's (Medit. algebr. Probl. III,) betreffend, habe ich mich mit Auseinandersetzung des Beweises derselben beschäftigt, aus derselben, ohne Zuziehung von Lemm. XX, noch ein drittes, von den beyden vorhergehenden verschiedenes Verfahren zu Bestimmung der Zahlencoefficienten hergeleitet; und allgemei-

ner, aus dieser Formel, welche, um mich Kürze halber a
Cramer's Introd. à l'anal. des lignes courbes, appendic
n. III. zu beziehen, wenn man statt der p. 663 daselbst vo
kommenden Zahlencomplexionen, die ihnen entsprechend
Facteurs-seconds denkt, aus den Gliedern der ersten Ve
ticalreihe die Glieder aller übrigen Reihen ausdrücken leh
ein Verfahren hergeleitet, um aus den Gliedern der erste
Horizontalreihe (welches immer die Coefficienten einer geg
benen Gleichung sind) alle Glieder der übrigen Reihen au
zudrücken; und zwar wiederum ein independentes Verfahre
durch welches für jede der leichtzufindenden Buchstabencom
plexionen auch der zugehörige Zahlencoefficient bestimm
werden kann. Ich glaube ferner der Cramerischen Rege
im angeführten Anhang, „pour supputer le produit d
deux facteurs-seconds quelconques" eine Vervollständi
gung gegeben zu haben, deren sie bedurfte, und habe Ge
brauch davon gemacht, um das Fermatische Problem de
Wegschaffung der Irrationalitäten aus einer Gleichung wi
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}+\sqrt{f}=0$ aufzulösen. Be
einer zweyten Auflösung ebendesselben Problems habe ich ei
der obigen analoges Zerfällungsverfahren zu Bestimmung
der Zahlencoefficienten gebraucht. Man sehe die folgend
Abhandlung IX.

Man hat im obigen (§. 2, 4) ein Beyspiel, wie Größe
dargestellt werden können, welche durch Complexionen z
gewissen Summen nach Zeigern bestimmt werden, in wel
chen die den Zahlen entsprechenden Elemente selbst wiederum
complexe Ausdrücke sind, die ebenfalls durch Complexione
zu gewissen Summen nach andern Zeigern bestimmt werden
oder, mit andern rein-analytischen Ausdrücken, ein Bey
spiel, wie Größen independent gefunden werden können, di
das Resultat recurrirender Ausdrücke sind, deren Rela
tionsscalen selbst durch andere recurrirende Ausdrücke be
stimmt werden. Es mag oft von Nutzen seyn, der obig

analoge Methoden für solche Fälle zu haben. So habe ich ein Verfahren gefunden, um für jede Buchstabencomplexion in den Formeln S. 122. von Lagrange's neu mit Zusätzen herausgekommener Abhandlung de la résolution des équations numériques den ihr zugehörigen Zahlencoefficienten independent zu finden, obgleich jedes Glied in diesen Formeln, nach p. 49. ebendaselbst, von mehrern recurrirenden Ausdrücken abhängt, deren einer die Relationsscale des andern bestimmt.

Die weitere Ausführung eines und des andern dieser Gegenstände vielleicht ein andermal.

Hier folgt die (§. 5. S. 245) versprochene Erhöhungsformel, nach der daselbst angegebenen Verification:

Formel für die sechsfache Erhöhung:

Wenn $z = a\sqrt[6]{x} + b\sqrt[6]{x^2} + c\sqrt[6]{x^3} + d\sqrt[6]{x^4} + e\sqrt[6]{x^5}$, so i

z^6

$-6ae$ z^4
$-6bd$
$-3c^2$
$-6a^2d$ z^3
$-12abc$
$-2b^3$
$-6a^3c$ z^2
$-9a^2b^2$
$-6a^4bz$
$-a^6$

x

$-6be^2$ z^3
$-12cde$
$-2d^3$
$+9a^2e^2$ z^2
$+0.abde$
$+0.ac^2e$
$-18acd^2$
$-18b^2ce$
$+9b^2d^2$
$+0.bc^2d$
$+3c^4$
$+12a^3de$ z
$+0.a^2bce$
$+0.a^2bd^2$
$-18a^2c^2d$
$-12ab^3e$
$+0.ab^2cd$
$+6b^4d$
$-6b^3c^2$
$+6a^4ce$
$+3a^4d^2$
$-6a^3b^2e$
$-2a^3c^3$
$-12a^3bcd$
$+6a^2b^3d$
$+9a^2b^2c^2$
$-6ab^4c$
$+b^6$

x^2

$-6ce^3$ z^2
$-9d^2e^2$
$+12abe^3$ z
$+0.acde^2$
$+0.b^2de^2$
$-12ad^3e$
$-18bc^2e^2$
$+0.bcd^2e$
$+6bd^4$
$+12c^3de$
$-6c^2d^3$
$-2a^3e^3$
$+18a^2bde^2$
$-9a^2c^2e^2$
$+0.a^2cd^2e$
$-3a^2d^4$
$-18ab^2d^2e$
$+0.ab^2ce^2$
$+0.abc^2de$
$+12abcd^3$
$+6ac^4e$
$-6ac^3d^2$
$-3b^4e^2$
$+12b^3cde$
$+2b^3d^3$
$-6b^2c^3e$
$-9b^2c^2d^2$
$-6bc^4d$
$-c^6$

x^3

$-6de^4z$ x^4
$+6ace^4$
$-6ad^2e^3$
$+3b^2e^4$
$-12bcde^3$
$+6bd^3e^2$
$-2c^3e^3$
$+9c^2d^2e^2$
$-6cd^4e$
$+d^6$

IX.

Auflösung einer andern, die Wegschaffung der Irrationalitäten aus Gleichungen, betreffenden Aufgabe; von M. K. F. Hauber.

§. 1.

Diese Aufgabe ist: Gleichungen, wie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$; von ihren Wurzelgrößen zu befreyen.

§. 2. Es wird dienlich seyn, gleich anfangs folgende Bemerkung zu machen: Da die Größen a, b, c, d, e in jeder der gegebenen Gleichungen auf einerley Art vorkommen, so werden sie auch in den gesuchten Gleichungen, welche lauter rationale Ausdrücke enthalten sollen, auf einerley Art vorkommen müssen. Wenn z. B. in einer der gesuchten Gleichungen ab^7 mit einem gewissen Zahlencoefficienten vorkommen sollte, so werden auch ba^7, ac^7, ca^7 u. s. w. mit demselben Zeichen und Zahlencoefficienten darinne vorkommen müssen.

§. 3. Man setze in der Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$, x statt $\sqrt{c}$, und gedenke sich die gesuchte Gleichung nach Potenzen von x geordnet; so kann man $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ als Auflösung derselben, oder $x=-\sqrt{a}-\sqrt{b}$ als eine ihrer Wurzeln ansehen. Man weiß aber, daß, wenn $x+\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ die Auflösung einer Gleichung vorstellt, zugleich auch $x+\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $x-\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$,

$x - \sqrt{a} - \sqrt{b} = o$, Auflösungen derselben seyn werden; und da dieselbe mithin vier Wurzeln hat, wovon übrigens je zwey gleich sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben, so kann man hieraus schließen, daß gedachte Gleichung von der Form

$$x^4 + Ax^2 + B = o$$

$$(\text{oder } c^2 + Ac + B = o)$$

nämlich vom vierten Grade seyn, aber lauter gerade Potenzen von x enthalten werde.

Auf ähnliche Art wird man schließen, daß für die Gleichung $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = o$, die gesuchte folgende Form:

$$d^4 + A'd^3 + B'd^2 + C'd + D' = o;$$

und für die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = o$, die gesuchte Form:

$$e^8 + A''e^7 + B''e^6 + C''e^5 + D''e^4 + E''e^3 + F''e^2 + G''e + H'' = o$$

haben wird.

Ich werde zweyerley Arten vortragen, die Größen A, B; A' ... D'; A'' ... H''; zu bestimmen.

Erste Art. §. 4. Für die Gleichung $x^4 + Ax^2 + B = o$, oder $c^2 + Ac + B = o$, ist eine ihrer Wurzeln, oder einer der Werthe von $x = -\sqrt{a} - \sqrt{b}$; mithin $\sqrt{a} + \sqrt{b} + x$ (oder $+\sqrt{c}$) $= o$, ein Factor jener Gleichung. Eben so finden sich aus den übrigen Wurzeln die übrigen Factoren, $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = o$; daher ist $c^2 + Ac + B$ = dem Producte

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}) \times (-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = (c - [\sqrt{a} + \sqrt{b}]^2) \times (c - [\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2)$
$= c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2$; mithin $A = -2(a+b)$, $B = (a-b)^2$.

§. 5. Eben so findet sich, daß $d^4+A'd^3+B'd^2+C'd+D'$, die so eben gemachten Bestimmungen von A, B vorausgesetzt, seyn muß = dem Producte

von $(\sqrt{}d+\sqrt{}c)^4+A.(\sqrt{}d+\sqrt{}c)^2+B$

durch $(\sqrt{}d-\sqrt{}c)^4+A.(\sqrt{}d-\sqrt{}c)^2+B$

das ist,

$=(d-c)^4+(A+\Sigma 1)\times A.(d-c)^2+(B+A.\Sigma 1+\Sigma 2)\times B$

wenn $(\sqrt{}d+\sqrt{}c)^2+(\sqrt{}d-\sqrt{}c)^2$, d. i. $2(d+c)=\Sigma 1$,

$(\sqrt{}d+\sqrt{}c)^4+(\sqrt{}d-\sqrt{}c)^4$, d. i. $2(d^2+6cd+c^2)=\Sigma 2$

gesetzt wird; und hieraus findet sich nach gehöriger Entwickelung

$A'=-4(a+b+c)$

$B'=6(a^2+b^2+c^2)+4(ab+ac+bc)$

$C'=-4(a^3+b^3+c^3)+4(a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2)$
$-40abc$

$D'=a^4+b^4+c^4-4(a^3b+a^3c+b^3c+ab^3+ac^3+bc^3)$
$+6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+4(a^2bc+b^2ac+c^2ab)$

§. 6. Und, diese Bedeutungen von A', B', C', D' beybehalten, findet sich ferner $e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''$ = dem Producte

von $(\sqrt{}e+\sqrt{}d)^8+A'(\sqrt{}e+\sqrt{}d)^6+B'(\sqrt{}e+\sqrt{}d)^4$
$+C'(\sqrt{}e+\sqrt{}d)^2+D'$

durch $(\sqrt{}e-\sqrt{}d)^8+A'(\sqrt{}e-\sqrt{}d)^6+B'(\sqrt{}e-\sqrt{}d)^4$
$+C'(\sqrt{}e-\sqrt{}d)^2+D'$,

d. i. $=(e-d)^8+(A'+\Sigma'1)\times A'\times(e-d)^6$
$+(B'+A'.\Sigma 1'+\Sigma 2')\times B'\times(e-d)^4$
$+(C'+B'.\Sigma 1'+A'.\Sigma 2'+\Sigma 3')\times C+(e-d)^2$
$+(D'+C'.\Sigma 1'+B'.\Sigma 2'+A'.\Sigma 3'+\Sigma 4')\times D$, [a]

indem $(\gamma e+\gamma d)^2+(\gamma e-\gamma d)^2=\Sigma 1'$
$(\gamma e+\gamma d)^4+(\gamma e-\gamma d)^4=\Sigma 2'$
$(\gamma e+\gamma d)^6+(\gamma e-\gamma d)^6=\Sigma 3'$
$(\gamma e+\gamma d)^8+(\gamma e-\gamma d)^8=\Sigma 4'$ gesetzt werden, wo offenbar ist, daß die Werthe $\Sigma 1' \ldots \Sigma 4'$, entwickelt, keine Wurzelgrößen mehr enthalten.

Die Entwickelung des Ausdrucks [α] könnte sehr mühsam scheinen, wegen dazu erforderlicher Multiplication ziemlich zusammengesetzter Ausdrücke in einander; inzwischen bin ich damit, und sonach mit Herleitung der im §. 11. für diesen Fall anzugebenden Formel, doch ziemlich leicht zu Stande gekommen, und zwar mit Hülfe gewisser Regeln „pour supputer le produit de deux facteurs-seconds quelconques", um mich Kürze halber auf die schon im vorigen Aufsatz angeführte Stelle in Cramer's Introd. à l'anal. des lig. courb. App. N. III. zu beziehen; von welchen Regeln ich ein andermal zu reden gedenke.

§. 7. So wäre noch weiter, die nach dem vorhergehenden §. zu machenden Bestimmungen von $A'' \ldots H''$ vorausgesetzt, für $\gamma a+\gamma b+\gamma c+\gamma d+\gamma e+\gamma f=0$, die gesuchte, von Wurzelgrößen freye Gleichung, folgende: Das Product

von $(\gamma f+\gamma e)^{16}+A''(\gamma f+\gamma e)^{14}+B''(\gamma f+\gamma e)^{12}+\ldots+H''$

durch

$(\gamma f-\gamma e)^{16}+A''(\gamma f-\gamma e)^{14}+B''(\gamma f-\gamma e)^{12}+\ldots+H''$,

$$= (f-e)^{16} + (A'' + \Sigma 1'').A''.(f-e)^{14}$$
$$+ (B'' + A''\Sigma 1'' + \Sigma 2'').B''.(f-e)^{12}$$
$$+ (C'' + B''.\Sigma 1'' + A''\Sigma 2'' + \Sigma 3'').C''.(f-e)^{10}$$
$$+ (D'' + C''.\Sigma 1'' + B''.\Sigma 2'' + A''.\Sigma 3'' + \Sigma 4'').D''.(f-e)^{8}$$
$$+ (E'' + D''.\Sigma 1'' + C''.\Sigma 2'' + B''.\Sigma 3'' + A''.\Sigma 4'' + \Sigma 5'').E''.(f-e)^{6}$$
$$+ (F'' + E''.\Sigma 1'' + D''.\Sigma 2'' + C''.\Sigma 3'' + B''.\Sigma 4'' + A''\Sigma 5'' + \Sigma 6'')F''.(f-e)^{4}$$
$$+ (G'' + F''.\Sigma 1'' + E''.\Sigma 2'' + D''.\Sigma 3'' + C''.\Sigma 4'' + B''.\Sigma 5''$$
$$+ A''.\Sigma 6'' + \Sigma 7'').G''.(f-e)^{2}$$
$$+ (H'' + G''.\Sigma 1'' + F''.\Sigma 2'' + E''.\Sigma 3'' + D''.\Sigma 4'' + C''.\Sigma 5''$$
$$+ B''.\Sigma 6'' + A''.\Sigma 7'' + \Sigma 8'').H''$$
$$= 0,$$

wo $\Sigma 1'' = (\sqrt{f} + \sqrt{e})^2 + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^2$

$\Sigma 2'' = (\sqrt{f} + \sqrt{e})^4 + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^4$

$\vdots$

$\Sigma 8'' = (\sqrt{f} + \sqrt{e})^{16} + (\sqrt{f} - \sqrt{e})^{16}$

Und so könnte man noch bey einer größern Anzahl gegebener Radicalien fortgehen.

Uebrigens kann man sich vermittelst der §. 2 gemachten Bemerkung ein gut Theil von der Mühe der Entwicklung dieser Ausdrücke ersparen; und ich habe gefunden, daß durch diese Bemerkung, mit den im vorhergehenden §. angeführten Hülfsmitteln zu Abkürzung der Rechnung verbunden, diese erste Art, die verlangten Gleichungen zu finden, für die Praxis kürzer ist und geschwinder zum Ziele führt, als die nun vorzutragende zweyte Methode, welche dazu dient, für jede gegebene Buchstabencomplexion in der verlangten Gleichung, den ihr zugehörigen Zahlencoëfficienten durch ein Verfahren zu finden, dessen Ausübung zwar nicht schwierig, aber oft sehr langwierig ist.

Zweyte Art. §. 8. Für die gegebene Gleichung $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}=0$, um sogleich mit diesem Fall anzufangen, hatten wir die gesuchte gesetzt

$e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''=0$,

und diese Gleichung wird, wenn man e als eine unbekannte Größe ansieht, den obigen Bemerkungen gemäß, folgende acht Wurzeln haben:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$$

Man setze die Summe dieser Wurzeln $= S(1)$, die Summe ihrer Quadrate $= S(2)$, ihrer Würfel $= S(3)$ u. s. w., so ist, wie sich leicht aus dem polynomischen Lehrsatz ergiebt;

$S(1) = 8(a+b+c+d)$

$S(2) = 8(a^2+b^2+c^2+d^2+6[ab+ac+ad+bc+bd+cd])$

$S(3) = 8(a^3+b^3+c^3+d^3+15[a^2b+a^2c^2+a^2d+b^2a+b^2c+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c]+6.15[abc+abd+acd+bcd])$

u. s. w.

Wo der jeder Buchstabencomplexion vorangesetzte Zahlencoefficient nichts anders ist, als die Versetzungszahl einer Complexion, worinn jeder Buchstabe eine doppelt so hohe Dimension hat.

Ferner ist vermöge der im vorhergehenden Aufsatz angeführten Formel für den independenten Ausdruck der Coefficienten einer Gleichung aus den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln

$$A'' = -\frac{a^1 A}{1}$$

$$B'' = -\frac{a^2 A}{1} + \frac{b^2 B}{1.2}$$

$$C'' = -\frac{a^3 A}{1} + \frac{b^3 B}{1.2} - \frac{c^3 C}{1.2.3}$$

u. s. w.

für den Zeiger

$$\left\{\frac{1}{S(1)}, \frac{2}{S(2)}, \frac{3}{S(3)} \cdots \frac{8}{S(8)}\right\}$$

§. 9. Man sieht hieraus, daß die Buchstabencomplexionen in S(1) und A'', die einfachen Größen a, b, c, d, in S(2) und A'', Producte aus denselben zu zwey Dimensionen, oder Binionen mit Wiederholungen, in S(3) und A'', alle Producte zu drey Dimensionen u. s. w. seyn werden (daher denn, wie im polynomischen Lehrsatz, die Darstellung aller Arten von unähnlichen Complexionen, die zu B'', oder C'' oder etc. gehören, von der Construction von Combinationsklassen zu einer gegebenen Summe abhängt). Was aber die Zahlencoefficienten betrifft, so läßt sich aus den Formeln des vorhergehenden §. ein Verfahren herleiten, um für jede gegebene Buchstabencomplexion in der gesuchten Gleichung, ihren zugehörigen Zahlencoefficienten zu bestimmen, welches ich an einem Beyspiel zeigen will.

Es sey die Buchstabencomplexion bc^3e^4 gegeben, wo also bc^3 einen Theil von D'' ausmacht. Man bilde folgendes Schema:

			I.	II.	III.	IV.	V.
bc^3			4·7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	−8	$-7\cdot 8$
b	c^3		1×1	$\frac{1}{1\cdot 3}$	$\frac{1}{1}$	+8·8	$+\frac{8\cdot 8}{3}$
bc	c^2		6×1	$\frac{1}{2\cdot 2}$	$\frac{1}{1}$		$+6\cdot 4\cdot 4$
c	bc^2		1×15	$\frac{1}{1\cdot 3}$	$\frac{1}{1}$		$+5\cdot 8\cdot 8$
b	c	c^2	1×1×1	$\frac{1}{1\,1\cdot 2}$	$\frac{1}{1}$	−8·8·8	$-4\cdot 8\cdot 8$
c	c	bc	1×1×6	$\frac{1}{1\cdot 1\cdot 2}$	$\frac{1}{1\cdot 2}$		$-3\cdot 4\cdot 8\cdot 8$
b	c	c	c	1×1×1×1	$\frac{1}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}$	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$	+8·8·8·8	$+\frac{4\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{3}$
							+40

Die Complexion bc^3 wird nämlich auf alle mögliche Arten in Binionen, Ternionen u. s. w. zerfällt. Von den neben jeder Union, Binion, Ternion u. s. w. beygesetzten Zahlen sind die in der ersten Columne immer die Versetzungszahlen, nicht der Theile der Binionen, u. s. w. selbst, sondern der Complexionen von der doppelten Dimension (z. B. dem Theil bc correspondirt in I. die Zahl 6, welches die Versetzungszahl von b^2c^2 ist). Die zweyte Zahlencolumne enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner die Dimensionsexponenten jener Buchstabencomplexionen sind. Die dritte enthält Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1. 2, 1. 2. 3 u. s. w. sind, je nachdem ein Theil einer Binion, Ternion u. s. w. 1mal, 2mal, 3mal u. s. w. vorkommt; die vierte endlich enthält -8, $+8^2$, -8^3, $+8^4$

für die Union, Binionen, Ternionen, Quaternionen. Die fünfte enthält die Producte aus den Horizontalreihen der vorhergehenden Zahlencolumnen; und die Summe dieser Producte ist der gesuchte Zahlencoefficient. Der Complexion bc^3e^4 kommt demnach in der gesuchten Gleichung der Zahlencoefficient $+40$ zu

Man könnte diesen Zahlencoefficienten (nach §. 2) noch auf andere Art suchen, indem man ihn für ab^4c^3, oder a^3b^4c mittelst eines ähnlichen Verfahrens bestimmte: allein das Verfahren würde weitläufiger werden, als wenn man die Complexion bc^3e^4 oder ab^3e^4 nimmt, wo e^4 die höchste Dimension hat. Man mag den Zahlencoefficienten für eine Buchstabencomplexion zu suchen haben, für welche man will, so lasse man immer den Buchstaben, der die höchste Dimension in derselben hat, mit seinem Exponenten weg, und verfahre mit dem Rest nach Art des vorigen Schema's.

So reduciren sich in unserm Falle, wo $\gamma a+\gamma b+\gamma c+\gamma d+\gamma e=0$, die gegebene Gleichung ist, alle dergleichen verkürzte Complexionen, für deren jede besonders ihr Zahlencoefficient vermittelst des angezeigten Verfahrens zu suchen ist, auf folgende: $a; a^2, a^3, a^4$; $ab, ab^2, ab^3, a^2b^2, a^2b^3$; $abc, abc^2, abc^3, ab^2c^2, a^2b^2c^2$; $abcd, abcd^2, abc^2d^2$.

§. 10. Die verlangte Gleichung selbst braucht übrigens nicht mehr nach Potenzen von e oder irgend einer andern von den Größen a, b, c, d, e geordnet zu werden; sondern man faßt in derselben immer alle ähnliche Buchstabencomplexionen mit ihren gemeinschaftlichen Zahlencoefficienten zusammen. Im gegenwärtigen Falle zerfälle man die Zahl 8 in die

Binionen	Ternionen	Quaternionen	Quinionen
17	116	1115	11114
26	125	1124	11123
35	134	1133	11222
44	224	1223	
	233	2222	

ſo ſind folgendes die Aggregate ähnlicher Buchſtabencomplexionen in der verlangten Gleichung:

$\varphi(8) = a^8+b^8+c^8+d^8+e^8 = \mathfrak{s}a^8$, wenn man will, nach Klügels Bezeichnungsart im Polynom. Lehrſatz.

$\varphi(1,7) = a^7(b+c+d+e)+b^7(a+c+d+e)+c^7(a+b+d+e)$
$+d^7(a+b+c+e)+e^7(a+b+c+d) = \mathfrak{s}a^7b,$

$\varphi(2,6) = a^6(b^2+c^2+d^2+e^2)+b^6(a^2+c^2+d^2+e^2)$
$+c^6(a^2+b^2+d^2+e^2)+d^6(a^2+b^2+c^2+e^2)$
$+e^6(a^2+b^2+c^2+d^2) = \mathfrak{s}a^6b^2,$

$\varphi(3,5) = a^5(b^3+c^3+d^3+e^3)+b^5(a^3+c^3+d^3+e^3)$
$+c^5(a^3+b^3+d^3+e^3)+d^5(a^3+b^3+c^3+e^3)$
$+e^5(a^3+b^3+c^3+d^3) = \mathfrak{s}a^5b^3,$

$\varphi(4,4) = a^4b^4+a^4c^4+a^4d^4+a^4e^4+b^4c^4+b^4d^4+b^4e^4$
$+c^4d^4+c^4e^4+d^4e^4 = \mathfrak{s}a^4b^4,$

$\varphi(1,1,6) = a^6(bc+bd+be+cd+ce+de)+b^6(ac+ad+ae$
$+cd+ce+de)+c^6(ab+ad+ae+bd+be+de)$
$+d^6(ab+ac+ae+bc+be+ce)+e^6(ab+ac$
$+ad+bc+bd+cd) = \mathfrak{s}a^6bc,$

$$\varphi(1,2,5) = a^5 \begin{pmatrix} bc^2 + bd^2 + be^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + b^2c + b^2d + b^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ b^5 \begin{pmatrix} ac^2 + ad^2 + ae^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + a^2c + a^2d + a^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ c^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ad^2 + ae^2 + bd^2 + be^2 + de^2 \\ + a^2b + a^2d + a^2e + b^2d + b^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ d^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ac^2 + ae^2 + bc^2 + be^2 + ce^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2e + b^2c + b^2e + c^2e \end{pmatrix}$$
$$+ e^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 + cd^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d \end{pmatrix}$$
$$= \int a^5 b^2 c,$$

$$\varphi(1,3,4) = a^4 \begin{pmatrix} bc^3 + bd^3 + be^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + b^3c + b^3d + b^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ b^4 \begin{pmatrix} ac^3 + ad^3 + ae^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + a^3c + a^3d + a^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ c^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ad^3 + ae^3 + bd^3 + be^3 + de^3 \\ + a^3b + a^3d + a^3e + b^3d + b^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ d^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ac^3 + ae^3 + bc^3 + be^3 + ce^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3e + b^3c + b^3e + c^3e \end{pmatrix}$$
$$+ e^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ac^3 + ad^3 + bc^3 + bd^3 + cd^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3d + b^3c + b^2d + c^3d \end{pmatrix}$$
$$= \int a^4 b^3 c,$$

$$\varphi(2,2,4) = a^4(b^2c^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ b^4(a^2c^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ c^4(a^2b^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ d^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2e^2 + b^2c^2 + b^2e^2 + c^2e^2)$$
$$+ e^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$
$$= \int a^4 b^2 c^2,$$

$$\varphi(2,3,3) = a^2(b^3c^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) + b^2(a^3c^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) + c^2(a^3b^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + d^3e^3) + d^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3e^3 + b^3c^3 + b^3e^3 + c^3e^3) + e^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3d^3 + b^3c^3 + b^3d^3 + c^3d^3) = \int a^3b^3c^2,$$

$$\varphi(1,1,1,5) = a^5(bcd + bce + bde + cde) + b^5(acd + ace + ade + cde) + c^5(abd + abe + ade + bde) + d^5(abc + abe + ace + bce) + e^5(abc + abd + acd + bcd) = \int a^5bcd,$$

$$\varphi(1,1,2,4) = (a^2b^4 + a^4b^2)(cd + ce + de) + (a^2c^4 + a^4c^2)(bd + be + de) + (a^2d^4 + a^4d^2)(bc + be + ce) + (a^2e^4 + a^4e^2)(bc + bd + cd) + (b^2c^4 + b^4c^2)(ad + ae + de) + (b^2d^4 + b^4d^2)(ac + ae + ce) + (b^2e^4 + b^4e^2)(ac + ad + cd) + (c^2d^4 + c^4d^2)(ab + ae + be) + (c^2e^4 + c^4e^2)(ab + ad + bd) + (d^2e^4 + d^4e^2)(ab + ac + bc) = \int a^4b^2cd,$$

$$\varphi(1,1,3,3) = a^3b^3(cd + ce + de) + a^3c^3(bd + be + de) + a^3d^3(bc + be + ce) + a^3e^3(bc + bd + cd) + b^3c^3(ad + ae + de) + b^3d^3(ac + ae + ce) + b^3e^3(ac + ad + cd) + c^3d^3(ab + ae + be) + c^3e^3(ab + ad + bd) + d^3e^3(ab + ac + bc) = \int a^3b^3cd,$$

$$\varphi(1,2,2,3) = (ab^3 + a^3b)(c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2) + (ac^3 + a^3c)(b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2) + (ad^3 + a^3d)(b^2c^2 + b^2e^2 + c^2e^2) + (ae^3 + a^3e)(b^2c^2 + b^2d^2 + e^2d^2) + (bc^3 + b^3c)(a^2d^2 + a^2e^2 + d^2e^2) + (bd^3 + b^3d)(a^2c^2 + a^2e^2 + c^2e^2) + (be^3 + b^3e)(a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2) + (cd^3 + c^3d)(a^2b^2 + a^2e^2 + b^2e^2) + (ce^3 + c^3e)(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2) + (de^3 + d^3e)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \int a^3b^2c^2d^2$$

$$\varphi(2,2,2,2) = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + b^2c^2d^2e^2$$
$$= \int a^2b^2c^2d^2,$$

$$\varphi(1,1,1,1,4) = a^4bcde + ab^4cde + abc^4de + abcd^4e + abcde^4$$
$$= \int a^4bcde,$$

$$\varphi(1,1,1,2,3) = abc(d^2e^3+d^3e^2) + abd(c^2e^3+c^3e^2) + abe(c^2d^3$$
$$+ c^3d^2) + acd(b^2e^3+b^3e^2) + ace(b^2d^3+b^3d^2)$$
$$+ ade(b^2c^3 + b^3c^2) + bcd(a^2e^3 + a^3e^2)$$
$$+ bce(a^2d^3 + a^3d^2) + bde(a^2c^3 + a^3c^2)$$
$$+ cde(a^2b^3 + a^3b^2) = \int a^3b^2cde,$$

$$\varphi(1,1,2,2,2) = a^2b^2c^2de + a^2b^2d^2ce + a^2b^2e^2cd + a^2c^2d^2be$$
$$+ a^2c^2e^2bd + a^2d^2e^2bc + b^2c^2d^2ae + b^2c^2e^2ad$$
$$+ b^2d^2e^2ac + c^2d^2e^2ab = \int a^2b^2c^2de$$

§. 11. Ich ſetze nun die geſuchte von Wurzelgrößen befreyte Gleichungen hieher, wie ich ſie durch die beyden vorgetragenen Methoden gefunden habe. Sie ſind

1. für die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$,
$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc) = 0$

2. für $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$,
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$
$- 4(a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + a^3d + ad^3 + b^3c + bc^3 + b^3d$
$+ bd^3 + c^3d + cd^3)$
$+ 6(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$
$+ 4(a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab + ad + bd)$
$+ d^2(ab + ac + bc))$
$- 24abcd = 0$

Gg

Zweyte Art. §. 8. Für die gegebene Gleichung $r_a+r_b+r_c+r_d+r_e=0$, um sogleich mit diesem Fall anzufangen, hatten wir die gesuchte gesetzt

$e^8+A''e^7+B''e^6+C''e^5+D''e^4+E''e^3+F''e^2+G''e+H''=0$,

und diese Gleichung wird, wenn man e als eine unbekannte Größe ansieht, den obigen Bemerkungen gemäß, folgende acht Wurzeln haben:

$(r_a+r_b+r_c+r_d)^2$
$(r_a+r_b+r_c-r_d)^2$
$(r_a+r_b-r_c+r_d)^2$
$(r_a+r_b-r_c-r_d)^2$
$(r_a-r_b+r_c+r_d)^2$
$(r_a-r_b+r_c-r_d)^2$
$(r_a-r_b-r_c+r_d)^2$
$(r_a-r_b-r_c-r_d)^2$

Man setze die Summe dieser Wurzeln $= S(1)$, die Summe ihrer Quadrate $= S(2)$, ihrer Würfel $= S(3)$ u. s. w., so ist, wie sich leicht aus dem polynomischen Lehrsatz ergiebt;

$S(1)=8(a+b+c+d)$

$S(2)=8(a^2+b^2+c^2+d^2+6[ab+ac+ad+bc+bd+cd])$

$S(3)=8(a^3+b^3+c^3+d^3+15[a^2b+a^2c^2+a^2d+b^2a+b^2c+b^2d+c^2a+c^2b+c^2d+d^2a+d^2b+d^2c]+6.15[abc+abd+acd+bcd])$

u. s. w.

Wo der jeder Buchstabencomplexion vorangesetzte Zahlencoefficient nichts anders ist, als die Versetzungszahl einer Complexion, worinn jeder Buchstabe eine doppelt so hohe Dimension hat.

Ferner ist vermöge der im vorhergehenden Aufsatz angeführten Formel für den independenten Ausdruck der Coëfficienten einer Gleichung aus den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln

$$A'' = -\frac{a^1 A}{1}$$

$$B'' = -\frac{a^2 A}{1} + \frac{b^2 B}{1.2}$$

$$C'' = -\frac{a^3 A}{1} + \frac{b^3 B}{1.2} - \frac{c^3 C}{1.2.3}$$

u. s. w.

für den Zeiger

$$\left\{ \frac{1}{S(1)}, \frac{2}{S(2)}, \frac{3}{S(3)} \cdots \frac{8}{S(8)} \right\}$$

§. 9. Man sieht hieraus, daß die Buchstabencomplexionen in S(1) und A'', die einfachen Größen a, b, c, d, in S(2) nnd A'', Producte aus denselben zu zwey Dimensionen, oder Binionen mit Wiederholungen, in S(3) und A'', alle Producte zu drey Dimensionen u. s. w. seyn werden (daher denn, wie im polynomischen Lehrsatz, die Darstellung aller Arten von unähnlichen Complexionen, die zu B'', oder C'' oder etc. gehören, von der Construction von Combinationsklassen zu einer gegebenen Summe abhängt). Was aber die Zahlencoefficienten betrifft, so läßt sich aus den Formeln des vorhergehenden §. ein Verfahren herleiten, um für jede gegebene Buchstabencomplexion in der gesuchten Gleichung, ihren zugehörigen Zahlencoefficienten zu bestimmen, welches ich an einem Beyspiel zeigen will.

Es sey die Buchstabencomplexion bc^3e^4 gegeben, wo also bc^3 einen Theil von D'' ausmacht. Man bilde folgendes Schema:

			I.	II.	III.	IV.	V.
bc^3			4·7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	−8	−7·8
b	c^3		1× 1	$\frac{1}{1\cdot 3}$	$\frac{1}{1}$	+8·8	$+\frac{8\cdot 8}{3}$
bc	c^2		0× 1	$\frac{1}{2\cdot 2}$	$\frac{1}{1}$		+6·4·4
c	bc^2		1× 15	$\frac{1}{1\cdot 3}$	$\frac{1}{1}$		+5·8·8
b	c	c^2	1× 1× 1	$\frac{1}{1\ 1.2}$	$\frac{1}{1}$	−8·8·8	−4·8·8
c	c	bc^2	1× 1×6	$\frac{1}{1.1.2}$	$\frac{1}{1.2}$		−3·4·8·8
b	c	c	c	1× 1× 1× 1	$\frac{1}{1.1.1.1}$	$\frac{1}{1.2.3}$	+8·8·8·8	$+\frac{4\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{3}$
							+ 40

Die Complexion bc^3 wird nämlich auf alle mögliche Arten in Binionen, Ternionen u. s. w. zerfällt. Von den neben jeder Union, Binion, Ternion u. s. w. beygesetzten Zahlen sind die in der ersten Columne immer die Versetzungszahlen, nicht der Theile der Binionen, u. s. w. selbst, sondern der Complexionen von der doppelten Dimension (z. B. dem Theil bc correspondirt in I. die Zahl 6, welches die Versetzungszahl von b^2c^2 ist). Die zweyte Zahlencolumne enthält Brüche, deren Zähler 1, und deren Nenner die Dimensionsexponenten jener Buchstabencomplexionen sind. Die dritte enthält Brüche, deren Zähler ebenfalls 1, und deren Nenner 1, 1, 2, 1.2.3 u. s. w. sind, je nachdem ein Theil einer Binion, Ternion u. s. w. 1mal, 2mal, 3mal u. s. w. vorkommt; die vierte endlich enthält -8, $+8^2$, -8^3, $+8^4$

für die Union, Binionen, Ternionen, Quaternionen. Die fünfte enthält die Producte aus den Horizontalreihen der vorhergehenden Zahlencolumnen; und die Summe dieser Producte ist der gesuchte Zahlencoefficient. Der Complexion bc^3e^4 kommt demnach in der gesuchten Gleichung der Zahlencoefficient $+40$ zu

Man könnte diesen Zahlencoefficienten (nach §. 2) noch auf andere Art suchen, indem man ihn für ab^4c^3, oder a^3b^4c mittelst eines ähnlichen Verfahrens bestimmte: allein das Verfahren würde weitläufiger werden, als wenn man die Complexion bc^3e^4 oder ab^3e^4 nimmt, wo e^4 die höchste Dimension hat. Man mag den Zahlencoefficienten für eine Buchstabencomplexion zu suchen haben, für welche man will, so lasse man immer den Buchstaben, der die höchste Dimension in derselben hat, mit seinem Exponenten weg, und verfahre mit dem Rest nach Art des vorigen Schema's.

So reduciren sich in unserm Falle, wo $\gamma a + \gamma b + \gamma c + \gamma d + \gamma e = o$, die gegebene Gleichung ist, alle dergleichen verkürzte Complexionen, für deren jede besonders ihr Zahlencoefficient vermittelst des angezeigten Verfahrens zu suchen ist, auf folgende: a; a^2, a^3, a^4; ab, ab^2, ab^3, a^2b^2, a^2b^3; abc, abc^2, abc^3, ab^2c^2, $a^2b^2c^2$; $abcd$, $abcd^2$, abc^2d^2.

§. 10. Die verlangte Gleichung selbst braucht übrigens nicht mehr nach Potenzen von e oder irgend einer andern von den Größen a, b, c, d, e geordnet zu werden; sondern man faßt in derselben immer alle ähnliche Buchstabencomplexionen mit ihren gemeinschaftlichen Zahlencoefficienten zusammen. Im gegenwärtigen Falle zerfälle man die Zahl 8 in die

Binionen	Ternionen	Quaternionen	Quinionen
17	116	1115	11114
26	125	1124	11123
35	134	1133	11222
44	224	1223	
	233	2222	

so sind folgendes die Aggregate ähnlicher Buchstabencomplexionen in der verlangten Gleichung:

$\varphi(8) = a^8+b^8+c^8+d^8+e^8 = \int a^8$, wenn man will, nach Klügels Bezeichnungsart im Polynom. Lehrsatz.

$\varphi(1,7) = a^7(b+c+d+e)+b^7(a+c+d+e)+c^7(a+b+d+e)+d^7(a+b+c+e)+e^7(a+b+c+d) = \int a^7 b$,

$\varphi(2,6) = a^6(b^2+c^2+d^2+e^2)+b^6(a^2+c^2+d^2+e^2)+c^6(a^2+b^2+d^2+e^2)+d^6(a^2+b^2+c^2+e^2)+e^6(a^2+b^2+c^2+d^2) = \int a^6 b^2$,

$\varphi(3,5) = a^5(b^3+c^3+d^3+e^3)+b^5(a^3+c^3+d^3+e^3)+c^5(a^3+b^3+d^3+e^3)+d^5(a^3+b^3+c^3+e^3)+e^5(a^3+b^3+c^3+d^3) = \int a^5 b^3$,

$\varphi(4,4) = a^4b^4+a^4c^4+a^4d^4+a^4e^4+b^4c^4+b^4d^4+b^4e^4+c^4d^4+c^4e^4+d^4e^4 = \int a^4 b^4$,

$\varphi(1,1,6) = a^6(bc+bd+be+cd+ce+de)+b^6(ac+ad+ae+cd+ce+de)+c^6(ab+ad+ae+bd+be+de)+d^6(ab+ac+ae+bc+be+ce)+e^6(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = \int a^6 bc$,

$$\varphi(1,2,5) = a^5 \begin{pmatrix} bc^2 + bd^2 + be^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + b^2c + b^2d + b^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ b^5 \begin{pmatrix} ac^2 + ad^2 + ae^2 + cd^2 + ce^2 + de^2 \\ + a^2c + a^2d + a^2e + c^2d + c^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ c^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ad^2 + ae^2 + bd^2 + be^2 + de^2 \\ + a^2b + a^2d + a^2e + b^2d + b^2e + d^2e \end{pmatrix}$$
$$+ d^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ac^2 + ae^2 + bc^2 + be^2 + ce^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2e + b^2c + b^2e + c^2e \end{pmatrix}$$
$$+ e^5 \begin{pmatrix} ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 + cd^2 \\ + a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{f}a^5b^2c,$$

$$\varphi(1,3,4) = a^4 \begin{pmatrix} bc^3 + bd^3 + be^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + b^3c + b^3d + b^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ b^4 \begin{pmatrix} ac^3 + ad^3 + ae^3 + cd^3 + ce^3 + de^3 \\ + a^3c + a^3d + a^3e + c^3d + c^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ c^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ad^3 + ae^3 + bd^3 + be^3 + de^3 \\ + a^3b + a^3d + a^3e + b^3d + b^3e + d^3e \end{pmatrix}$$
$$+ d^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ac^3 + ae^3 + bc^3 + be^3 + ce^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3e + b^3c + b^3e + c^3e \end{pmatrix}$$
$$+ e^4 \begin{pmatrix} ab^3 + ac^3 + ad^3 + bc^3 + bd^3 + cd^3 \\ + a^3b + a^3c + a^3d + b^3c + b^2d + c^3d \end{pmatrix}$$
$$= \mathfrak{f}a^4b^3c,$$

$$\varphi(2,2,4) = a^4(b^2c^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ b^4(a^2c^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ c^4(a^2b^2 + a^2d^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2)$$
$$+ d^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2e^2 + b^2c^2 + b^2e^2 + c^2e^2)$$
$$+ e^4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$
$$= \mathfrak{f}a^4b^2c^2,$$

$$\varphi(2,3,3) = a^2(b^3c^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) + b^2(a^3c^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + c^3d^3 + c^3e^3 + d^3e^3) + c^2(a^3b^3 + a^3d^3 + a^3e^3 + b^3d^3 + b^3e^3 + d^3e^3) + d^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3e^3 + b^3c^3 + b^3e^3 + c^3e^3) + e^2(a^3b^3 + a^3c^3 + a^3d^3 + b^3c^3 + b^3d^3 + c^3d^3) = \mathfrak{f}a^3b^3c^2,$$

$$\varphi(1,1,1,5) = a^5(bcd + bce + bde + cde) + b^5(acd + ace + ade + cde) + c^5(abd + abe + ade + bde) + d^5(abc + abe + ace + bce) + e^5(abc + abd + acd + bcd) = \mathfrak{f}a^5bcd,$$

$$\varphi(1,1,2,4) = (a^2b^4 + a^4b^2)(cd + ce + de) + (a^2c^4 + a^4c^2)(bd + be + de) + (a^2d^4 + a^4d^2)(bc + be + ce) + (a^2e^4 + a^4e^2)(bc + bd + cd) + (b^2c^4 + b^4c^2)(ad + ae + de) + (b^2d^4 + b^4d^2)(ac + ae + ce) + (b^2e^4 + b^4e^2)(ac + ad + cd) + (c^2d^4 + c^4d^2)(ab + ae + be) + (c^2e^4 + c^4e^2)(ab + ad + bd) + (d^2e^4 + d^4e^2)(ab + ac + bc) = \mathfrak{f}a^4b^2cd,$$

$$\varphi(1,1,3,3) = a^3b^3(cd + ce + de) + a^3c^3(bd + be + de) + a^3d^3(bc + be + ce) + a^3e^3(bc + bd + cd) + b^3c^3(ad + ae + de) + b^3d^3(ac + ae + ce) + b^3e^3(ac + ad + cd) + c^3d^3(ab + ae + be) + c^3e^3(ab + ad + bd) + d^3e^3(ab + ac + bc) = \mathfrak{f}a^3b^3cd,$$

$$\varphi(1,2,2,3) = (ab^3 + a^3b)(c^2d^2 + c^2e^2 + d^2e^2) + (ac^3 + a^3c)(b^2d^2 + b^2e^2 + d^2e^2) + (ad^3 + a^3d)(b^2c^2 + b^2e^2 + c^2e^2) + (ae^3 + a^3e)(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + (bc^3 + b^3c)(a^2d^2 + a^2e^2 + d^2e^2) + (bd^3 + b^3d)(a^2c^2 + a^2e^2 + c^2e^2) + (be^3 + b^3e)(a^2c^2 + a^2d^2 + c^2d^2) + (cd^3 + c^3d)(a^2b^2 + a^2e^2 + b^2e^2) + (ce^3 + c^3e)(a^2b^2 + a^2d^2 + b^2d^2) + (de^3 + d^3e)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \mathfrak{f}a^3b^2c^2d,$$

$$\varphi(2,2,2,2) = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + b^2c^2d^2e^2$$
$$= \int a^2b^2c^2d^2,$$

$$\varphi(1,1,1,1,4) = a^4bcde + ab^4cde + abc^4de + abcd^4e + abcde^4$$
$$= \int a^4bcde,$$

$$\varphi(1,1,1,2,3) = abc(d^2e^3 + d^3e^2) + abd(c^2e^3 + c^3e^2) + abe(c^2d^3$$
$$+ c^3d^2) + acd(b^2e^3 + b^3e^2) + ace(b^2d^3 + b^3d^2)$$
$$+ ade(b^2c^3 + b^3c^2) + bcd(a^2e^3 + a^3e^2)$$
$$+ bce(a^2d^3 + a^3d^2) + bde(a^2c^3 + a^3c^2)$$
$$+ cde(a^2b^3 + a^3b^2) = \int a^3b^2cde,$$

$$\varphi(1,1,2,2,2) = a^2b^2c^2de + a^2b^2d^2ce + a^2b^2e^2cd + a^2c^2d^2be$$
$$+ a^2c^2e^2bd + a^2d^2e^2bc + b^2c^2d^2ae + b^2c^2e^2ad$$
$$+ b^2d^2e^2ac + c^2d^2e^2ab = \int a^2b^2c^2de$$

§. 11. Ich setze nun die gesuchte von Wurzelgrößen befreyte Gleichungen hieher, wie ich sie durch die beyden vorgetragenen Methoden gefunden habe. Sie sind

1. für die gegebene $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$,
$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc) = 0$

2. für $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} = 0$,
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$

$$- 4(a^3b + ab^3 + a^3c + ac^3 + a^3d + ad^3 + b^3c + bc^3 + b^3d$$
$$+ bd^3 + c^3d + cd^3)$$

$$+ 6(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)$$

$$+ 4(a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab + ad + bd)$$
$$+ d^2(ab + ac + bc))$$

$$- [illegible]bcd = 0$$

Gg

3. für $r^a + r^b + r^c + r^d + r^e = 0$,

$$fa^8 - 8fa^7b + 4.7fa^6b^2 - 7.8fa^5b^3 + 70fa^4b^4 + 40fa^6bc - 9.8fa^5b^2c + 40fa^4b^3c + 4.9fa^4b^2c^2 + 16fa^3b^3c^2 - 11.16fa^5bcd + 43.8fa^4b^2cd - 13.4.8fa^3b^3cd - 17.16fa^3b^2c^2d + 251.8fa^2b^2c^2d^2 - 47.16fa^4bcde + 4.8.29fa^3b^2cde - 95.16fa^2b^2c^2de = 0.$$

§. 12. Von der Geschichte dieser Aufgabe gedenke ich an einem andern Orte zu reden; inzwischen mag es genug seyn, in Beziehung auf dieselbe, hier den dritten Band der Briefe Descartes's, und Waring's Meditationes algebraicas anzuführen.

X.

Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente. Anwendung der daraus abgeleiteten Sätze auf das Eliminationsproblem; von H. A. Rothe, Prof. zu Leipzig.

Stellenexponenten bey Permutationen, nebst den daraus sich ergebenden Zeichen.

1. Erklärung.

Man schreibe unter jedes Element, irgend einer Permutation, die sich aus den r verschiedenen Elementen 1, 2, 3, ... r machen läßt, deren Anzahl bekanntlich r(r−1)(r−2)...3.2.1 ist, diejenige Zahl, welche anzeigt, das wievielste es ist, wenn man das Element selbst, nebst allen weiter zur Rechten folgenden, ihrer natürlichen Folge nach, setzt. Z. B. für r = 10 giebt es eine Permutation

6, 4, 3, 9, 8, 10, 1, 7, 2, 5

Um zu finden was unter die 8 zu stehen kommt, setze man die 8, nebst allen noch zur Rechten folgenden Elementen, in ihrer natürlichen Folge

1, 2, 5, 7, 8, 10

so erhellet, daß die 8 hier in der fünften Stelle, von der Linken nach der Rechten zu gehend, steht, folglich kommt unter die 8 eine 5 zu stehen. Setzt man nach eben der Regel unter jedes Element, die gehörige Zahl, so bekommt man

6	4	3	9	8	10	1	7	2	5
6	4	3	6	5	5	1	3	1	1

Diese darunter geschriebenen Zahlen, mögen **Stellenexponenten** heißen; so ist 5 der Stellenexponent von 8, und 3 der Stellenexponent von 7.

Schreibt man die Stellenexponenten nicht **unter**, sondern **neben** die Permutationen, so haben die 24 Versetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Stellenexponenten:

Versetzungen	Stellenexponenten
1, 2, 3, 4	1, 1, 1, 1
1, 2, 4, 3	1, 1, 2, 1
1, 3, 2, 4	1, 2, 1, 1
1, 3, 4, 2	1, 2, 2, 1
1, 4, 2, 3	1, 3, 1, 1
1, 4, 3, 2	1, 3, 2, 1
2, 1, 3, 4	2, 1, 1, 1
2, 1, 4, 3	2, 1, 2, 1
2, 3, 1, 4	2, 2, 1, 1
2, 3, 4, 1	2, 2, 2, 1
2, 4, 1, 3	2, 3, 1, 1
2, 4, 3, 1	2, 3, 2, 1
3, 1, 2, 4	3, 1, 1, 1
3, 1, 4, 2	3, 1, 2, 1
3, 2, 1, 4	3, 2, 1, 1
3, 2, 4, 1	3, 2, 2, 1
3, 4, 1, 2	3, 3, 1, 1
3, 4, 2, 1	3, 3, 2, 1
4, 1, 2, 3	4, 1, 1, 1
4, 1, 3, 2	4, 1, 2, 1
4, 2, 1, 3	4, 2, 1, 1
4, 2, 3, 1	4, 2, 2, 1
4, 3, 1, 2	4, 3, 1, 1
4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1

wo das bey den Stellenexponenten vorkommende Gesetz, der Evolutionen wegen, leicht zu übersehen ist. Es sind nehmlich Variationen an sich, wo in der letzten Stelle zur Rechten blos 1, in der vorletzten blos 1, 2, in der vorvorletzten 1, 2, 3 u. s. w. vorkommen kann.

2. Hieraus ergiebt sich

1) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um so viel kleiner als das Element selbst, als kleinere Elemente weiter zur Linken stehen. Stehen daher keine kleinern Elemente zur Linken, so ist der Stellenexponent, dem Elemente selbst gleich. Daher ist der Stellenexponent des ersten Elements allemal mit dem Elemente selbst einerley; und das gilt auch bey allen folgenden Elementen, so lange sie abnehmen.

2) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um 1 gröſser, als die Menge der zur Rechten stehenden kleinern Elemente. Stehen daher zur Rechten keine kleineren Elemente, so ist er 1. So lange also die letzten Elemente, von der Rechten nach der Linken zugehend, abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, 1, so lange sie aber zunehmen, nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w.

Beyspiel. Für $r = 14$

hat die Versetzung 10, 7, 6, 3, 8, 1, 12, 9, 2, 13, 5, 14, 4, 11

die Stellenexponenten 10, 7, 6, 3, 5, 1, 6, 4, 1, 4, 2, 3, 1, 1

Weil hier die ersten vier Elemente 10, 7, 6, 3 immer abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, mit den Elementen selbst einerley; die beyden letzten Elemente 11, 4 nehmen ab, also haben sie 1; dem Element 9, stehen fünf kleinere Elemente, nehmlich 7, 6, 3, 8, 1 zur Linken, folglich ist sein Stellenexponent $9 - 5 = 4$; dem Elemente 13 stehen drey

kleinere Elemente, 5, 4, 11 zur Rechten, folglich ist sein Stellenexponent $3+1=4$.

3. **Willkührlicher Satz.** Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3, . . . r, werde mit dem Zeichen + versehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen — hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen, unter den Stellenexponenten ungerade ist.

Auf diese Art bekommt jede Permutation eins der Zeichen + oder —, z. B. die Permutation in 1 bekommt —, weil 3 gerade Stellenexponenten 6, 4, 6, dabey vorkommen, hingegen hat die Permutation in (2) das Zeichen +, weil 6 gerade Stellenexponenten, nehmlich 10, 6, 6, 4, 4, 2 vorkommen.

4. Setzt man statt jedes Stellenexponenten die um 1 kleinere Zahl, so geht jede gerade Zahl darunter in eine ungerade, und jede ungerade in eine gerade über. Es bekommt also eine Permutation das Zeichen +, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge ungerader Zahlen, unter den um 1 verminderten Stellenexponenten vorkommen, — hingegen, wenn die Menge der ungeraden Zahlen, darunter ungerade ist. Im ersten Falle aber ist die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten selbst gerade, im zweyten ungerade. Man kann also auch die Regel so ausdrücken: Jede Permutation bekommt das Zeichen + wenn die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten gerade, — hingegen, wenn sie ungerade ist. Die Null wird dabey als gerade Zahl betrachtet.

5. **Erklärungen.** Man hat für einerley r zwo Permutationen, welche sich nur dadurch unterscheiden, daß

zwey Elemente in ihnen versetzt sind, alle andern aber ihre Stellen behalten, z. B. für r = 24

20, 9, 14, 18, 4, 24, 16, 21, 7, 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 17, 5, 2, 13, 1, 23, 12

und

20 9 14 18 4 24 16 21 17 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 7, 5, 2, 13, 1, 23, 12

wo die beyden versetzten Elemente 7 und 17 beyderseits mit Sternen bezeichnet sind. Die Bedeutung der Puncte bey der ersten Permutation ergiebt sich aus den folgenden Definitionen in 3).

1) Die beyden zu versetzenden Elemente (hier 7 und 17) mögen Hauptelemente heißen, und die Stellen worinnen sie stehen (hier die 9te und 18te von der Linken an gerechnet) die Hauptstellen.

2) Diejenige Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptstelle steht, heiße die erste Permutation, und die andere die zweyte.

3) Diejenigen Elemente, die kleiner sind als das kleinere Hauptelement, (hier 1–6) heißen niedrige Zahlen und mögen durch unter sie gesetzte Puncte, wie bey der ersten Permutation geschehen ist, bezeichnet werden; diejenigen Elemente, deren Werth zwischen die beyden Hauptelemente fällt, (hier 8–16) heißen mittlere Zahlen, und werden durch über sie gesetzte Puncte bezeichnet; diejenigen Elemente, die größer sind, als das größere Haupt-

element, (hier 18–24) heißen hohe Zahlen, und bleiben ohne alles Abzeichen.

4) Derjenige Theil der Permutation von der Linken an, bis zur linken Hauptstelle heiße der Anfang; der Theil zwischen beyden Hauptstellen das Mittel; der Theil von der rechten Hauptstelle bis zum letzten Elemente zur Rechten, das Ende. Die beyden Hauptstellen selbst werden zu keinen dieser Theile gerechnet, sondern besonders betrachtet. Also haben beyde Permutationen einerley Anfang, Mittel und Ende.

6. Aufgabe. Zu untersuchen, wie die Stellenexponenten zwoer Permutationen, von der Beschaffenheit wie in 5, voneinander abhängen.

Auflösung.

1) Die Stellenexponenten des Anfangs und Endes sind bey beyden Permutationen einerley, wegen 2.

2) Da jedes Hauptelement größer als jede niedrige, und kleiner als jede hohe Zahl ist, so sind auch wegen 2 die Stellenexponenten aller hohen und niedrigen Zahlen, in dem Mittel bey beyden Permutationen einerley.

3) Jede mittlere Zahl in dem Mittel, hat bey der ersten Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptstelle steht (5. Def. 2) ein Element, das kleiner ist als sie, weniger zur Rechten stehen, als bey der zweyten Permutation; folglich sind, wegen (2 2]) die Stellenexponenten der mittlern Zahlen im Mittel, bey der ersten Permutation um eins kleiner als bey der zweyten.

4) Setzt man

das kleinere Hauptelement = A (hier = 7)
das gröſsere Hauptelement = B (hier = 17)

die Menge der niedrigen Zahlen { im Mittel = c (hier = 2) / im Ende = f (hier = 3)

die Menge der mittlern Zahlen { im Mittel = d (hier = 4) / im Ende = e (hier = 2)

(wo sich c f d e sehr leicht durch Abzählung der unter und über den Zahlen stehenden Puncte, nach 5. Def. 3, bestimmen lassen); so ist wegen (2 2])

α) bey der ersten Permutation der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 1 also = c + f + 1; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = e + f + 1.

β) bey der zweyten Permutation, der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 2 (weil noch überdies das Hauptelement A, welches kleiner ist als B, dem B zur Linken steht) also = c + d + e + f + 2; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = f + 1

5) Man findet also die Stellenexponenten der zweyten Permutation, aus den Stellenexponenten der ersten

α) wenn man zu dem Stellenexponenten der linken Hauptstelle d + e + 1 addirt,

3. für $r^a + r^b + r^c + r^d + r^e = 0$,

$$\int a^8 - 8\int a^7 b + 4.7\int a^6 b^2 - 7.8\int a^5 b^3 + 70\int a^4 b^4 + 40\int a^6 bc - 9.8\int a^5 b^2 c + 40\int a^4 b^3 c + 4.9\int a^4 b^2 c^2 + 16\int a^3 b^3 c^2 - 11.16\int a^5 bcd + 43.8\int a^4 b^2 cd - 13.4.8\int a^3 b^3 cd - 17.16\int a^3 b^2 c^2 d + 251.8\int a^2 b^2 c^2 d^2 - 47.16\int a^4 bcde + 4.8.29\int a^3 b^2 cde - 95.16\int a^2 b^2 c^2 de = 0.$$

§. 12. Von der Geschichte dieser Aufgabe gedenke ich an einem andern Orte zu reden; inzwischen mag es genug seyn, in Beziehung auf dieselbe, hier den dritten Band der Briefe Descartes's, und Waring's Meditationes algebraicas anzuführen.

X.

Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente. Anwendung der daraus abgeleiteten Sätze auf das Eliminationsproblem; von H. A. Rothe, Prof. zu Leipzig.

Stellenexponenten bey Permutationen, nebst den daraus sich ergebenden Zeichen.

1. Erklärung.

Man schreibe unter jedes Element, irgend einer Permutation, die sich aus den r verschiedenen Elementen $1, 2, 3, \ldots r$ machen läßt, deren Anzahl bekanntlich $r(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1$ ist, diejenige Zahl, welche anzeigt, das wievielste es ist, wenn man das Element selbst, nebst allen weiter zur Rechten folgenden, ihrer natürlichen Folge nach, setzt. Z. B. für $r = 10$ giebt es eine Permutation

6, 4, 3, 9, 8, 10, 1, 7, 2, 5

Um zu finden was unter die 8 zu stehen kommt, setze man die 8, nebst allen noch zur Rechten folgenden Elementen, in ihrer natürlichen Folge

1, 2, 5, 7, 8, 10

so erhellet, daß die 8 hier in der fünften Stelle, von der Linken nach der Rechten zu gehend, steht, folglich kommt unter die 8 eine 5 zu stehen. Setzt man nach eben der Regel unter jedes Element, die gehörige Zahl, so bekommt man

6 4 3 9 8 10 1 7 2 5
6 4 3 6 5 5 1 3 1 1

Diese darunter geschriebenen Zahlen, mögen Stellenexponenten heißen; so ist 5 der Stellenexponent von 8, und 3 der Stellenexponent von 7.

Schreibt man die Stellenexponenten nicht unter, sondern neben die Permutationen, so haben die 24 Versetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Stellenexponenten:

Versetzungen	Stellenexponenten
1, 2, 3, 4	1, 1, 1, 1
1, 2, 4, 3	1, 1, 2, 1
1, 3, 2, 4	1, 2, 1, 1
1, 3, 4, 2	1, 2, 2, 1
1, 4, 2, 3	1, 3, 1, 1
1, 4, 3, 2	1, 3, 2, 1
2, 1, 3, 4	2, 1, 1, 1
2, 1, 4, 3	2, 1, 2, 1
2, 3, 1, 4	2, 2, 1, 1
2, 3, 4, 1	2, 2, 2, 1
2, 4, 1, 3	2, 3, 1, 1
2, 4, 3, 1	2, 3, 2, 1
3, 1, 2, 4	3, 1, 1, 1
3, 1, 4, 2	3, 1, 2, 1
3, 2, 1, 4	3, 2, 1, 1
3, 2, 4, 1	3, 2, 2, 1
3, 4, 1, 2	3, 3, 1, 1
3, 4, 2, 1	3, 3, 2, 1
4, 1, 2, 3	4, 1, 1, 1
4, 1, 3, 2	4, 1, 2, 1
4, 2, 1, 3	4, 2, 1, 1
4, 2, 3, 1	4, 2, 2, 1
4, 3, 1, 2	4, 3, 1, 1
4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1

wo das bey den Stellenexponenten vorkommende Gesetz, der Evolutionen wegen, leicht zu übersehen ist. Es sind nehmlich Variationen an sich, wo in der letzten Stelle zur Rechten blos 1, in der vorletzten blos 1, 2, in der vorvorletzten 1, 2, 3 u. s. w. vorkommen kann.

2. Hieraus ergiebt sich

1) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um so viel kleiner als das Element selbst, als kleinere Elemente weiter zur Linken stehen. Stehen daher keine kleinern Elemente zur Linken, so ist der Stellenexponent, dem Elemente selbst gleich. Daher ist der Stellenexponent des ersten Elements allemal mit dem Elemente selbst einerley; und das gilt auch bey allen folgenden Elementen, so lange sie abnehmen.

2) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um 1 gröſſer, als die Menge der zur Rechten stehenden kleinern Elemente. Stehen daher zur Rechten keine kleineren Elemente, so ist er 1. So lange also die letzten Elemente, von der Rechten nach der Linken zugehend, abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, 1, so lange sie aber zunehmen, nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w.

Beyspiel. Für $r = 14$

hat die Versetzung 10, 7, 6, 3, 8, 1, 12, 9, 2, 13, 5, 14, 4, 11

die Stellenexponenten 10, 7, 6, 3, 5, 1, 6, 4, 1, 4, 2, 3, 1, 1

Weil hier die ersten vier Elemente 10, 7, 6, 3 immer abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, mit den Elementen selbst einerley; die beyden letzten Elemente 11, 4 nehmen ab, also haben sie 1; dem Element 9, stehen fünf kleinere Elemente, nehmlich 7, 6, 3, 8, 1 zur Linken, folglich ist sein Stellenexponent $9 - 5 = 4$; dem Elemente 13 stehen drey

kleinere Elemente, 5, 4, 11 zur Rechten, folglich ist sein Stellenexponent $3+1=4$.

3. Willkührlicher Satz. Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3, . . . r, werde mit dem Zeichen + versehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen — hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen, unter den Stellenexponenten ungerade ist.

Auf diese Art bekommt jede Permutation eins der Zeichen + oder —, z. B. die Permutation in 1 bekommt —, weil 3 gerade Stellenexponenten 6, 4, 6, dabey vorkommen, hingegen hat die Permutation in (2) das Zeichen +, weil 6 gerade Stellenexponenten, nehmlich 10, 6, 6, 4, 4, 2 vorkommen.

4. Setzt man statt jedes Stellenexponenten die um 1 kleinere Zahl, so geht jede gerade Zahl darunter in eine ungerade, und jede ungerade in eine gerade über. Es bekommt also eine Permutation das Zeichen +, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge ungerader Zahlen, unter den um 1 verminderten Stellenexponenten vorkommen, — hingegen, wenn die Menge der ungeraden Zahlen, darunter ungerade ist. Im ersten Falle aber ist die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten selbst gerade, im zweyten ungerade. Man kann also auch die Regel so ausdrücken: Jede Permutation bekommt das Zeichen + wenn die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten gerade, — hingegen, wenn sie ungerade ist. Die Null wird dabey als gerade Zahl betrachtet.

5. Erklärungen. Man hat für einerley r zwo Permutationen, welche sich nur dadurch unterscheiden, daß

zwey Elemente in ihnen versetzt sind, alle andern aber ihre Stellen behalten, z. B. für r = 24

20, 9, 14, 18, 4, 24, 16, 21, 7, 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 17, 5, 2, 13, 1, 23, 12

und

20 9 14 18 4 24 16 21 17 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 7, 5, 2, 13, 1, 23, 12

wo die beyden versetzten Elemente 7 und 17 beyderseits mit Sternen bezeichnet sind. Die Bedeutung der Puncte bey der ersten Permutation ergiebt sich aus den folgenden Definitionen in 3).

1) Die beyden zu versetzenden Elemente (hier 7 und 17) mögen Hauptelemente heißen, und die Stellen worinnen sie stehen (hier die 9te und 18te von der Linken an gerechnet) die Hauptstellen.

2) Diejenige Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptstelle steht, heiße die erste Permutation, und die andere die zweyte.

3) Diejenigen Elemente, die kleiner sind als das kleinere Hauptelement, (hier 1–6) heißen niedrige Zahlen und mögen durch unter sie gesetzte Puncte, wie bey der ersten Permutation geschehen ist, bezeichnet werden; diejenigen Elemente, deren Werth zwischen die beyden Hauptelemente fällt, (hier 8–16) heißen mittlere Zahlen, und werden durch über sie gesetzte Puncte bezeichnet; diejenigen Elemente, die größer sind, als das größere Haupt-

$$\frac{6\ 4\ 3\ 9\ 8\ 10\ 1\ 7\ 2\ 5}{6\ 4\ 3\ 6\ 5\ 5\ 1\ 3\ 1\ 1}$$

Diese darunter geschriebenen Zahlen, mögen Stellenexponenten heißen; so ist 5 der Stellenexponent von 8, und 3 der Stellenexponent von 7.

Schreibt man die Stellenexponenten nicht unter, sondern neben die Permutationen, so haben die 24 Versetzungen der Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Stellenexponenten:

Versetzungen	Stellenexponenten
1, 2, 3, 4	1, 1, 1, 1
1, 2, 4, 3	1, 1, 2, 1
1, 3, 2, 4	1, 2, 1, 1
1, 3, 4, 2	1, 2, 2, 1
1, 4, 2, 3	1, 3, 1, 1
1, 4, 3, 2	1, 3, 2, 1
2, 1, 3, 4	2, 1, 1, 1
2, 1, 4, 3	2, 1, 2, 1
2, 3, 1, 4	2, 2, 1, 1
2, 3, 4, 1	2, 2, 2, 1
2, 4, 1, 3	2, 3, 1, 1
2, 4, 3, 1	2, 3, 2, 1
3, 1, 2, 4	3, 1, 1, 1
3, 1, 4, 2	3, 1, 2, 1
3, 2, 1, 4	3, 2, 1, 1
3, 2, 4, 1	3, 2, 2, 1
3, 4, 1, 2	3, 3, 1, 1
3, 4, 2, 1	3, 3, 2, 1
4, 1, 2, 3	4, 1, 1, 1
4, 1, 3, 2	4, 1, 2, 1
4, 2, 1, 3	4, 2, 1, 1
4, 2, 3, 1	4, 2, 2, 1
4, 3, 1, 2	4, 3, 1, 1
4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1

wo das bey den Stellenexponenten vorkommende Gesetz, der Evolutionen wegen, leicht zu übersehen ist. Es sind nehmlich Variationen an sich, wo in der letzten Stelle zur Rechten blos 1, in der vorletzten blos 1, 2, in der vorvorletzten 1, 2, 3 u. s. w. vorkommen kann.

2. Hieraus ergiebt sich

1) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um so viel kleiner als das Element selbst, als kleinere Elemente weiter zur Linken stehen. Stehen daher keine kleinern Elemente zur Linken, so ist der Stellenexponent, dem Elemente selbst gleich. Daher ist der Stellenexponent des ersten Elements allemal mit dem Elemente selbst einerley; und das gilt auch bey allen folgenden Elementen, so lange sie abnehmen.

2) Der Stellenexponent eines jeden Elements ist um 1 gröſser, als die Menge der zur Rechten stehenden kleinern Elemente. Stehen daher zur Rechten keine kleineren Elemente, so ist er 1. So lange also die letzten Elemente, von der Rechten nach der Linken zugehend, abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, 1, so lange sie aber zunehmen, nach der Reihe die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w.

Beyspiel. Für $r = 14$

hat die Versetzung 10, 7, 6, 3, 8, 1, 12, 9, 2, 13, 5, 14, 4, 11

die Stellenexponenten 10, 7, 6, 3, 5, 1, 6, 4, 1, 4, 2, 3, 1, 1

Weil hier die ersten vier Elemente 10, 7, 6, 3 immer abnehmen, so sind ihre Stellenexponenten, mit den Elementen selbst einerley; die beyden letzten Elemente 11, 4 nehmen ab, also haben sie 1; dem Element 9, stehen fünf kleinere Elemente, nehmlich 7, 6, 3, 8, 1 zur Linken, folglich ist sein Stellenexponent $9 - 5 = 4$; dem Elemente 13 stehen drey

kleinere Elemente, 5, 4, 11 zur Rechten, folglich ist sein Stellenexponent $3+1=4$.

3. **Willkührlicher Satz.** Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3, . . . r, werde mit dem Zeichen + versehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen — hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen, unter den Stellenexponenten ungerade ist.

Auf diese Art bekommt jede Permutation eins der Zeichen + oder —, z. B. die Permutation in 1 bekommt —, weil 3 gerade Stellenexponenten 6, 4, 6, dabey vorkommen, hingegen hat die Permutation in (2) das Zeichen +, weil 6 gerade Stellenexponenten, nehmlich 10, 6, 6, 4, 4, 2 vorkommen.

4. Setzt man statt jedes Stellenexponenten die um 1 kleinere Zahl, so geht jede gerade Zahl darunter in eine ungerade, und jede ungerade in eine gerade über. Es bekommt also eine Permutation das Zeichen +, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge ungerader Zahlen, unter den um 1 verminderten Stellenexponenten vorkommen, — hingegen, wenn die Menge der ungeraden Zahlen, darunter ungerade ist. Im ersten Falle aber ist die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten selbst gerade, im zweyten ungerade. Man kann also auch die Regel so ausdrücken: Jede Permutation bekommt das Zeichen + wenn die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten gerade, — hingegen, wenn sie ungerade ist. Die Null wird dabey als gerade Zahl betrachtet.

5. **Erklärungen.** Man hat für einerley r zwo Permutationen, welche sich nur dadurch unterscheiden, daß

zwey Elemente in ihnen versetzt sind, alle andern aber ihre Stellen behalten, z. B. für r = 24

20, 9, 14, 18, 4, 24, 16, 21, 7, 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 17, 5, 2, 13, 1, 23, 12

und

20 9 14 18 4 24 16 21 17 6, 19, 8, 15, 22,

10, 3, 11, 7, 5, 2, 13, 1, 23, 12

wo die beyden versetzten Elemente 7 und 17 beyderseits mit Sternen bezeichnet sind. Die Bedeutung der Puncte bey der ersten Permutation ergiebt sich aus den folgenden Definitionen in 3).

1) Die beyden zu versetzenden Elemente (hier 7 und 17) mögen Hauptelemente heißen, und die Stellen worinnen sie stehen (hier die 9te und 18te von der Linken an gerechnet) die Hauptstellen.

2) Diejenige Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptstelle steht, heiße die erste Permutation, und die andere die zweyte.

3) Diejenigen Elemente, die kleiner sind als das kleinere Hauptelement, (hier 1–6) heißen niedrige Zahlen und mögen durch unter sie gesetzte Puncte, wie bey der ersten Permutation geschehen ist, bezeichnet werden; diejenigen Elemente, deren Werth zwischen die beyden Hauptelemente fällt, (hier 8–16) heißen mittlere Zahlen, und werden durch über sie gesetzte Puncte bezeichnet; diejenigen Elemente, die größer sind, als das größere Haupt-

element, (hier 18–24) heißen hohe Zahlen, und bleiben ohne alles Abzeichen.

4) Derjenige Theil der Permutation von der Linken an, bis zur linken Hauptstelle heiße der Anfang; der Theil zwischen beyden Hauptstellen das Mittel; der Theil von der rechten Hauptstelle bis zum letzten Elemente zur Rechten, das Ende. Die beyden Hauptstellen selbst werden zu keinen dieser Theile gerechnet, sondern besonders betrachtet. Also haben beyde Permutationen einerley Anfang, Mittel und Ende.

6. Aufgabe. Zu untersuchen, wie die Stellenexponenten zwoer Permutationen, von der Beschaffenheit wie in 5, voneinander abhängen.

Auflösung.

1) Die Stellenexponenten des Anfangs und Endes sind bey beyden Permutationen einerley, wegen 2.

2) Da jedes Hauptelement größer als jede niedrige, und kleiner als jede hohe Zahl ist, so sind auch wegen 2 die Stellenexponenten aller hohen und niedrigen Zahlen, in dem Mittel bey beyden Permutationen einerley.

3) Jede mittlere Zahl in dem Mittel, hat bey der ersten Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptstelle steht (5. Def. 2) ein Element, das kleiner ist als sie, weniger zur Rechten stehen, als bey der zweyten Permutation; folglich sind, wegen (2 2]) die Stellenexponenten der mittlern Zahlen im Mittel, bey der ersten Permutation um eins kleiner als bey der zweyten.

4) Setzt man

das kleinere Hauptelement = A (hier = 7)
das gröſsere Hauptelement = B (hier = 17)

die Menge der niedrigen Zahlen { im Mittel = c (hier = 2), im Ende = f (hier = 3)

die Menge der mittlern Zahlen { im Mittel = d (hier = 4), im Ende = e (hier = 2)

(wo sich c f d e sehr leicht durch Abzählung der unter und über den Zahlen stehenden Puncte, nach 5. Def. 3, bestimmen lassen); so ist wegen (2 2])

α) bey der ersten Permutation der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 1 also = c + f + 1; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = e + f + 1.

β) bey der zweyten Permutation, der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 2 (weil noch überdies das Hauptelement A, welches kleiner ist als B, dem B zur Linken steht) also = c + d + e + f + 2; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = f + 1

5) Man findet also die Stellenexponenten der zweyten Permutation, aus den Stellenexponenten der ersten

α) wenn man zu dem Stellenexponenten der linken Hauptstelle d + e + 1 addirt,

β) von dem Stellenexponenten der rechten Hauptstelle, e subtrahirt,

γ) den Stellenexponenten jeder mittlern Zahl im Mittel um 1 vermehrt,

δ) die Stellungsexponenten aller übrigen Zahlen ungeändert läßt.

So finden sich z. B. aus den Stellenexponenten der ersten Permutation in 5

* | | | *
20,9,13,16,4,19,13,15,6,5,12,5,9,10,5,3,4,6,3,2,3,1,2,1

die Stellenexponenten der zweyten

* | | | *
20,9,13,16,4,19,13,15,13,5,12,6,10,10,6,3,5,4,3,2,3,1,2,1

wo die Stellenexponenten der Hauptstellen durch Sterne, und der mittlern Zahlen im Mittel, durch über sie gesetzte Striche beyderseits bezeichnet sind

7. Permutationen von der Beschaffenheit wie in 5, haben allemal verschiedene Zeichen. Denn da nach (6 5]) der Stellenexponent der linken Hauptstelle um d+e+1 vermehrt, der rechten Hauptstelle um e vermindert, und aller mittlern Zahlen im Mittel, deren Menge d ist, um 1 vermehrt werden muß, um aus den Stellenexponenten der ersten Permutation, die der zweyten zu bekommen, so ist die Summe der Stellenexponenten der zweyten Permutation um d+e+1 — e+d oder um 2d+1 größer, als bey der ersten Permutation; folglich gilt das auch bey der Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten, da bey beyden Permutationen 1 einerley ist. Also ist die eine Summe gerade, die andere ungerade, folglich haben nach 4 beyde Permutationen verschiedene Zeichen.

1) Zusatz. Da man durch successive Vertauschung zweyer Elemente, von jeder Permutation auf jede kommen kann, so wird man zu bestimmen im Stande seyn, ob zwey gegebene Permutationen einerley oder verschiedene Zeichen haben, nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl Vertauschungen dazu erfordert wird. Gesetzt man sollte untersuchen, ob die beyden Permutationen für $r = 10$

2, 10, 9, 3, 1, 7, 4, 5, 8, 6

und

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, 8, 1, 4

einerley oder verschiedene Zeichen haben, so leite man die letztere aus der ersten, durch successive Vertauschung zweyer Elemente (die allemal hier mit Puncten bezeichnet werden mögen) also ab:

$\dot{2}$, 10, 9, 3, 1, 7, 4, 5, 8, $\dot{6}$

6, $\dot{10}$, 9, 3, 1, 7, 4, 5, $\dot{8}$, 2

6, 2, $\dot{9}$, 3, 1, $\dot{7}$, 4, 5, 8, 10

6, 2, 7, $\dot{3}$, 1, 9, 4, $\dot{5}$, 8, $\dot{10}$

6, 2, 7, 10, $\dot{1}$, 9, 4, 5, 8, 3

6, 2, 7, 10, 5, $\dot{9}$, 4, 1, 8, $\dot{3}$

6, 2, 7, 10, 5, 3, $\dot{4}$, 1, 8, $\dot{9}$

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, $\dot{1}$, $\dot{8}$, 4

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, 8, 1, 4

Da man also durch 8 Vertauschungen aus der ersten die zweyte ableiten kann, so haben beyde einerley Zeichen, nehmlich —

2) Zusatz. Entsteht eine Permutation dergestalt aus einer andern, daß ein einziges Element aus seiner Stelle genommen, und in eine andere Stelle gesetzt wird, so haben beyde Permutationen einerley Zeichen, wenn der Unterschied der Stellen gerade, und verschiedene, wenn er ungerade ist, weil man durch so viel Vertauschungen, als der Unterschied der Stellen beträgt, aus der einen auf die andere kommen kann. So haben also die beyden Permutationen

4 7 8 10 1 9 5 2 6 3

und

4 8 10 1 9 5 2 7 6 3

einerley Zeichen, weil blos das Element 7 bey der einen in der zweyten, bey der andern in der achten Stelle steht, denn man kann durch sechs Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweyte ableiten.

4, 7, 8, 10, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 7, 10, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 7, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 7, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 7, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 5, 7, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 5, 2, 7, 6, 3

3) Zusatz. Da die Permutation 1, 2, 3, 4, ... r allemal das Zeichen + hat, so wird eine Permutation, worinnen blos das m in der Stelle n, alle übrigen Elemente aber ihrer natürlichen Folge nach stehen, das Zeichen + haben, wenn der Unterschied zwischen n und m gerade, und —, wenn er ungerade ist; oder, welches einerley ist, + wenn

$n+m$ gerade, und —, wenn $n+m$ ungerade iſt; ſo hat z. B. für $r = 10$, die Permutation

1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 + weil $6 = m$ und $2 = n$
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 5, 10 + weil $5 = m$ und $9 = n$
1, 2, 3, 7, 4, 5, 6, 8, 9, 10 — weil $7 = m$ und $4 = n$
1, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 8, 9, 10 — weil $2 = m$ und $5 = n$

8. Wenn man die Permutationen von 1, 2, 3, ... r nach der Ordnung darſtellt wie Hindenburg (E.S.c.a.A.S. 163-167) daß ſie nehmlich wie wachſende Zahlen folgen, oder unter ſich gut geordnet ſind, ſo haben zwey aufeinander folgende Permutation einerley Zeichen, wenn die erſte Veränderung, in der $(4n+3)$ten oder $(4n+4)$ten Stelle geſchieht, (wenn nehmlich n entweder 0, oder eine ganze poſitive Zahl bedeutet, und die Stellen hier von der Rechten nach der Linken gezählt werden), und verſchiedene Zeichen, wenn die erſte Veränderung, in der $(4n+1)$ten, oder $(4n+2)$ten Stelle geſchieht. Z. B. für $r = 10$ haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen

8 4 9 3 10 7 6 5 2 1

und

8 4 9 5 1 2 3 6 7 10

einerley Zeichen, weil die erſte Veränderung in der 7ten Stelle geſchieht, welche deshalb mit einem Puncte bezeichnet iſt; und die beyden aufeinander folgenden Permutationen

10 6 9 8 7 5 4 3 2 1

10 7 1 2 3 4 5 6 8 9

haben, weil die erſte Veränderung in der 9ten Stelle vorfällt, verſchiedene Zeichen.

Beweis. Eine Permutation, die A heißen mag, endige sich mit $\alpha qpo \ldots mlk \ldots cba$, oder die Permutation A sey

$$\ldots\ldots \alpha qpo \ldots mlk \ldots\ldots cba$$

und es sey darinnen $a<b$, $b<c$, u. s. w. $k<l$, $l<m$, u. s. w. $o<p$, $p<q$, und α falle zwischen l und k oder es sey $\alpha>k$ und $\alpha<l$, so ist die nachfolgende Permutation, welche B heißen mag,

$$\ldots\ldots labc \ldots k\alpha m \ldots opq$$

wo die am weitesten zur Linken bey A und B stehenden Puncte, die zur Linken ungeändert gebliebenen Elemente bedeuten. Die erste Veränderung fällt also in der Stelle vor, wo bey der Permutation A das α, oder bey B das l stand. Es sey dieses von der Rechten an gerechnet, die $(2m+2)$te oder $(2m+1)$te, wo m eine ganze positive Zahl ist, so ist $2m+1$ oder $2m$ die Menge der Buchstaben a, b, c, ... p, q, und man kommt durch m Vertauschungen, nehmlich des a mit q, des b mit p, des c mit o u. s. w. von der Permutation A auf die Permutation

$$\ldots\ldots \alpha abc \ldots klm \ldots opq$$

welche C heißen mag. Vertauscht man hier in C die Elemente α und l mit einander, so erhält man die Permutation B, und man kann demnach von A auf B durch $m+1$ Vertauschungen kommen. Ist nun m ungerade, oder $m=2n+1$, geschieht also die erste Veränderung in der $(4n+4)$ten oder $(4n+3)$ten Stelle, so ist die Anzahl der Vertauschungen oder $(m+1)$ gerade, und es haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen A und B (7, 1 Zus.) einerley Zeichen; ist aber m gerade, oder $m=2n$, das heißt, geschieht die erste Veränderung in der $(4n+2)$ten oder $(4n+1)$ten Stelle, so ist $m+1$ ungerade, und es haben A und B verschiedene Zeichen.

1. Zuſatz. Wenn man nach der Hindenburgiſchen Art, oder unter ſich gut geordnet, alle mögliche Permutationen, ſowohl der Elemente 1, 2, 3 . . . (r−1) als auch der Elemente 1, 2, 3 . . . r darſtellt, die erſte Darſtellung A, die andere B nennt, und in der Darſtellung B alle Permutationen, deren erſtes Element 1, 2, 3 . . . m . . . r iſt, Permutationen von der Ordnung 1, 2, 3 . . . m . . . r nennt, ſo hat man in B hintereinander, erſt alle Permutationen von der Ordnung 1, dann alle von der Ordnung 2 u. ſ. w. zuletzt alle von der Ordnung r. Jede Ordnung in B hat ſo viel Permutationen, als in A vorkommen, oder (r−1)(r−2) . . . 3. 2. 1. Geſchieht nun in A, zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation die erſte Veränderung in der Stelle g, die Stellen von der Rechten an gerechnet, ſo wird auch zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation bey jeder Ordnung in B, die erſte Veränderung in der Stelle g geſchehen, folglich findet zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation ſowohl in A, als auch jeder Ordnung in B, eine Folge der Zeichen ſtatt, wenn g durch 4 dividirt, nichts oder 3 zum Reſte läßt, und eine Abwechslung der Zeichen, wenn g durch 4 dividirt 2 oder 1 zum Reſte läßt. Dies gilt für jedes f: alſo erhellet, daß jede Ordnung in B der Reihe nach entweder eben die Zeichen wie A, oder die entgegengeſetzten hat. Da nun die erſte Permutation in A allemal das Zeichen + hat, ſo hat eine Ordnung von B dieſelben Zeichen wie A, wenn die erſte Permutation dieſer Ordnung + hat, und die entgegengeſetzten, wenn ſie − hat. Es hat aber in B die erſte Permutation der Ordnung

1 welche 1, 2, 3, 4, 5 . . . . r iſt, das Zeichen +
2 = = 2, 1, 3, 4, 5 . . . . r = = = −
3 = = 3, 1, 2, 4, 5 . . . . r = = = +
4 = = 4, 1, 2, 3, 5 . . . . r = = = −
5 = = 5, 1, 2, 3, 4 . . . . r = = = +

u. ſ. w. (wegen 7. 3 Zuſ. für n=1) folglich haben alle un-

element, (hier 18–24) heißen hohe Zahlen, und bleiben ohne alles Abzeichen.

4) Derjenige Theil der Permutation von der Linken an, bis zur linken Hauptſtelle heiße der Anfang; der Theil zwiſchen beyden Hauptſtellen das Mittel; der Theil von der rechten Hauptſtelle bis zum letzten Elemente zur Rechten, das Ende. Die beyden Hauptſtellen ſelbſt werden zu keinen dieſer Theile gerechnet, ſondern beſonders betrachtet. Alſo haben beyde Permutationen einerley Anfang, Mittel und Ende.

6. Aufgabe. Zu unterſuchen, wie die Stellenexponenten zwoer Permutationen, von der Beſchaffenheit wie in 5, voneinander abhängen.

Auflöſung.

1) Die Stellenexponenten des Anfangs und Endes ſind bey beyden Permutationen einerley, wegen 2.

2) Da jedes Hauptelement größer als jede niedrige, und kleiner als jede hohe Zahl iſt, ſo ſind auch wegen 2 die Stellenexponenten aller hohen und niedrigen Zahlen, in dem Mittel bey beyden Permutationen einerley.

3) Jede mittlere Zahl in dem Mittel, hat bey der erſten Permutation, wo das kleinere Hauptelement in der linken Hauptſtelle ſteht (5. Def. 2) ein Element, das kleiner iſt als ſie, weniger zur Rechten ſtehen, als bey der zweyten Permutation; folglich ſind, wegen (2 2]) die Stellenexponenten der mittlern Zahlen im Mittel, bey der erſten Permutation um eins kleiner als bey der zweyten.

4) Setzt man

das kleinere Hauptelement = A (hier = 7)
das gröſsere Hauptelement = B (hier = 17)

die Menge der niedrigen Zahlen { im Mittel = c (hier = 2) / im Ende = f (hier = 3)

die Menge der mittlern Zahlen { im Mittel = d (hier = 4) / im Ende = e (hier = 2)

(wo sich c f d e sehr leicht durch Abzählung der unter und über den Zahlen stehenden Puncte, nach 5. Def. 3, bestimmen lassen); so ist wegen (2 2])

α) bey der ersten Permutation der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 1 also = c + f + 1; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = e + f + 1.

β) bey der zweyten Permutation, der Stellenexponent der linken Hauptstelle, oder von B, gleich der Summe aller mittlern und niedrigen Zahlen im Mittel und Ende + 2 (weil noch überdies das Hauptelement A, welches kleiner ist als B, dem B zur Linken steht) also = c + d + e + f + 2; der Stellenexponent der rechten Hauptstelle, oder von A, gleich der Summe aller niedrigen Zahlen im Ende + 1 also = f + 1

5) Man findet also die Stellenexponenten der zweyten Permutation, aus den Stellenexponenten der ersten

α) wenn man zu dem Stellenexponenten der linken Hauptstelle d + e + 1 addirt,

β) von dem Stellenexponenten der rechten Hauptſtelle, e ſubtrahirt,

γ) den Stellenexponenten jeder mittlern Zahl im Mittel um 1 vermehrt,

δ) die Stellungsexponenten aller übrigen Zahlen ungeändert läßt.

So finden ſich z. B. aus den Stellenexponenten der erſten Permutation in 5

* | | | *
20,9,13,16,4,19,13,15,6,5,12,5,9,10,5,3,4,6,3,2,3,1,2,1

die Stellenexponenten der zweyten

* | | | *
20,9,13,16,4,19,13,15,13,5,12,6,10,10,6,3,5,4,3,2,3,1,2,1

wo die Stellenexponenten der Hauptſtellen durch Sterne, und der mittlern Zahlen im Mittel, durch über ſie geſetzte Striche beyderſeits bezeichnet ſind

7. Permutationen von der Beſchaffenheit wie in 5, haben allemal verſchiedene Zeichen. Denn da nach (6 5]) der Stellenexponent der linken Hauptſtelle um $d+e+1$ vermehrt, der rechten Hauptſtelle um e vermindert, und aller mittlern Zahlen im Mittel, deren Menge d iſt, um 1 vermehrt werden muß, um aus den Stellenexponenten der erſten Permutation, die der zweyten zu bekommen, ſo iſt die Summe der Stellenexponenten der zweyten Permutation um $d+e+1-e+d$ oder um $2d+1$ größer, als bey der erſten Permutation; folglich gilt das auch bey der Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten, da bey beyden Permutationen r einerley iſt. Alſo iſt die eine Summe gerade, die andere ungerade, folglich haben nach 4 beyde Permutationen verſchiedene Zeichen.

1) Zusatz. Da man durch successive Vertauschung zweyer Elemente, von jeder Permutation auf jede kommen kann, so wird man zu bestimmen im Staude seyn, ob zwey gegebene Permutationen einerley oder verschiedene Zeichen haben, nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl Vertauschungen dazu erfordert wird. Gesetzt man sollte untersuchen, ob die beyden Permutationen für r = 10

2, 10, 9, 3, 1, 7, 4, 5, 8, 6

und

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, 8, 1, 4

einerley oder verschiedene Zeichen haben, so leite man die letztere aus der ersten, durch successive Vertauschung zweyer Elemente (die allemal hier mit Puncten bezeichnet werden mögen) also ab:

$\dot{2}$, 10, 9, 3, 1, 7, 4, 5, 8, $\dot{6}$

6, $\dot{10}$, 9, 3, 1, 7, 4, 5, $\dot{8}$, 2

6, 2, $\dot{9}$, 3, 1, $\dot{7}$, 4, 5, 8, 10

6, 2, 7, $\dot{3}$, 1, 9, 4, $\dot{5}$, 8, $\dot{10}$

6, 2, 7, 10, $\dot{1}$, 9, 4, 5, $\dot{8}$, 3

6, 2, 7, 10, 5, $\dot{9}$, $\dot{4}$, 1, 8, $\dot{3}$

6, 2, 7, 10, 5, 3, $\dot{4}$, $\dot{1}$, 8, $\dot{9}$

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, $\dot{1}$, $\dot{8}$, 4

6, 2, 7, 10, 5, 3, 9, 8, 1, 4

Da man also durch 8 Vertauschungen aus der ersten die zweyte ableiten kann, so haben beyde einerley Zeichen, nehmlich —

2) Zusatz. Entsteht eine Permutation dergestalt aus einer andern, daß ein einziges Element aus seiner Stelle genommen, und in eine andere Stelle gesetzt wird, so haben beyde Permutationen einerley Zeichen, wenn der Unterschied der Stellen gerade, und verschiedene, wenn er ungerade ist, weil man durch so viel Vertauschungen, als der Unterschied der Stellen beträgt, aus der einen auf die andere kommen kann. So haben also die beyden Permutationen

4 7 8 10 1 9 5 2 6 3

und

4 8 10 1 9 5 2 7 6 3

einerley Zeichen, weil blos das Element 7 bey der einen in der zweyten, bey der andern in der achten Stelle steht, denn man kann durch sechs Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweyte ableiten.

4, 7, 8, 10, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 7, 10, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 7, 1, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 7, 9, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 7, 5, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 5, 7, 2, 6, 3

4, 8, 10, 1, 9, 5, 2, 7, 6, 3

3) Zusatz. Da die Permutation 1, 2, 3, 4, ... r allemal das Zeichen + hat, so wird eine Permutation, worinnen blos das m in der Stelle n, alle übrigen Elemente aber ihrer natürlichen Folge nach stehen, das Zeichen + haben, wenn der Unterschied zwischen n und m gerade, und —, wenn er ungerade ist; oder, welches einerley ist, + wenn

$n+m$ gerade, und —, wenn $n+m$ ungerade ist; so hat z. B. für $r = 10$, die Permutation

1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 + weil $6 = m$ und $2 = n$
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 5, 10 + weil $5 = m$ und $9 = n$
1, 2, 3, 7, 4, 5, 6, 8, 9, 10 — weil $7 = m$ und $4 = n$
1, 3, 4, 5, 2, 6, 7, 8, 9, 10 — weil $2 = m$ und $5 = n$

8. Wenn man die Permutationen von 1, 2, 3, ... r nach der Ordnung darstellt wie Hindenburg (E.S.c.a.A.S. 163-167) daß sie nehmlich wie wachsende Zahlen folgen, oder unter sich gut geordnet sind, so haben zwey aufeinander folgende Permutation einerley Zeichen, wenn die erste Veränderung, in der $(4n+3)$ten oder $(4n+4)$ten Stelle geschieht, (wenn nehmlich n entweder 0, oder eine ganze positive Zahl bedeutet, und die Stellen hier von der Rechten nach der Linken gezählt werden), und verschiedene Zeichen, wenn die erste Veränderung, in der $(4n+1)$ten, oder $(4n+2)$ten Stelle geschieht. Z. B. für $r = 10$ haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen

8 4 9 3 10 7 6 5 2 1

und

8 4 9 5 1 2 3 6 7 10

einerley Zeichen, weil die erste Veränderung in der 7ten Stelle geschieht, welche deshalb mit einem Puncte bezeichnet ist; und die beyden aufeinander folgenden Permutationen

10 6 9 8 7 5 4 3 2 1

10 7 1 2 3 4 5 6 8 9

haben, weil die erste Veränderung in der 9ten Stelle vorfällt, verschiedene Zeichen.

Beweis. Eine Permutation, die A heißen mag, endige sich mit $\alpha qpo \ldots mlk \ldots cba$, oder die Permutation A sey

$$\ldots\ldots \alpha qpo \ldots mlk \ldots\ldots cba$$

und es sey darinnen $a<b$, $b<c$, u. s. w. $k<l$, $l<m$, u. s. w. $o<p$, $p<q$, und α falle zwischen l und k oder es sey $\alpha>k$ und $\alpha<l$, so ist die nachfolgende Permutation, welche B heißen mag,

$$\ldots\ldots labc \ldots k\alpha m \ldots opq$$

wo die am weitesten zur Linken bey A und B stehenden Puncte, die zur Linken ungeändert gebliebenen Elemente bedeuten. Die erste Veränderung fällt also in der Stelle vor, wo bey der Permutation A das α, oder bey B das l stand. Es sey dieses von der Rechten an gerechnet, die $(2m+2)$te oder $(2m+1)$te, wo m eine ganze positive Zahl ist, so ist $2m+1$ oder $2m$ die Menge der Buchstaben a, b, c, ... p, q, und man kommt durch m Vertauschungen, nehmlich des a mit q, des b mit p, des c mit o u. s. w. von der Permutation A auf die Permutation

$$\ldots\ldots \alpha abc \ldots klm \ldots opq$$

welche C heißen mag. Vertauscht man hier in C die Elemente α und l mit einander, so erhält man die Permutation B, und man kann demnach von A auf B durch $m+1$ Vertauschungen kommen. Ist nun m ungerade, oder $m=2n+1$, geschieht also die erste Veränderung in der $(4n+4)$ten oder $(4n+3)$ten Stelle, so ist die Anzahl der Vertauschungen oder $(m+1)$ gerade, und es haben die beyden aufeinander folgenden Permutationen A und B (7, 1 Zus.) einerley Zeichen; ist aber m gerade, oder $m=2n$, das heißt, geschieht die erste Veränderung in der $(4n+2)$ten oder $(4n+1)$ten Stelle, so ist $m+1$ ungerade, und es haben A und B verschiedene Zeichen.

1. Zuſatz. Wenn man nach der Hindenburgiſchen Art, oder unter ſich gut geordnet, alle mögliche Permutationen, ſowohl der Elemente 1, 2, 3 . . . (r−1) als auch der Elemente 1, 2, 3 . . . r darſtellt, die erſte Darſtellung A, die andere B nennt, und in der Darſtellung B alle Permutationen, deren erſtes Element 1, 2, 3 . . . m . . . r iſt, Permutationen von der Ordnung 1, 2, 3 . . . m . . . r nennt, ſo hat man in B hintereinander, erſt alle Permutationen von der Ordnung 1, dann alle von der Ordnung 2 u. ſ. w. zuletzt alle von der Ordnung r. Jede Ordnung in B hat ſo viel Permutationen, als in A vorkommen, oder (r−1)(r−2) . . . 3. 2. 1. Geſchieht nun in A, zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation die erſte Veränderung in der Stelle g, die Stellen von der Rechten an gerechnet, ſo wird auch zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation bey jeder Ordnung in B, die erſte Veränderung in der Stelle g geſchehen, folglich findet zwiſchen der ften und (f+1)ten Permutation ſowohl in A, als auch jeder Ordnung in B, eine Folge der Zeichen ſtatt, wenn g durch 4 dividirt, nichts oder 3 zum Reſte läßt, und eine Abwechslung der Zeichen, wenn g durch 4 dividirt 2 oder 1 zum Reſte läßt. Dies gilt für jedes f; alſo erhellet, daß jede Ordnung in B der Reihe nach entweder eben die Zeichen wie A, oder die entgegengeſetzten hat. Da nun die erſte Permutation in A allemal das Zeichen + hat, ſo hat eine Ordnung von B dieſelben Zeichen wie A, wenn die erſte Permutation dieſer Ordnung + hat, und die entgegengeſetzten, wenn ſie − hat. Es hat aber in B die erſte Permutation der Ordnung

1 welche 1, 2, 3, 4, 5 . . . r iſt, das Zeichen +
2 = = 2, 1, 3, 4, 5 . . . r = = = −
3 = = 3, 1, 2, 4, 5 . . . r = = = +
4 = = 4, 1, 2, 3, 5 . . . r = = = −
5 = = 5, 1, 2, 3, 4 . . . r = = = +

u. ſ. w. (wegen 7. 3 Zuſ. für n=1) folglich haben alle un-

geraden Ordnungen in B dieſelben Zeichen, wie in A, und alle geraden Ordnungen, die entgegengeſetzten.

2 Zuſ. Stellt man alle Permutationen der r−1 verſchiedenen Elemente, 1, 2, 3 . . . r, jedoch mit Auslaſſung des m, unter ſich gut geordnet dar, und ſchiebt bey jeder Permutation, zwiſchen die (n−1)te und nte Stelle das Element m ein, ſo hat man alle Permutationen in B, welche das Element m in der Stelle n haben, unter ſich gutgeordnet, und ihre Anzahl iſt ſo groß, als die Anzahl der Permutationen in A. Aber auch die Zeichen ſind der Reihe nach entweder eben dieſelben wie in A, oder die entgegengeſetzten. Denn, ſtünde das m in der erſten Stelle, oder wäre n=1 ſo erhellet es aus 1 Zuſ. Schiebt man nun das m aus der erſten Stelle durchgängig in die nte, ſo ändern ſich entweder die Zeichen aller Permutationen, oder ſie bleiben alle einerley, jenachdem n gerade oder ungerade iſt; nach 7, 2 Zuſ. Iſt nun n+m gerade, ſo hat die erſte dieſer Permutationen das Zeichen +, iſt aber n+m ungerade, das Zeichen — (nach 7. 3 Zuſ.), folglich haben aus eben dem Grunde wie im 1 Zuſ. alle Permutationen der Reihe nach, im erſten Falle eben dieſelben Zeichen wie in A, im andern, die entgegengeſetzten. Es ſey z. B. r=5; n=3; m=2 ſo iſt

A	diejenigen Permutationen in B, welche in der 3ten Stelle, das Element 2 haben.
+ 1, 2, 3, 4	— 1, 3, 2, 4, 5
— 1, 2, 4, 3	+ 1, 3, 2, 5, 4
— 1, 3, 2, 4	+ 1, 4, 2, 3, 5
+ 1, 3, 4, 2	— 1, 4, 2, 5, 3
+ 1, 4, 2, 3	— 1, 5, 2, 3, 4
— 1, 4, 3, 2	+ 1, 5, 2, 4, 3
— 2, 1, 3, 4	+ 3, 1, 2, 4, 5
+ 2, 1, 4, 3	— 3, 1, 2, 5, 4
+ 2, 3, 1, 4	— 3, 4, 2, 1, 5
— 2, 3, 4, 1	+ 3, 4, 2, 5, 1
— 2, 4, 1, 3	+ 3, 5, 2, 1, 4
+ 2, 4, 3, 1	— 3, 5, 2, 4, 1
+ 3, 1, 2, 4	— 4, 1, 2, 3, 5
— 3, 1, 4, 2	+ 4, 1, 2, 5, 3
— 3, 2, 1, 4	+ 4, 3, 2, 1, 5
+ 3, 2, 4, 1	— 4, 3, 2, 5, 1
+ 3, 4, 1, 2	— 4, 5, 2, 1, 3
— 3, 4, 2, 1	+ 4, 5, 2, 3, 1
— 4, 1, 2, 3	+ 5, 1, 2, 3, 4
+ 4, 1, 3, 2	— 5, 1, 2, 4, 3
+ 4, 2, 1, 3	— 5, 3, 2, 1, 4
— 4, 2, 3, 1	+ 5, 3, 2, 4, 1
— 4, 3, 1, 2	+ 5, 4, 2, 1, 3
+ 4, 3, 2, 1	— 5, 4, 2, 3, 1

weil nehmlich hier $n + m = 5$, oder ungerade ist, so haben die fünftheiligten Permutationen, die entgegengesetzten Zeichen von denen viertheiligten in A.

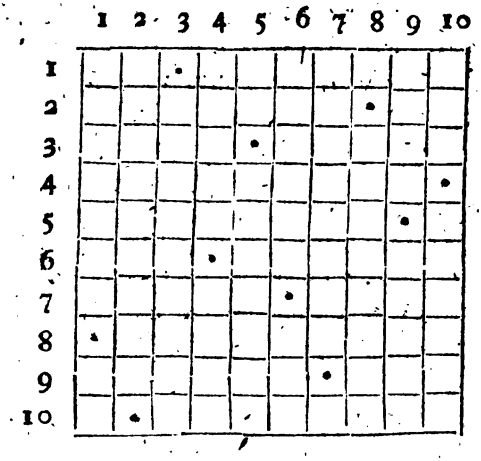
Verwandte Permutationen.

9. **Erklärung.** Sind zwo Permutationen der E mente 1, 2, 3, ... r so beschaffen, daß jede aus der and entsteht, wenn man die Elemente mit ihren Stellen v wechselt, also, daß wenn bey der einen das Element m der nten Stelle steht, dafür bey der andern das Element in der mten Stelle steht, so mögen solche Permutation **verwandte** heißen; z. B. für r = 10,

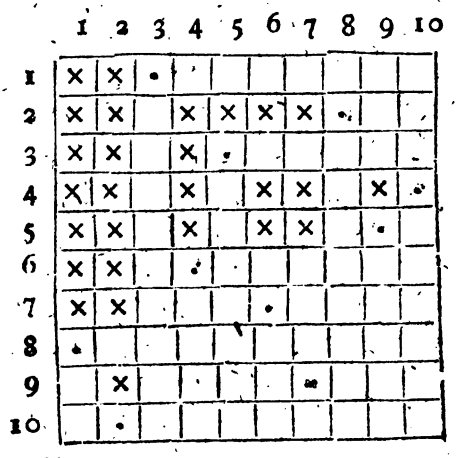
sind 3, 8, 5, 10, 9, 4, 6, 1, 7, 2
und 8, 10, 1, 6, 3, 7, 9, 2, 5, 4

verwandte Permutationen.

10. Man construire ein Quadrat, dessen Seite r T theilungen hat, zähle die Fächer der Horizontalreihen, und die ganzen Verticalreihen, von der Linken nach der Rechten, und die Fächer der Verticalreihen, so wie auch die ganzen Horizontalreihen von oben herab, und setze in dasjenige Fach der ersten, zweyten u. s. w. rten Horizontalreihe, dessen Zahl dem ersten, zweyten u. s. w. rten Elemente einer Permutation gleich ist, einen Punct, so erhält man das erste, zweyte u. s. w. rte Element der verwandten Permutation, wenn man nachsieht, in welchem Fache der ersten, zweyten u. s. w. rten Verticalreihe der Punct stehet. Z. B. für die erste der in 9 angeführten Permutationen hat das Quadrat folgende Gestalt:



Da in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein Punct, aber auch nur ein einziger Punct befindlich seyn muß, so setze man in jedes Fach, das den mit ihr in einer Horizontalreihe befindlichen Punct zur Rechten, und den mit ihr in einer Verticalreihe befindlichen Punct unter sich stehen hat, ein Sternchen oder ein Andreaskreuz,



so giebt, wie sich sehr leicht aus 2 folgern läßt, die Menge der, in der ersten, zweyten u. s. w. Horizontalreihe befindlichen Sternchen, den ersten, zweyten u. s. w. um 1 verminderten Stellenexponenten, der ersten Permutation, von welcher die Stelle der Puncte bestimmt worden war, und welches im gegenwärtigen Beyspiele die erste der Permutationen in 9 ist; und die Menge der in der ersten, zweyten u. s. w. Verticalreihe befindlichen Sternchen den ersten, zweyten, u. s. w. um 1 verminderten Stellenexponenten der verwandten Permutation, welches also hier die zweyte der Permutationen in 9 ist. Weil nun in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein einziger Punct stehet, so erhält man die Stellenexponenten selbst, wenn man die Puncte mit zu den Sternen zählt, und es ist klar, daß bey beyden verwandten Permutationen, die Summe der Stellenexponenten einander und der Menge der im Quadrat vorkommenden Puncte und Sternchen zusammengenommen gleich sey, folglich ist auch bey beyden Permutationen, die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten einander, und der Menge der Sternchen allein gleich. Es haben also verwandte Permutationen wegen 4 allemal einerley Zeichen, nehmlich + wenn die Menge der Sternchen gerade, und — wenn sie ungerade ist. Im gegenwärtigen Beyspiel, hat, wie aus den Horizontalreihen sich ergiebt die erste der Permutationen in 9 die Stellenexponenten

3, 7, 4, 7, 6, 3, 3, 1, 2, 1

die andere ihr verwandte, wie sich aus den Verticalreihen ergiebt, die Stellenexponenten.

8, 9, 1, 5, 2, 4, 4, 1, 2, 1

die Summe der Stellenexponenten ist beyderseits 37, also der um 1 verminderten einzelnen Stellenexponenten 27, und beyde Permutationen haben das Zeichen —.

Anmerkung. Die verwandten Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 stehen hier neben einander

1, 2, 3, 4	1 2 3 4
1, 2, 4, 3	1 2 4 3
1, 3, 2, 4	1 3 2 4
1, 3, 4, 2	1 4 2 3
1, 4, 2, 3	1 3 4 2
1, 4, 3, 2	1 4 3 2
2, 1, 3, 4	2 1 3 4
2, 1, 4, 3	2 1 4 3
2, 3, 1, 4	3 1 2 4
2, 3, 4, 1	4 1 2 3
2, 4, 1, 3	3 1 4 2
2, 4, 3, 1	4 1 3 2
3, 1, 2, 4	2 3 1 4
3, 1, 4, 2	2 4 1 3
3, 2, 1, 4	3 2 1 4
3, 2, 4, 1	4 2 1 3
3, 4, 1, 2	3 4 1 2
3, 4, 2, 1	4 3 1 2
4, 1, 2, 3	2 3 4 1
4, 1, 3, 2	2 4 3 1
4, 2, 1, 3	3 2 4 1
4, 2, 3, 1	4 2 3 1
4, 3, 1, 2	3 4 2 1
4, 3, 2, 1	4 3 2 1

also giebt es mehrere Permutationen, die sich selbst verwandt sind, z. B. hier sind die Permutationen

1, 2, 3, 4
1, 2, 4, 3
1, 3, 2, 4
1, 4, 3, 2
2, 1, 3, 4
2, 1, 4, 3
3, 2, 1, 4
3, 4, 1, 2
4, 2, 3, 1
4, 3, 2, 1

sich selbst verwandt. Die Menge der sich selbst verwandten Permutationen, für $r = 1, 2, 3, 4, 5$, u. s. w. sey $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, u. s. w. so hat man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= \alpha + 1 = 2 \\
\gamma &= \beta + 2\alpha = 4 \\
\delta &= \gamma + 3\beta = 10 \\
\varepsilon &= \delta + 4\gamma = 26 \\
\zeta &= \varepsilon + 5\delta = 76 \\
\eta &= \zeta + 6\varepsilon = 232 \\
\vartheta &= \eta + 7\zeta = 764 \\
\iota &= \vartheta + 8\eta = 2620 \\
\varkappa &= \iota + 9\vartheta = 9496
\end{aligned}$$

u. s. w.

Das Eliminationsproblem und andere verwandte Sätze.

II. Aufgabe. Es seyen für r unbekannte Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$, folgende r Gleichungen gegeben

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 2 & 3 & & m & & r \\
s = & 11x & + 12x & + 13x & \ldots + & 1mx & \ldots + & 1rx \\
2 & 1 & 2 & 3 & & m & & r \\
s = & 21x & + 22x & + 23x & \ldots + & 2mx & \ldots + & 2rx \\
3 & 1 & 2 & 3 & & m & & r \\
s = & 31x & + 32x & + 33x & \ldots + & 3mx & \ldots + & 3rx \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & 1 & 2 & 3 & & m & & r \\
s = & n1x & + n2x & + n3x & \ldots + & nmx & \ldots + & nrx \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
r & 1 & 2 & 3 & & m & & r \\
s = & r1x & + r2x & + r3x & \ldots + & rmx & \ldots + & rrx
\end{array}
$$ a)

wo n und m eine von den Zahlen 1, 2, 3 . . . r bedeuten; man soll die unbekannten Größen bestimmen.

Vorbereitung zur Auflösung.

1) Man mache alle Permutationen der verschiedenen Elemente 1, 2, 3, . . . r, und versehe jede nach dem vorhergehenden mit ihren Zeichen.

2) Die Stellen, von der Linken an gerechnet, schreibe man

1 vor jedes Element in der 1sten Stelle

2 " " " 2ten Stelle u. s. w. allgemein

m " " " mten Stelle.

Was dadurch herauskommt, heiße N, z. B. für r = 4 ist

a) Die Ausdrücke 11, 12, 13, u. s. w. sind hier statt Buchstaben gesetzt, und stellen Lokalzeichen vor. Es zeigt nehmlich die erste Zahl die Gleichung, die zweyte die unbekannte Größe an, wozu ein solcher Coefficient gehört. So ist also nm der Coefficient, der in der nten Gleichung zur mten unbekannten Größe gehört, also von mn unterschieden. Hindenburg Nov. Systeм. Perm. p. XXXV.

geraden Ordnungen in B dieſelben Zeichen, wie in A, und alle geraden Ordnungen, die entgegengeſetzten.

2 Zuſ. Stellt man alle Permutationen der r−1 verſchiedenen Elemente, 1, 2, 3 . . . r, jedoch mit Auslaſſung des m, unter ſich gut geordnet dar, und ſchiebt bey jeder Permutation, zwiſchen die (n−1)te und nte Stelle das Element m ein, ſo hat man alle Permutationen in B, welche das Element m in der Stelle n haben, unter ſich gutgeordnet, und ihre Anzahl iſt ſo groß, als die Anzahl der Permutationen in A. Aber auch die Zeichen ſind der Reihe nach entweder eben dieſelben wie in A, oder die entgegengeſetzten. Denn, ſtünde das m in der erſten Stelle, oder wäre n=1 ſo erhellet es aus 1 Zuſ. Schiebt man nun das m aus der erſten Stelle durchgängig in die nte, ſo ändern ſich entweder die Zeichen aller Permutationen, oder ſie bleiben alle einerley, jenachdem n gerade oder ungerade iſt; nach 7, 2 Zuſ. Iſt nun n+m gerade, ſo hat die erſte dieſer Permutationen das Zeichen +, iſt aber n+m ungerade, das Zeichen — (nach 7. 3 Zuſ.), folglich haben aus eben dem Grunde wie im 1 Zuſ. alle Permutationen der Reihe nach, im erſten Falle eben dieſelben Zeichen wie in A, im andern, die entgegengeſetzten. Es ſey z. B. r=5; n=3; m=2 ſo iſt

A	diejenigen Permutationen in B, welche in der 3ten Stelle, das Element 2 haben.
+ 1, 2, 3, 4	— 1, 3, 2, 4, 5
— 1, 2, 4, 3	+ 1, 3, 2, 5, 4
— 1, 3, 2, 4	+ 1, 4, 2, 3, 5
+ 1, 3, 4, 2	— 1, 4, 2, 5, 3
+ 1, 4, 2, 3	— 1, 5, 2, 3, 4
— 1, 4, 3, 2	+ 1, 5, 2, 4, 3
— 2, 1, 3, 4	+ 3, 1, 2, 4, 5
+ 2, 1, 4, 3	— 3, 1, 2, 5, 4
+ 2, 3, 1, 4	— 3, 4, 2, 1, 5
— 2, 3, 4, 1	+ 3, 4, 2, 5, 1
— 2, 4, 1, 3	+ 3, 5, 2, 1, 4
+ 2, 4, 3, 1	— 3, 5, 2, 4, 1
+ 3, 1, 2, 4	— 4, 1, 2, 3, 5
— 3, 1, 4, 2	+ 4, 1, 2, 5, 3
— 3, 2, 1, 4	+ 4, 3, 2, 1, 5
+ 3, 2, 4, 1	— 4, 3, 2, 5, 1
+ 3, 4, 1, 2	— 4, 5, 2, 1, 3
— 3, 4, 2, 1	+ 4, 5, 2, 3, 1
— 4, 1, 2, 3	+ 5, 1, 2, 3, 4
+ 4, 1, 3, 2	— 5, 1, 2, 4, 3
+ 4, 2, 1, 3	— 5, 3, 2, 1, 4
— 4, 2, 3, 1	+ 5, 3, 2, 4, 1
— 4, 3, 1, 2	+ 5, 4, 2, 1, 3
+ 4, 3, 2, 1	— 5, 4, 2, 3, 1

weil nehmlich hier $n + m = 5$, oder ungerade ist, so haben die fünftheiligten Permutationen, die entgegengesetzten Zeichen von denen viertheiligten in A.

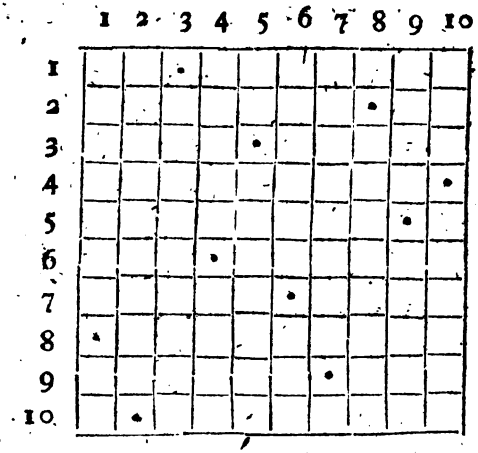
Verwandte Permutationen.

9. **Erklärung.** Sind zwo Permutationen der Elemente 1, 2, 3, ... r so beschaffen, daß jede aus der andern entsteht, wenn man die Elemente mit ihren Stellen vertauscht, also, daß wenn bey der einen das Element m in der nten Stelle steht, dafür bey der andern das Element n in der mten Stelle steht, so mögen solche Permutationen **verwandte** heißen; z. B. für r = 10,

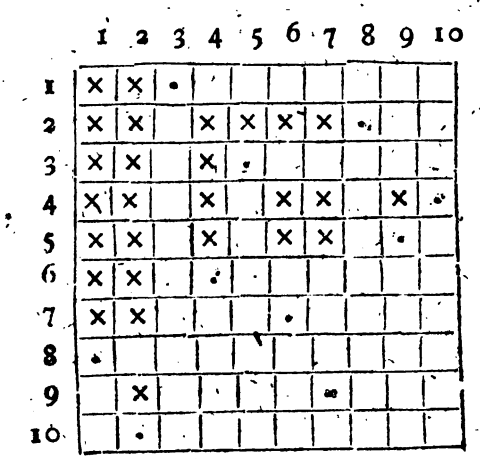
sind 3, 8, 5, 10, 9, 4, 6, 1, 7, 2
und 8, 10, 1, 6, 3, 7, 9, 2, 5, 4

verwandte Permutationen.

10. Man construire ein Quadrat, dessen Seite r Theilungen hat, zähle die Fächer der Horizontalreihen, und die ganzen Verticalreihen, von der Linken nach der Rechten und die Fächer der Verticalreihen, so wie auch die ganzen Horizontalreihen von oben herab, und setze in dasjenige Fach der ersten; zweyten u. s. w. rten Horizontalreihe, dessen Zahl dem ersten, zweyten u. s. w. rten Elemente einer Permutation gleich ist, einen Punct, so erhält man das erste, zweyte u. s. w. rte Element der verwandten Permutation, wenn man nachsieht, in welchem Fache der ersten, zweyten u. s. w. rten Verticalreihe der Punct stehet. Z. B. für die erste der in 9 angeführten Permutationen hat das Quadrat folgende Gestalt:



Da in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein Punct, aber auch nur ein einziger Punct befindlich seyn muß, so setze man in jedes Fach, das den mit ihr in einer Horizontalreihe befindlichen Punct zur Rechten, und den mit ihr in einer Verticalreihe befindlichen Punct unter sich stehen hat, ein Sternchen oder ein Andreaskreuz,



so giebt, wie sich sehr leicht aus 2 folgern läßt, die Menge der, in der ersten, zweyten u. s. w. Horizontalreihe befindlichen Sternchen, den ersten, zweyten u. s. w. um 1 verminderten Stellenexponenten, der ersten Permutation, von welcher die Stelle der Puncte bestimmt worden war, und welches im gegenwärtigen Beyspiele die erste der Permutationen in 9 ist; und die Menge der in der ersten, zweyten u. s. w. Verticalreihe befindlichen Sternchen den ersten, zweyten, u. s. w. um 1 verminderten Stellenexponenten der verwandten Permutation, welches also hier die zweyte der Permutationen in 9 ist. Weil nun in jeder Horizontal- und Verticalreihe ein einziger Punct stehet, so erhält man die Stellenexponenten selbst, wenn man die Puncte mit zu den Sternen zählt, und es ist klar, daß bey beyden verwandten Permutationen, die Summe der Stellenexponenten einander und der Menge der im Quadrat vorkommenden Puncte und Sternchen zusammengenommen gleich sey, folglich ist auch bey beyden Permutationen, die Summe der um 1 verminderten Stellenexponenten einander, und der Menge der Sternchen allein gleich. Es haben also verwandte Permutationen wegen 4 allemal einerley Zeichen, nehmlich + wenn die Menge der Sternchen gerade, und — wenn sie ungerade ist. Im gegenwärtigen Beyspiel, hat, wie aus den Horizontalreihen sich ergiebt die erste der Permutationen in 9 die Stellenexponenten

3, 7, 4, 7, 6, 3, 3, 1, 2, 1

die andere ihr verwandte, wie sich aus den Verticalreihen ergiebt, die Stellenexponenten.

8, 9, 1, 5, 2, 4, 4, 1, 2, 1

die Summe der Stellenexponenten ist beyderseits 37, also der um 1 verminderten einzelnen Stellenexponenten 27, und beyde Permutationen haben das Zeichen —.

Anmerkung. Die verwandten Permutationen der Elemente 1, 2, 3, 4 stehen hier neben einander

1, 2, 3, 4	1 2 3 4
1, 2, 4, 3	1 2 4 3
1, 3, 2, 4	1 3 2 4
1, 3, 4, 2	1 4 2 3
1, 4, 2, 3	1 3 4 2
1, 4, 3, 2	1 4 3 2
2, 1, 3, 4	2 1 3 4
2, 1, 4, 3	2 1 4 3
2, 3, 1, 4	3 1 2 4
2, 3, 4, 1	4 1 2 3
2, 4, 1, 3	3 1 4 2
2, 4, 3, 1	4 1 3 2
3, 1, 2, 4	2 3 1 4
3, 1, 4, 2	2 4 1 3
3, 2, 1, 4	3 2 1 4
3, 2, 4, 1	4 2 1 3
3, 4, 1, 2	3 4 1 2
3, 4, 2, 1	4 3 1 2
4, 1, 2, 3	2 3 4 1
4, 1, 3, 2	2 4 3 1
4, 2, 1, 3	3 2 4 1
4, 2, 3, 1	4 2 3 1
4, 3, 1, 2	3 4 2 1
4, 3, 2, 1	4 3 2 1

also giebt es mehrere Permutationen, die sich selbst verwandt sind, z. B. hier sind die Permutationen

1, 2, 3, 4
1, 2, 4, 3
1, 3, 2, 4
1, 4, 3, 2
2, 1, 3, 4
2, 1, 4, 3
3, 2, 1, 4
3, 4, 1, 2
4, 2, 3, 1
4, 3, 2, 1

sich selbst verwandt. Die Menge der sich selbst verwandten Permutationen, für $r = 1, 2, 3, 4, 5$, u. s. w. sey $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, u. s. w. so hat man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= \alpha + 1 = 2 \\
\gamma &= \beta + 2\alpha = 4 \\
\delta &= \gamma + 3\beta = 10 \\
\varepsilon &= \delta + 4\gamma = 26 \\
\zeta &= \varepsilon + 5\delta = 76 \\
\eta &= \zeta + 6\varepsilon = 232 \\
\vartheta &= \eta + 7\zeta = 764 \\
\iota &= \vartheta + 8\eta = 2620 \\
\varkappa &= \iota + 9\vartheta = 9496
\end{aligned}$$

u. s. w.

Das Eliminationsproblem und andere verwandte Sätze.

II. Aufgabe. Es seyen für r unbekannte Größen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$, folgende r Gleichungen gegeben

$$
\begin{array}{lllllll}
1 & 1 & 2 & 3 & & m & r \\
s = & 11x & + 12x & + 13x & \ldots + & 1mx & \ldots + 1rx \\
2 & 1 & 2 & 3 & & m & r \\
s = & 21x & + 22x & + 23x & \ldots + & 2mx & \ldots + 2rx \\
3 & 1 & 2 & 3 & & m & r \\
s = & 31x & + 32x & + 33x & \ldots + & 3mx & \ldots + 3rx \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n & 1 & 2 & 3 & & m & r \\
s = & n1x & + n2x & + n3x & \ldots + & nmx & \ldots + nrx \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r & 1 & 2 & 3 & & m & r \\
s = & r1x & + r2x & + r3x & \ldots + & rmx & \ldots + rrx
\end{array}
$$ a)

wo n und m eine von den Zahlen 1, 2, 3 . . . r bedeuten; man soll die unbekannten Größen bestimmen.

Vorbereitung zur Auflösung.

1) Man mache alle Permutationen der verschiedenen Elemente 1, 2, 3, . . . r, und versehe jede nach dem vorhergehenden mit ihren Zeichen.

2) Die Stellen, von der Linken an gerechnet, schreibe man

1 vor jedes Element in der 1sten Stelle

2 " " " 2ten Stelle u. s. w. allgemein

m " " " mten Stelle.

Was dadurch herauskommt, heiße N, z. B. für $r = 4$ ist

a) Die Ausdrücke 11, 12, 13, u. s. w. sind hier statt Buchstaben gesetzt, und stellen Lokalzeichen vor. Es zeigt nehmlich die erste Zahl die Gleichung, die zweyte die unbekannte Größe an, wozu ein solcher Coefficient gehört. So ist also mn der Coefficient, der in der nten Gleichung zur mten unbekannten Größe gehört, also von mn unterschieden. Hindenburg Nov. System. Perm. p. XXXV.

$N =$

+ 11. 22. 33. 44	+ 13. 21. 32. 44
— 11. 22. 34. 43	— 13. 21. 34. 42
— 11. 23. 32. 44	— 13. 22. 31. 44
+ 11. 23. 34. 42	+ 13. 22. 34. 41
+ 11. 24. 32. 43	+ 13. 24. 31. 42
— 11. 24. 33. 42	— 13. 24. 32. 41
— 12. 21. 33. 44	— 14. 21. 32. 43
+ 12. 21. 34. 43	+ 14. 21. 33. 42
+ 12. 23. 31. 44	+ 14. 22. 31. 43
— 12. 23. 34. 41	— 14. 22. 33. 41
— 12. 24. 31. 43	— 14. 23. 31. 42
+ 12. 24. 33. 41	+ 14. 23. 32. 41

3) Die Summe aller Complexionen in N, welche den Factor nm haben, werde ausgedrückt durch nm. ſnm; z. B. für r = 4; n = 3; m = 2 iſt

32. ſ32 = — 11. 23. 32. 44	also ſ32 = — 11. 23. 44
+ 11. 24. 32. 43	+ 11. 24. 43
+ 13. 21. 32. 44	+ 13. 21. 44
— 13. 24. 32. 41	— 13. 24. 41
— 14. 21. 32. 43	— 14. 21. 43
+ 14. 23. 32. 41	+ 14. 23. 41

Betrachtungen.

4) Jede Complexion in N beſteht aus r Factoren, wo ſowohl in den vordern als auch hintern Ziffern der Factoren, alle die Zahlen 1, 2, 3, ... r vorkommen, und jede Complexion die dieſe Eigenſchaft hat, muß in N vorkommen. Denn ſtellt man die Factoren dieſer Complexion in der Ordnung, daß die vordern Ziffern, der Reihe nach, 1, 2, 3, ... r

sind, so bilden die hintern Ziffern eine Permutation von 1, 2, 3, . . . r; da nun nach 1) alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r dargestellt werden müssen, so muß auch diejenige vorkommen, die die hintern Ziffern bildeten, folglich die ganze Complexion, und die gedachte Permutation bestimmt zugleich das Zeichen der Complexion. Man kann aber auch die Factoren so stellen, daß die hintern Ziffern der Reihe nach 1, 2, 3, . . . r sind, dann bilden die vordern Ziffern eine Permutation 1, 2, 3, . . . r und zwar diejenige, die der erstern verwandt (9) ist. Da nun das Zeichen der erstern Permutation das Zeichen der Complexion selbst bestimmte, und verwandte Permutationen einerley Zeichen haben, (10) so ist es bey Bestimmung des Zeichens einer Complexion, die in N vorkommt, einerley, ob man die vordern Ziffern der Factoren nach der Reihe stellt, und die Permutation der hintern Ziffern in Betrachtung zieht, wie in 1) und 2) oder ob man die hintern Ziffern nach der Reihe stellt, und die Permutation der vordern Ziffern in Betrachtung zieht. Z. B. 79. 95. 24. 68. 47. 82. 51. 16. 33 ist eine Complexion in N für r = 9. Man stelle die Factoren so, daß die vordern Ziffern nach ihrer natürlichen Folge kommen

16. 24. 33. 47. 51. 68. 79. 82. 95

so bilden die hintern Ziffern die Permutation

6, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 2, 5

Nun stelle man die Factoren so, daß die hintern Ziffern nach ihrer Ordnung kommen

51. 82. 33. 24. 95. 16. 47. 68. 79

so geben die vordern Ziffern die Permutation

5, 8, 3, 2, 9, 1, 4, 6, 7

Diese beyden Permutationen sind verwandt, haben also einerley Zeichen, nehmlich beyde —, folglich hat auch die ganze Complexion —. Hieraus ergiebt sich, daß man

den Werth für N auch erhält, wenn man alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r darstellt, jede mit ihren Zeichen versieht, und, die Stellen von der Linken an gerechnet, 1, 2, 3, . . . m, . . . hinter jedes Element in der Stelle 1, 2, 3, . . . m, . . . schreibt. So ist also für r=4

$$N =$$

+ 11. 22. 33. 44	+ 31. 12. 23. 44
— 11. 22. 43. 34	— 31. 12. 43. 24
— 11. 32. 23. 44	— 31. 22. 13. 44
+ 11. 32. 43. 24	+ 31. 22. 43. 14
+ 11. 42. 23. 34	+ 31. 42. 13. 24
— 11. 42. 33. 24	— 31. 42. 23. 14
— 21. 12. 33. 44	— 41. 12. 23. 34
+ 21. 12. 43. 34	+ 41. 12. 33. 24
+ 21. 32. 13. 44	+ 41. 22. 13. 34
— 21. 32. 43. 14	— 41. 22. 33. 14
— 21. 42. 13. 34	— 41. 32. 13. 24
+ 21. 42. 33. 14	+ 41. 32. 23. 14

welches eben derselbe Werth ist wie in 2), außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders ist.

5) Der Werth von $\sum nm$ besteht aus allen möglichen, aus $(r-1)$ Factoren bestehenden Complexionen, wo in den vordern Ziffern der Factoren, alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, das n ausgenommen, und in den hintern Ziffern auch alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, jedoch mit Ausnahme des m, vorkommen. Das Zeichen jeder solcher Complexion findet sich, wenn man sie mit nm multiplicirt, und nachsieht, was die dadurch entstehende Permutation in dem Werthe für N

für ein Zeichen hat. Hieraus ergeben sich die Regeln zur Bestimmung des Werthes für $\sum m$.

α) Man schreibe alle Elemente $1, 2, 3, \ldots r$, mit Ausschluß des n, in die vordern Stellen, und alle Elemente $1, 2, 3, \ldots r$, mit Ausschluß des m, in die hintern Stellen der Factoren, so ergiebt sich die erste Complexion.

β) Permutire man entweder alle hintere Stellen und lasse die vordern ungeändert, oder man permutire alle vordern Stellen und lasse die hintern ungeändert.

γ) Im ersten Falle schiebe man in Gedanken, zwischen der $(n-1)$ten und $n$ten Stelle der Permutation, welche die hintern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein m ein, so giebt das Zeichen der dadurch entstehenden Permutation der Elemente $1, 2, 3 \ldots r$ das Zeichen der Complexion. Im andern Falle schiebe man in Gedanken zwischen der $(m-1)$ten und $m$ten Stelle der Permutation, welche die vordern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein n ein, so bestimmt die dadurch entstehende Permutation, der Elemente $1, 2, \ldots r$ das Zeichen der Complexion. Auf diese Art ist für $r=5$, $n=3$, $m=2$

nach der ersten Art	nach der andern Art
$f32 = -$ 11. 23. 44. 55	$f32 = -$ 11. 23. 44. 55
$+$ 11. 23. 45. 54	$+$ 11. 23. 54. 45
$+$ 11. 24. 43. 55	$+$ 11. 43. 24. 55
$-$ 11. 24. 45. 53	$-$ 11. 43. 54. 25
$-$ 11. 25. 43. 54	$-$ 11. 53. 24. 45
$+$ 11. 25. 44. 53	$+$ 11. 53. 44. 25
$+$ 13. 21. 44. 55	$+$ 21. 13. 44. 55
$-$ 13. 21. 45. 54	$-$ 21. 13. 54. 45
$-$ 13. 24. 41. 55	$-$ 21. 43. 14. 55
$+$ 13. 24. 45. 51	$+$ 21. 43. 54. 15
$+$ 13. 25. 41. 54	$+$ 21. 53. 14. 45
$-$ 13. 25. 44. 51	$-$ 21. 53. 44. 15
$-$ 14. 21. 43. 55	$-$ 41. 13. 24. 55
$+$ 14. 21. 45. 53	$+$ 41. 13. 54. 25
$+$ 14. 23. 41. 55	$+$ 41. 23. 14. 55
$-$ 14. 23. 45. 51	$-$ 41. 23. 54. 15
$-$ 14. 25. 41. 53	$-$ 41. 53. 14. 25
$+$ 14. 25. 43. 51	$+$ 41. 53. 24. 15
$+$ 15. 21. 43. 54	$+$ 51. 13. 24. 45
$-$ 15. 21. 44. 53	$-$ 51. 13. 44. 25
$-$ 15. 23. 41. 54	$-$ 51. 23. 14. 45
$+$ 15. 23. 44. 51	$+$ 51. 23. 44. 15
$+$ 15. 24. 41. 53	$+$ 51. 43. 14. 25
$-$ 15. 24. 43. 51	$-$ 51. 43. 24. 15

Beyde Darſtellungen geben einerley, außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders iſt. Es giebt die Complexion 14. 23. 41. 55 in der erſten Darſtellung, wenn man zwiſchen die zweite und dritte Stelle eine 2 einſchaltet, die Permutation 4, 3, 2, 1, 5 deren Zeichen $+$ iſt, folglich hat auch die Complexion $+$. Eben ſo giebt die Complexion 41. 53. 14. 25. in der andern Darſtellung, wenn man

zwiſchen der erſten und zweyten Stelle eine 3 einſchaltet, die Permutation 4, 3, 5, 1, 2, deren Zeichen — iſt, folglich hat die Complexion auch —. Die mit Puncten bezeichneten Ziffern ſind hier die eingeſchobenen. b)

6) Aus der Natur der Permutationen iſt klar, daß

$$1n.\,\mathfrak{f}1n + 2n.\,\mathfrak{f}2n + 3n.\,\mathfrak{f}3n. + \ldots + rn.\,\mathfrak{f}rn = N$$
$$n1.\,\mathfrak{f}n1 + n2.\,\mathfrak{f}n2 + n3.\,\mathfrak{f}n3 + \ldots + nr.\,\mathfrak{f}nr = N$$

Denn in jeder Complexion in N muß einer der Factoren 1n, 2n, . . . rn vorkommen, aber es kann auch nur einer davon in jeder Complexion vorkommen. Eben ſo muß in jeder Complexion in N einer der Factoren n1, n2, n3 . . . vorkommen, aber es kann auch davon nur einer in jeder Complexion vorkommen.

7) Wenn n und m verſchieden ſind, ſo iſt

$$1n.\,\mathfrak{f}1m + 2n.\,\mathfrak{f}2m + 3n.\,\mathfrak{f}3m + 4n.\,\mathfrak{f}4m + \ldots + rn.\,\mathfrak{f}rm = 0$$

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den vordern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 . . . r vorkommen, in den hintern Stellen aber, die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion die dieſe Eigenſchaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen; denn man ordne die Factoren

b) Die Zeichen in dem Werthe von $\mathfrak{f}nm$ für $r=k$, ſind der Reihe nach bey beyden Arten, eben dieſelben wie in dem Werthe von N für $r=k-1$, wenn $n+m$ gerade iſt, und die umgekehrten, wenn $n+m$ ungerade iſt, wie hier. Es verſteht ſich nehmlich, daß die Permutationen unter ſich gut geordnet ſind. Daher hat die erſte Complexion, welche bey beyden Arten einerley iſt $+$ wenn $n+m$ gerade, und $-$ wenn $n+m$, wie hier, ungerade iſt, und das Zeichen jeder folgenden Permutation, oder die zugehörige Complexion, läßt ſich aus den Zeichen der vorhergehenden, nach eben der Regel wie in (8) beſtimmen. Der Beweis gründet ſich auf 8. 2 Zuſ. Für $r=8$ ſind die Zeichen in $\mathfrak{f}57$ nach der Reihe eben ſo, wie in N für $r=7$ und in $\mathfrak{f}54$ die umgekehrten.

ſo, daß die vordern Ziffern davon der Reihe nach 1, 2, 3...r ſind, ſo bilden die hintern Ziffern eine Permutation der r Elemente 1, 2, 3, ... r, worinnen aber m fehlt, und dagegen n zweymal vorkommt. Es komme das n vor in der pten und qten Stelle, von der Linken an gerechnet, und es ſey $q > p$, oder die Complexion ſey

. . . . pm . . . qn . . . .

ſo kommt dieſe Complexion vor einmal in pn. ſpm und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

. . . . pm . . . . qn . . . .

das anderemal in qn. ſqm, hier hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

. . . pn . . . qm . . . .

Beyde Complexionen aber haben verſchiedene Zeichen, weil bey den Permutationen, die die hintern Ziffern bilden, blos die Elemente n und m in den Stellen p und q vertauſcht ſind. Es heben ſich alſo beyde Complexionen auf, und ſonſt kann dieſe Complexion, welche ſie darſtellt, weiter nicht vorkommen. Es ſey z. B. $r = 9$; $n = 1$; $m = 4$ ſo iſt für die Complexion

15. 23. 31. 47. 51. 66. 72. 89. 98

$p = 3$, $q = 5$, und ſie kommt vor, einmal in 31. ſ34, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 34. 47. 51. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

5, 3, 4, 7, 1, 6, 2, 9, 8

das anderemal in 51. ſ54, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 31. 47. 54. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

5, 3, 1, 7, 4, 6, 2, 9, 8

Beyde Permutationen aber haben verschiedene Zeichen, weil blos die Elemente 1 und 4 in den Stellen 3 und 5 vertauscht sind (wegen 7), mithin heben sich die beyden Complexionen auf. Eben so ist für r = 4; n = 2; m = 3

$$\begin{Bmatrix} 12.f13 \\ 22.f23 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 32.f33 \\ 42.f43 \end{Bmatrix} = 0$$

d. i.

+ 12. 21. 32. 44	+ 11. 22. 32. 44
− 12. 21. 34. 42	− 11. 24. 32. 42
− 12. 22. 31. 44	− 12. 21. 32. 44
+ 12. 22. 34. 41	+ 12. 24. 32. 41
+ 12. 24. 31. 42	+ 14. 21. 32. 42
− 12. 24. 32. 41	− 14. 22. 32. 41
− 11. 22. 32. 44	− 11. 22. 34. 42
+ 11. 22. 34. 42	+ 11. 24. 32. 42
+ 12. 22. 31. 44	+ 12. 21. 34. 42
− 12. 22. 34. 41	− 12. 24. 31. 42
− 14. 22. 31. 42	− 14. 21. 32. 42
+ 14. 22. 32. 41	+ 14. 22. 31. 42

= 0

8) Wenn n und m verschieden sind so ist

n1. sm1 + n2. sm2 + n3. sm3 + ... + nr. smr = 0

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den hintern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 ... r vorkommen, in den vordern Stellen aber die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion, die diese Eigenschaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen. Denn man ordne die Factoren so,

$N =$

+ 11. 22. 33. 44	+ 13. 21. 32. 44
— 11. 22. 34. 43	— 13. 21. 34. 42
— 11. 23. 32. 44	— 13. 22. 31. 44
+ 11. 23. 34. 42	+ 13. 22. 34. 41
+ 11. 24. 32. 43	+ 13. 24. 31. 42
— 11. 24. 33. 42	— 13. 24. 32. 41
— 12. 21. 33. 44	— 14. 21. 32. 43
+ 12. 21. 34. 43	+ 14. 21. 33. 42
+ 12. 23. 31. 44	+ 14. 22. 31. 43
— 12. 23. 34. 41	— 14. 22. 33. 41
— 12. 24. 31. 43	— 14. 23. 31. 42
+ 12. 24. 33. 41	+ 14. 23. 32. 41

3) Die Summe aller Complexionen in N, welche den Factor nm haben, werde ausgedrückt durch nm. sinm; z. B. für r = 4; n = 3; m = 2 ist

32. sin 32 =	— 11. 23. 32. 44	also sin 32 = — 11. 23. 44
	+ 11. 24. 32. 43	+ 11. 24. 43
	+ 13. 21. 32. 44	+ 13. 21. 44
	— 13. 24. 32. 41	— 13. 24. 41
	— 14. 21. 32. 43	— 14. 21. 43
	+ 14. 23. 32. 41	+ 14. 23. 41

Betrachtungen.

4) Jede Complexion in N besteht aus r Factoren, wo sowohl in den vordern als auch hintern Ziffern der Factoren, alle die Zahlen 1, 2, 3, ... r vorkommen, und jede Complexion die diese Eigenschaft hat, muß in N vorkommen. Denn stellt man die Factoren dieser Complexion in der Ordnung, daß die vordern Ziffern, der Reihe nach, 1, 2, 3, ... r

ſind, ſo bilden die hintern Ziffern eine Permutation von 1, 2, 3, . . . r; da nun nach 1) alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r dargeſtellt werden müſſen, ſo muß auch diejenige vorkommen, die die hintern Ziffern bildeten, folglich die ganze Complexion, und die gedachte Permutation beſtimmt zugleich das Zeichen der Complexion. Man kann aber auch die Factoren ſo ſtellen, daß die hintern Ziffern der Reihe nach 1, 2, 3, . . . r ſind, dann bilden die vordern Ziffern eine Permutation 1, 2, 3, . . . r und zwar diejenige, die der erſtern verwandt (9) iſt. Da nun das Zeichen der erſtern Permutation das Zeichen der Complexion ſelbſt beſtimmte, und verwandte Permutationen einerley Zeichen haben, (10) ſo iſt es bey Beſtimmung des Zeichens einer Complexion, die in N vorkommt, einerley, ob man die vordern Ziffern der Factoren nach der Reihe ſtellt, und die Permutation der hintern Ziffern in Betrachtung zieht, wie in 1) und 2) oder ob man die hintern Ziffern nach der Reihe ſtellt, und die Permutation der vordern Ziffern in Betrachtung zieht. Z. B. 79. 95. 24. 68. 47. 82. 51. 16. 33 iſt eine Complexion in N für r = 9. Man ſtelle die Factoren ſo, daß die vordern Ziffern nach ihrer natürlichen Folge kommen

16. 24. 33. 47. 51. 68. 79. 82. 95

ſo bilden die hintern Ziffern die Permutation

6, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 2, 5

Nun ſtelle man die Factoren ſo, daß die hintern Ziffern nach ihrer Ordnung kommen

51. 82. 33. 24. 95. 16. 47. 68. 79

ſo geben die vordern Ziffern die Permutation

5, 8, 3, 2, 9, 1, 4, 6, 7

Dieſe beyden Permutationen ſind verwandt, haben alſo einerley Zeichen, nehmlich beyde —, folglich hat auch die ganze Complexion —. Hieraus ergiebt ſich, daß man

den Werth für N auch erhält, wenn man alle Permutationen von 1, 2, 3, . . . r darstellt, jede mit ihren Zeichen versieht, und, die Stellen von der Linken an gerechnet, 1, 2, 3, . . . m, . . . hinter jedes Element in der Stelle 1, 2, 3, . . . m, . . . schreibt. So ist also für r=4

$$N =$$

+ 11. 22. 33. 44	+ 31. 12. 23. 44
— 11. 22. 43. 34	— 31. 12. 43. 24
— 11. 32. 23. 44	— 31. 22. 13. 44
+ 11. 32. 43. 24	+ 31. 22. 43. 14
+ 11. 42. 23. 34	+ 31. 42. 13. 24
— 11. 42. 33. 24	— 31. 42. 23. 14
— 21. 12. 33. 44	— 41. 12. 23. 34
+ 21. 12. 43. 34	+ 41. 12. 33. 24
+ 21. 32. 13. 44	+ 41. 22. 13. 34
— 21. 32. 43. 14	— 41. 22. 33. 14
— 21. 42. 13. 34	— 41. 32. 13. 24
+ 21. 42. 33. 14	+ 41. 32. 23. 14

welches eben derselbe Werth ist wie in 2), außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders ist.

5) Der Werth von $\int nm$ besteht aus allen möglichen, aus $(r-1)$ Factoren bestehenden Complexionen, wo in den vordern Ziffern der Factoren, alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, das n ausgenommen, und in den hintern Ziffern auch alle die Elemente 1, 2, 3, . . . r, jedoch mit Ausnahme des m, vorkommen. Das Zeichen jeder solcher Complexion findet sich, wenn man sie mit nm multiplicirt, und nachsieht, was die dadurch entstehende Permutation in dem Werthe für N

für ein Zeichen hat. Hieraus ergeben sich die Regeln zur Bestimmung des Werthes für sum.

α) Man schreibe alle Elemente 1, 2, 3, ... r, mit Ausschluß des n, in die vordern Stellen, und alle Elemente 1, 2, 3, ... r, mit Ausschluß des m, in die hintern Stellen der Factoren, so ergiebt sich die erste Complexion.

β) Permutire man entweder alle hintere Stellen und lasse die vordern ungeändert, oder man permutire alle vordern Stellen und lasse die hintern ungeändert.

γ) Im ersten Falle schiebe man in Gedanken, zwischen der (n−1)ten und nten Stelle der Permutation, welche die hintern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein m ein, so giebt das Zeichen der dadurch entstehenden Permutation der Elemente 1, 2, 3 ... r das Zeichen der Complexion. Im andern Falle schiebe man in Gedanken zwischen der (m−1)ten und mten Stelle der Permutation, welche die vordern Ziffern der Factoren einer Complexion bilden, ein n ein, so bestimmt die dadurch entstehende Permutation, der Elemente 1, 2, ... r das Zeichen der Complexion. Auf diese Art ist für r=5, n=3, m=2

nach der erſten Art	nach der andern Art
$f32 = -$ 11. 23. 44. 55	$f32 = -$ 11. 23. 44. 55
$+$ 11. 23. 45. 54	$+$ 11. 23. 54. 45
$+$ 11. 24. 43. 55	$+$ 11. 43. 24. 55
$-$ 11. 24. 45. 53	$-$ 11. 43. 54. 25
$-$ 11. 25. 43. 54	$-$ 11. 53. 24. 45
$+$ 11. 25. 44. 53	$+$ 11. 53. 44. 25
$+$ 13. 21. 44. 55	$+$ 21. 13. 44. 55
$-$ 13. 21. 45. 54	$-$ 21. 13. 54. 45
$-$ 13. 24. 41. 55	$-$ 21. 43. 14. 55
$+$ 13. 24. 45. 51	$+$ 21. 43. 54. 15
$+$ 13. 25. 41. 54	$+$ 21. 53. 14. 45
$-$ 13. 25. 44. 51	$-$ 21. 53. 44. 15
$-$ 14. 21. 43. 55	$-$ 41. 13. 24. 55
$+$ 14. 21. 45. 53	$+$ 41. 13. 54. 25
$+$ 14. 23. 41. 55	$+$ 41. 23. 14. 55
$-$ 14. 23. 45. 51	$-$ 41. 23. 54. 15
$-$ 14. 25. 41. 53	$-$ 41. 53. 14. 25
$+$ 14. 25. 43. 51	$+$ 41. 53. 24. 15
$+$ 15. 21. 43. 54	$+$ 51. 13. 24. 45
$-$ 15. 21. 44. 53	$-$ 51. 13. 44. 25
$-$ 15. 23. 41. 54	$-$ 51. 23. 14. 45
$+$ 15. 23. 44. 51	$+$ 51. 23. 44. 15
$+$ 15. 24. 41. 53	$+$ 51. 43. 14. 25
$-$ 15. 24. 43. 51	$-$ 51. 43. 24. 15

Beyde Darſtellungen geben einerley, außer daß die Ordnung der Factoren in den Complexionen, und der Complexionen unter einander, anders iſt. Es giebt die Complexion 14. 23. 41. 55 in der erſten Darſtellung, wenn man zwiſchen die zweite und dritte Stelle eine 2 einſchaltet, die Permutation 4, 3, 2, 1, 5 deren Zeichen $+$ iſt, folglich hat auch die Complexion $+$. Eben ſo giebt die Complexion 41. 53. 14. 25. in der andern Darſtellung, wenn man

zwischen der ersten und zweyten Stelle eine 3 einschaltet, die Permutation 4, 3, 5, 1, 2, deren Zeichen — ist, folglich hat die Complexion auch —. Die mit Puncten bezeichneten Ziffern sind hier die eingeschobenen. b)

6) Aus der Natur der Permutationen ist klar, daß

$$1n.\,sin + 2n.\,s2n + 3n.\,s3n. + \ldots + rn.\,srn = N$$
$$n1.\,sn1 + n2.\,sn2 + n3.\,sn3 + \ldots + nr.\,snr = N$$

Denn in jeder Complexion in N muß einer der Factoren 1n, 2n, ... rn vorkommen, aber es kann auch nur einer davon in jeder Complexion vorkommen. Eben so muß in jeder Complexion in N einer der Factoren n1, n2, n3 . . , vorkommen, aber es kann auch davon nur einer in jeder Complexion vorkommen.

7) Wenn n und m verschieden sind, so ist

$$1n.\,sim + 2n.\,s2m + 3n.\,s3m + 4n.\,sqm + \ldots + rn.\,srm = 0$$

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den vordern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 . . . r vorkommen, in den hintern Stellen aber, die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion die diese Eigenschaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen; denn man ordne die Factoren

b) Die Zeichen in dem Werthe von s_{nm} für $r = k$, sind der Reihe nach bey beyden Arten, eben dieselben wie in dem Werthe von N für $r = k - 1$, wenn $n+m$ gerade ist, und die umgekehrten, wenn $n+m$ ungerade ist, wie hier. Es versteht sich nehmlich, daß die Permutationen unter sich gut geordnet sind. Daher hat die erste Complexion, welche bey beyden Arten einerley ist + wenn $n+m$ gerade, und − wenn $n+m$, wie hier, ungerade ist, und das Zeichen jeder folgenden Permutation, oder die zugehörige Complexion, läßt sich aus den Zeichen der vorhergehenden, nach eben der Regel wie in (8) bestimmen. Der Beweis gründet sich auf 8. 2 Zus. Für $r = 8$ sind die Zeichen in s_{57} nach der Reihe eben so, wie in N für $r = 7$ und in s_{54} die umgekehrten.

ſo, daß die vordern Ziffern davon der Reihe nach 1, 2, 3...r ſind, ſo bilden die hintern Ziffern eine Permutation der r Elemente 1, 2, 3, ... r, worinnen aber m fehlt, und dagegen n zweymal vorkommt. Es komme das n vor in der pten und qten Stelle, von der Linken an gerechnet, und es ſey $q > p$, oder die Complexion ſey

.... pm ... qn ....

ſo kommt dieſe Complexion vor einmal in pn. ſpm und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

.... pm .... qn ....

das anderemal in qn. ſqm, hier hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

... pn ... qm ....

Beyde Complexionen aber haben verſchiedene Zeichen, weil bey den Permutationen, die die hintern Ziffern bilden, blos die Elemente n und m in den Stellen p und q vertauſcht ſind. Es heben ſich alſo beyde Complexionen auf, und ſonſt kann dieſe Complexion, welche ſie darſtellt, weiter nicht vorkommen. Es ſey z. B. $r = 9$; $n = 1$; $m = 4$ ſo iſt für die Complexion

15. 23. 31. 47. 51. 66. 72. 89. 98

$p = 3$, $q = 5$, und ſie kommt vor, einmal in 31. ſ34, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 34. 47. 51. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

5, 3, 4, 7, 1, 6, 2, 9, 8

das anderemal in 51. ſ34, und da hat ſie das Zeichen wie die Complexion in N

15. 23. 31. 47. 54. 66. 72. 89. 98

oder wie die Permutation

5, 3, 1, 7, 4, 6, 2, 9, 8

Beyde Permutationen aber haben verschiedene Zeichen, weil blos die Elemente 1 und 4 in den Stellen 3 und 5 vertauscht sind (wegen 7), mithin heben sich die beyden Complexionen auf. Eben so ist für r = 4; n = 2; m = 3

$$\begin{Bmatrix} 12.f13 \\ 22.f23 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 32.f33 \\ 42.f43 \end{Bmatrix} = 0$$

d. i.

+ 12. 21. 32. 44	+ 11. 22. 32. 44
− 12. 21. 34. 42	− 11. 24. 32. 42
− 12. 22. 31. 44	− 12. 21. 32. 44
+ 12. 22. 34. 41	+ 12. 24. 32. 41
+ 12. 24. 31. 42	+ 14. 21. 32. 42
− 12. 24. 32. 41	− 14. 22. 32. 41
− 11. 22. 32. 44	− 11. 22. 34. 42
+ 11. 22. 34. 42	+ 11. 24. 32. 42
+ 12. 22. 31. 44	+ 12. 21. 34. 42
− 12. 22. 34. 41	− 12. 24. 31. 42
− 14. 22. 31. 42	− 14. 21. 32. 42
+ 14. 22. 32. 41	+ 14. 22. 31. 42

= 0

8) Wenn n und m verschieden sind so ist

$$n1.\,fm1 + n2.\,fm2 + n3.\,fm3 + \ldots + nr.\,fmr = 0$$

Denn die ganze Reihe enthält lauter Complexionen von r Factoren, wo in den hintern Stellen der Factoren alle Zahlen von 1 . . . r vorkommen, in den vordern Stellen aber die Zahl m fehlt, dagegen aber n zweymal vorkommt. Jede Complexion, die diese Eigenschaft hat, muß in der Reihe zweymal vorkommen. Denn man ordne die Factoren so,

daß die hintern Ziffern davon, der Reihe nach 1, 2, 3 . . . r sind, so bilden die vordern Ziffern eine Permutation der r Elemente 1, 2, 3 . . . r, worinnen aber m fehlt, und dagegen n zweymal vorkommt. Es komme das n vor in der pten und qten Stelle, von der Linken an gerechnet, und es sey q > p, oder die Complexion sey

. . . . np . . . . nq . . . .

so kommt diese Complexion vor, einmal in np. ſmp, und da hat sie das Zeichen, wie die Complexion in N

. . . . mp . . . . nq . . . .

das anderemal in nq. ſmq, und da hat sie das Zeichen, wie die Complexion in N

. . . . np . . . . mq . . . .

Beyde Complexionen aber haben verschiedene Zeichen, weil bey den Permutationen, die die vordern Ziffern bilden, blos die Elemente n und m, in den Stellen p und q vertauscht sind. Es heben sich also beyde Permutationen auf, und sonst kann diese Complexion, welche alle darstellt, weiter nicht vorkommen. Es sey z. B. r = 9, n = 7, m = 5 so kommt die Complexion

41. 72. 33. 84. 15. 26. 97. 78. 69.

vor, einmal in 72. ſ52, und hat sie das Zeichen wie die Complexion in N

41. 52. 33. 84. 15. 26. 97. 78. 69

oder wie die Permutation

4, 5, 3, 8, 1, 2, 9, 7, 6

das anderemal in 78. ſ58, und da hat sie das Zeichen wie die Complexion in N

41. 72. 33. 84. 15. 26. 97. 58. 69

oder wie die Permutation

$$4,\ 7,\ 3,\ 8,\ 1,\ 2,\ 9,\ 5,\ 6$$

Beyde Permutationen aber haben verschiedene Zeichen, weil die Elemente 5 und 7 in den Stellen 2 und 8 vertauscht sind (wegen 7), mithin heben sich die beyden Complexionen auf. Eben so ist für $r=4$; $m=4$; $n=1$

$$\left\{\begin{matrix} 11\ \mathrm{f}\ 41 \\ 12\ \mathrm{f}\ 42 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 13\ \mathrm{f}\ 43 \\ 14\ \mathrm{f}\ 44 \end{matrix}\right\} = 0$$

d. i.

− 11. 12. 23. 34	− 11. 22. 13. 34
+ 11. 12. 33. 24	+ 11. 32. 13. 24
+ 11. 22. 13. 34	+ 21. 12. 13. 34
− 11. 22. 33. 14	− 21. 32. 13. 14
− 11. 32. 13. 24	− 31. 12. 13. 24
+ 11. 32. 23. 14	+ 31. 22. 13. 14
+ 11. 12. 23. 34	+ 11. 22. 33. 14
− 11. 12. 33. 24	− 11. 32. 23. 14
− 21. 12. 13 34	− 21. 12. 33. 14
+ 21. 12. 33. 14	+ 21. 32. 13. 14
+ 31. 12. 13. 24	+ 31. 12. 23. 14
− 31. 12. 23. 14	− 31. 22. 13. 14

$$= 0$$

Auflösung.

$$9)\quad \overset{m}{x} = (\overset{1}{s}.\mathrm{f}1m + \overset{2}{s}.\mathrm{f}2m + \overset{3}{s}.\mathrm{f}3m + \ldots + \overset{n}{s}.\mathrm{f}nm + \ldots + \overset{r}{s}.\mathrm{f}rm) : N$$

Beweis.

Wegen der gegebenen Gleichungen ist

$$
\begin{aligned}
s.f1m &= 11.f1m.x^1 + 12.f1m.x^2 + 13.f1m.x^3 \\
&\quad + \ldots + 1m.f1m.x^m + \ldots + 1r.f1m.x^r \\
s.f2m &= 21.f2m.x^1 + 22.f2m.x^2 + 23.f2m.x^3 \\
&\quad + \ldots + 2m.f2m.x^m + \ldots + 2r.f2m.x^r \\
s.f3m &= 31.f3m.x^1 + 32.f3m.x^2 + 33.f3m.x^3 \\
&\quad + \ldots + 3m.f3m.x^m + \ldots + 3r.f3m.x^r \\
&\vdots \\
s.fnm &= n1.fnm.x^1 + n2.fnm.x^2 + n3.fnm.x^3 \\
&\quad + \ldots + nm.fnm.x^m + \ldots + nr.fnm.x^r \\
&\vdots \\
s.frm &= r1.frm.x^1 + r2.frm.x^2 + r3.frm.x^3 \\
&\quad + \ldots + rm.frm.x^m + \ldots + rr.frm.x^r
\end{aligned}
$$

Die Summe der mten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens ist wegen 6) gleich $N x^m$, aller übrigen, wegen 7 gleich 0; folglich

$$s.f1m + s.f2m + s.f3m + \ldots + s.fnm + \ldots + s.frm = N$$

woraus die gegebene Auflösung folgt.

Anderer Beweis.

Man substituire die in der Auflösung gegebenem Wert für $x^1, x^2, \ldots x^r$, in irgend einer der gegebenen Gleichungen, z. B. in der nten, so erhält man:

$$n_1^1 \times N = n_1.f_{11}.s + n_1.f_{21}.s + n_1.f_{31}.s$$
$$+ \ldots + n_1.f_{n1}.s + \ldots + n_1.f_{r1}.s$$
$$n_2^2 \times N = n_2.f_{12}.s + n_2.f_{22}.s + n_2.f_{32}.s$$
$$+ \ldots + n_2.f_{n2}.s + \ldots + n_2.f_{r2}.s$$
$$n_3^3 \times N = n_3.f_{13}.s + n_3.f_{23}.s + n_3.f_{33}.s$$
$$+ \ldots + n_3.f_{n3}.s + \ldots + n_3.f_{r3}.s$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$n_m^m \times N = n_m.f_{1m}.s + n_m.f_{2m}.s + n_m.f_{3m}.s$$
$$+ \ldots + n_m.f_{nm}.s + \ldots + n_m.f_{rm}.s$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$n_r^r \times N = n_r.f_{1r}.s + n_r.f_{2r}.s + n_r.f_{3r}.s$$
$$+ \ldots + n_r.f_{nr}.s + \ldots + n_r.f_{rr}.s$$

Hier ist die Summe der nten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens, $= N_s^n$ nach 6), aller übrigen, nach 8) gleich o; folglich

$n_1^1 \times N + n_2^2 \times N + n_3^3 \times N + \ldots + n_r^r \times N = N_s^n$; woraus die nte von den gegebenen Gleichungen folgt.

Zusätze.

10) Es seyen gegeben für r unbekannte Größen $y_1^1, y_2^2, y_3^3 \ldots y_r^r$ folgende r Gleichungen.

$$\overset{1}{v} = 11\overset{1}{y} + 21\overset{2}{y} + 31\overset{3}{y} + \ldots + n1\overset{n}{y} + \ldots + r1\overset{r}{y}$$

$$\overset{2}{v} = 12\overset{1}{y} + 22\overset{2}{y} + 32\overset{3}{y} + \ldots + n2\overset{n}{y} + \ldots + r2\overset{r}{y}$$

$$\overset{3}{v} = 13\overset{1}{y} + 23\overset{2}{y} + 33\overset{3}{y} + \ldots + n3\overset{n}{y} + \ldots + r3\overset{r}{y}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{m}{v} = 1m\overset{1}{y} + 2m\overset{2}{y} + 3m\overset{3}{y} + \ldots + nm\overset{n}{y} + \ldots + rm\overset{r}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{r}{v} = 1r\overset{1}{y} + 2r\overset{2}{y} + 3r\overset{3}{y} + \ldots + nr\overset{n}{y} + \ldots + rr\overset{r}{y}$$

so ist

$$\overset{n}{y} = (\overset{1}{v}.\mathfrak{s}n1 + \overset{2}{v}.\mathfrak{s}n2 + \overset{3}{v}.\mathfrak{s}n3 + \ldots + \overset{m}{v}.\mathfrak{s}nm + \ldots + \overset{r}{v}.\mathfrak{s}nr) : N$$

Beweis.

$$\overset{1}{v}.\mathfrak{s}n1 = 11.\mathfrak{s}n1.\overset{1}{y} + 21.\mathfrak{s}n1.\overset{2}{y} + 31.\mathfrak{s}n1.\overset{3}{y} \ldots + n1.\mathfrak{s}n1.\overset{n}{y} \ldots + r1.\mathfrak{s}n1.\overset{r}{y}$$

$$\overset{2}{v}.\mathfrak{s}n2 = 12.\mathfrak{s}n2.\overset{1}{y} + 22.\mathfrak{s}n2.\overset{2}{y} + 32.\mathfrak{s}n2.\overset{3}{y} \ldots + n2.\mathfrak{s}n2.\overset{n}{y} \ldots + r2.\mathfrak{s}n2.\overset{r}{y}$$

$$\overset{3}{v}.\mathfrak{s}n3 = 13.\mathfrak{s}n3\overset{1}{y} + 23.\mathfrak{s}n3.\overset{2}{y} + 33\,\mathfrak{s}n3.\overset{3}{y} \ldots + n3.\mathfrak{s}n3.\overset{n}{y} \ldots + r3.\mathfrak{s}n3\,\overset{r}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{m}{v}.\mathfrak{s}nm = 1m.\mathfrak{s}nm.\overset{1}{y} + 2m.\mathfrak{s}nm.\overset{2}{y} + 3m.\mathfrak{s}nm.\overset{3}{y}$$

$$\vdots \qquad \ldots + nm.\mathfrak{s}nm.\overset{n}{y} \ldots + rm.\mathfrak{s}nm.\overset{r}{y}$$

$$\overset{r}{v}.\mathfrak{s}nr = 1r.\mathfrak{s}nr.\overset{1}{y} + 2r.\mathfrak{s}nr.\overset{2}{y} + 3r.\mathfrak{s}nr.\overset{3}{y} \ldots + nr.\mathfrak{s}nr.\overset{n}{y} \ldots + rr.\mathfrak{s}nr.\overset{r}{y}$$

Hier ist die Summe der nten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens $= N\overset{n}{y}$ nach 6), aller übrigen $= 0$, nach 8) folglich

$$\overset{1}{v}.\mathfrak{s}n1 + \overset{2}{v}.\mathfrak{s}n2 + \overset{3}{v}.\mathfrak{s}n3 \ldots + \overset{m}{v}.\mathfrak{s}nm \ldots + \overset{r}{v}.\mathfrak{s}nr = N\overset{n}{y}$$

woraus die gegebene Auflösung folgt.

Ein anderer Beweis ließe sich wie in 9) vermittelst 6) und 7) geben, wenn man die in der Auflösung für $y_1, y_2, y_3 \ldots y_r$ gegebenen Werthe, in irgend einer der gegebenen Gleichungen z. B. in der mten substituirte.

Ein dritter Beweis ließe sich so führen:

Vertauscht man die erste und zweyte Stelle jedes Coefficienten mit einander, oder setzt man überall statt des Coefficienten pq den Coefficient qp, so bleibt N ungeändert, wie leicht aus der doppelten Darstellung von N nach 2) und 4) erhellet, und s_{fm} geht über in s_{fn}, und umgekehrt, welches daraus erhellet, wenn man s_{fm} nach der ersten Art von 5) und s_{fn} nach der zweyten Art entwickelt.

Da nun die Gleichungen in 10) aus denen zu Anfange gegebenen entstehen, wenn man überall

statt	x	und allgemein	pq
setzt	y	=	qp

so entsteht durch die gedachte Substitution, aus der dortigen Auflösung

$$x_m = (s_1 . s_{fm} + s_2 . s_{f2m} + s_3 . s_{f3m} \ldots + s_r . s_{frm}) : N$$

dann für den Fall für 10) die Auflösung

$$y_m = (v_1 . s_{fm} + v_2 . s_{f2m} + v_3 . s_{f3m} \ldots + v_r . s_{frm}) : N$$

welches die hier gegebene ist, nur daß m und n vertauscht sind.

11) Erläuterung. Es seyen gegeben für 4 unbekannte Größen, die vier Gleichungen

$$\alpha)\quad \begin{aligned} {}^{1}s &= {}^{1}a x + {}^{2}b x + {}^{3}c x + {}^{4}d x \\ {}^{2}s &= {}^{1}e x + {}^{2}f x + {}^{3}g x + {}^{4}h x \\ {}^{3}s &= {}^{1}i x + {}^{2}k x + {}^{3}l x + {}^{4}m x \\ {}^{4}s &= {}^{1}n x + {}^{2}o x + {}^{3}p x + {}^{4}q x \end{aligned}$$

so ist

$$\beta)\quad \begin{aligned} {}^{1}x &= {}^{1}A s + {}^{2}B s + {}^{3}C s + {}^{4}D s \\ {}^{2}x &= {}^{1}E s + {}^{2}F s + {}^{3}G s + {}^{4}H s \\ {}^{3}x &= {}^{1}I s + {}^{2}K s + {}^{3}L s + {}^{4}M s \\ {}^{4}x &= {}^{1}N s + {}^{2}O s + {}^{3}P s + {}^{4}Q s \end{aligned}$$

wo A, B, ... Q blos durch a, b, ... q bestimmt sind. Wäre nun auch

$$\gamma)\quad \begin{aligned} {}^{1}v &= {}^{1}a y + {}^{2}c y + {}^{3}i y + {}^{4}n y \\ {}^{2}v &= {}^{1}b y + {}^{2}f y + {}^{3}k y + {}^{4}o y \\ {}^{3}v &= {}^{1}c y + {}^{2}g y + {}^{3}l y + {}^{4}p y \\ {}^{4}v &= {}^{1}d y + {}^{2}h y + {}^{3}m y + {}^{4}q y \end{aligned}$$

so ist auch

$$\delta)\ \overset{1}{y} = A\overset{1}{v} + E\overset{2}{v} + I\overset{3}{v} + N\overset{4}{v}$$

$$\overset{2}{y} = B\overset{1}{v} + F\overset{2}{v} + K\overset{3}{v} + O\overset{4}{v}$$

$$\overset{3}{y} = C\overset{1}{v} + G\overset{2}{v} + L\overset{3}{v} + P\overset{4}{v}$$

$$\overset{4}{y} = D\overset{1}{v} + H\overset{2}{v} + M\overset{3}{v} + Q\overset{4}{v}$$

wenn also bey den gegebenen Gleichungen, Horizontalreihen der Coefficienten in Verticalreihen, und umgekehrt, übergehen, so findet das auch bey den Auflösungsgleichungen statt.

Beyspiel. Es sey gegeben

$$\overset{1}{s} = \overset{1}{x} + 2\overset{2}{x} + 5\overset{3}{x} + 11\overset{4}{x} + 7\overset{5}{x}$$

$$\overset{2}{s} = 19\overset{1}{x} + 15\overset{2}{x} + 27\overset{3}{x} - 18\overset{4}{x} - 13\overset{5}{x}$$

$$\overset{3}{s} = -4\overset{1}{x} + 6\overset{2}{x} - 10\overset{3}{x} + 24\overset{4}{x} + 9\overset{5}{x}$$

$$\overset{4}{s} = 8\overset{1}{x} - 17\overset{2}{x} - 3\overset{3}{x} + 20\overset{4}{x} + 12\overset{5}{x}$$

$$\overset{5}{s} = -13\overset{1}{x} + 16\overset{2}{x} - 21\overset{3}{x} + 14\overset{4}{x} + 26\overset{5}{x}$$

so findet sich durch angestellte Berechnung

$$2578855\,{}^{1}x = -283650\,{}^{1}s + 133135\,{}^{2}s + 74805\,{}^{3}s + 153835\,{}^{4}s + 46040\,{}^{5}s$$

$$2578855\,{}^{2}x = -46568\,{}^{1}s + 60897\,{}^{2}s + 82487\,{}^{3}s - 42350\,{}^{4}s + 33979\,{}^{5}s$$

$$2578855\,{}^{3}x = +315468\,{}^{1}s - 36187\,{}^{2}s - 93397\,{}^{3}s - 65755\,{}^{4}s - 40349\,{}^{5}s$$

$$2578855\,{}^{4}x = +53503\,{}^{1}s - 10102\,{}^{2}s + 117383\,{}^{3}s - 12370\,{}^{4}s - 54379\,{}^{5}s$$

$$2578855\,{}^{5}x = +112824\,{}^{1}s + 5304\,{}^{2}s - 152001\,{}^{3}s + 56530\,{}^{4}s + 97988\,{}^{5}s$$

Wäre aber gegeben

$${}^{1}v = {}^{1}y + 19\,{}^{2}y - 4\,{}^{3}y + 8\,{}^{4}y - 13\,{}^{5}y$$

$${}^{2}v = 2\,{}^{1}y + 15\,{}^{2}y + 6\,{}^{3}y - 17\,{}^{4}y + 16\,{}^{5}y$$

$${}^{3}v = 5\,{}^{1}y + 27\,{}^{2}y - 10\,{}^{3}y - 3\,{}^{4}y - 21\,{}^{5}y$$

$${}^{4}v = 11\,{}^{1}y - 18\,{}^{2}y + 24\,{}^{3}y + 20\,{}^{4}y + 14\,{}^{5}y$$

$${}^{5}v = 7\,{}^{1}y - 13\,{}^{2}y + 9\,{}^{3}y + 12\,{}^{4}y + 26\,{}^{5}y$$

so folgte auch, ohne eine neue Rechnung vorzunehmen

$$2578855\,y^{1} = -283650\,v^{1} - 46568\,v^{2} + 315468\,v^{3} + 535035\,v^{4} + 112824\,v^{5}$$

$$2578855\,y^{2} = +133135\,v^{1} + 60897\,v^{2} - 36187\,v^{3} - 10102\,v^{4} + 5304\,v^{5}$$

$$2578855\,y^{3} = +74805\,v^{1} + 82487\,v^{2} - 93397\,v^{3} + 117383\,v^{4} - 152001\,v^{5}$$

$$2578855\,y^{4} = +153835\,v^{1} - 42350\,v^{2} - 65755\,v^{3} - 12370\,v^{4} + 56530\,v^{5}$$

$$2578855\,y^{5} = +46040\,v^{1} + 33979\,v^{2} - 40349\,v^{3} - 54379\,v^{4} + 97988\,v^{5}$$

12) Ist endlich für jedes p und q, pq = qp, oder ist bey den gegebenen Gleichungen, für jedes m die mte Horizontalreihe der Coefficienten, mit der mten Verticalreihe derselben einerley; die Horizontalreihen nehmlich von oben herab, und die Verticalreihen, von der Linken nach der Rechten zu gerechnet, so ist auch allgemein spq = sqp, oder die mte Horizontalreihe der Coefficienten, mit der mten Verticalreihe derselben, auch bey den Auflösungsgleichungen einerley. Es sey z. B. für sechs unbekannte Größen:

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & ax & + bx & + cx & + dx & + ex & + fx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & bx & + gx & + hx & + ix & + kx & + lx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & cx & + hx & + mx & + nx & + ox & + px
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & dx & + ix & + nx & + qx & + rx & + tx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & ex & + kx & + ox & + rx & + ux & + vx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
s = & fx & + lx & + px & + tx & + vx & + wx
\end{array}
$$

so ist auch

$$
\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & As & + Bs & + Cs & + Ds & + Es & + Fs
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & Bs & + Gs & + Hs & + Is & + Ks & + Ls
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & Cs & + Hs & + Ms & + Ns & + Os & + Ps
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & Ds & + Is & + Ns & + Qs & + Rs & + Ts
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & Es & + Ks & + Os & + Rs & + Us & + Vs
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x = & Fs & + Ls & + Ps & + Ts & + Vs & + Ws
\end{array}
$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, E ... W blos durch a, b, c ... w bestimmt werden. Eine Anwendung dieses Satzes findet sich in meiner anderwärts aufgeführt befindlichen Abhandlung über die Summen der Combinationen der Wurzeln in höhern Gleichungen.

13) Für diejenigen, denen der Gebrauch der Permutationen noch nicht geläufig ist, läßt sich die in 11) gegebene Erläuterung, unabhängig von den Permutationen, so erweisen.

Subſtituirt man die Gleichungen β) in denen von α) ſo ergeben ſich folgende Gleichungen zur Beſtimmung der unbekannten Coefficienten A, B, C . . . Q:

ε) $aA+bE+cI+dN=1$ $\quad aB+bF+cK+dO=0$
$eA+fE+gI+hN=0$ $\quad eB+fF+gK+hO=1$
$iA+kE+lI+mN=0$ $\quad iB+kF+lK+mO=0$
$nA+oE+pI+qN=0$ $\quad nB+oF+pK+qO=0$

$aC+bG+cL+dP=0$ $\quad aD+bH+cM+dQ=0$
$eC+fG+gL+hP=0$ $\quad eD+fH+gM+hQ=0$
$iC+kG+lL+mP=1$ $\quad iD+kH+lM+mQ=0$
$nC+oG+pL+qP=0$ $\quad nD+oH+pM+qQ=1$

Subſtituirt man hingegen die Gleichungen in α) in denen in β) ſo ergeben ſich folgende Gleichungen, zur Beſtimmung der unbekannten Coefficienten A, B . . . Q.

δ) $aA+eB+iC+nD=1$ $\quad aE+eF+iG+nH=0$
$bA+fB+kC+oD=0$ $\quad bE+fF+kG+oH=1$
$cA+gB+lC+pD=0$ $\quad cE+gF+lG+pH=0$
$dA+hB+mC+qD=0$ $\quad dE+hF+mG+qH=0$

$aI+eK+iL+nM=0$ $\quad aN+eO+iP+nQ=0$
$bI+fK+kL+oM=0$ $\quad bN+fO+kP+oQ=0$
$cI+gK+lL+pM=1$ $\quad cN+gO+lP+pQ=0$
$dI+hK+mL+qM=0$ $\quad dN+hO+mP+qQ=1$

Sind nun die Gleichungen in γ) gegeben, ſo läßt ſich die Richtigkeit der Gleichungen in δ) leicht ſo erweiſen: Man multiplicire, die vier Gleichungen in γ, nach der Reihe mit, A, E, I, N, ſo iſt

$$\overset{1}{A}v = a\overset{1}{A}y + e\overset{2}{A}y + i\overset{3}{A}y + n\overset{4}{A}y$$

$$\overset{2}{E}v = b\overset{1}{E}y + f\overset{2}{E}y + k\overset{3}{E}y + o\overset{4}{E}y$$

$$\overset{3}{I}v = c\overset{1}{I}y + g\overset{2}{I}y + l\overset{3}{I}y + p\overset{4}{I}y$$

$$\overset{4}{N}v = d\overset{1}{N}y + h\overset{2}{N}y + m\overset{3}{N}y + q\overset{4}{N}y$$

Addirt man diese vier Gleichungen zusammen, so ist, wie aus den Gleichungen in ε) erhellet, die erste Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens $= \overset{1}{y}$; alle übrigen $= o$, folglich

$$\overset{1}{A}v + \overset{2}{E}v + \overset{3}{I}v + \overset{4}{N}v = \overset{1}{y},$$

und dies ist die erste Gleichung in δ). Eben so lassen sich die übrigen Gleichungen in δ) erweisen.

Oder, man substituire die Gleichungen in δ), in jeder der Gleichungen in γ), z. B. in der ersten, so erhält man

$$\begin{aligned}\overset{1}{v} = {} & a\overset{1}{A}v + a\overset{2}{E}v + a\overset{3}{I}v + a\overset{4}{N}v \\ & + e\overset{1}{B}v + e\overset{2}{F}v + e\overset{3}{K}v + e\overset{4}{O}v \\ & + i\overset{1}{C}v + i\overset{2}{G}v + i\overset{3}{L}v + i\overset{4}{P}v \\ & + n\overset{1}{D}v + n\overset{2}{H}v + n\overset{3}{M}v + n\overset{4}{Q}v\end{aligned}$$

Hier ist, wie aus den Gleichungen in ζ erhellet, die Summe der ersten Verticalreihe rechter Hand des Gleichheitszeichens $= \overset{1}{v}$, aller übrigen $= o$, folglich ist die Gleichung richtig. Eben so kann man die Gleichungen in δ) in der zweyten, dritten und vierten Gleichung von γ) substituiren, und es trifft allemal ein.

Was von vier unbekannten Größen gilt, läßt sich eben so, von mehrern erweisen, also übersieht man, auch ohne Permutationen zu Hülfe zu nehmen, daß, wenn bey den gegebenen Gleichungen, Horizontalreihen der Coefficienten in Verticalreihen, und umgekehrt, übergehen, so muß dies auch bey den Auflösungsgleichungen statt finden, und hiervon ist wiederum der Satz in 12) eine unmittelbare Folge.

Anmerkung. Daß die Auflösung dieses Problems von Permutationen abhange, haben schon bemerkt: Bezout (Théorie générale des Equations algébriques) und Cramer (Introduction à l'Analyse des lignes courbes, Num. I et II de l'Evanouissement des Inconnues). Ueber diese beyden Verfahrungsarten sehe man vorzüglich Herrn Prof. Hindenburgs Vorrede zu Rüdigeri Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis. In dieser Vorrede findet man die Auflösungsformeln für das Eliminationsproblem verschiedentlich combinatorisch geordnet und deutlich dargestellt. *) Die Richtigkeit der daselbst von Hindenburg gegebenen Regel zu Bestimmung der Zeichen (Praef. p. XLIII.) erhellet hier aus 8, 1 Zus. Die Richtigkeit der von Cramern gegebenen Regel (Ebendas. p. XXXIX, XL) folgt aus 10; denn für jedes dérangement, wie es Cramer nennt, kommt hier im Quadrat ein Kreuzchen zu stehen.

*) Meine Auflösung des Eliminationsproblems a. a. O. ist, sowohl in Ansehung der combinatorischen Anordnung und Folge der Permutationen, als auch in Beziehung auf die denselben vorzusetzenden, nach einem bestimmten Anfange in bestimmter Abwechselung auf einander folgenden Zeichen, †† und −−, oder umgekehrt, so leicht, daß die ganze Darstellung des Werthes jeder beliebigen unbekannten Größe nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, die Buchstaben und Zeichen zu schreiben. Herr Prof. Rothe hat hier alles aus blos combinatorischen Begriffen abgeleitet und gerechtfertigt, auch das Eliminationsproblem noch auf andere verwandte Sätze erstreckt. Hindenburg.

XI.

Relationen der Lokalausdrücke von Potenzen besonderer merkwürdiger Reihen; von H. A. Rothe, Prof. zu Leipzig.

1.

So wichtig und nützlich auch solche Formeln seyn mögen, worinnen Relationen von Lokalausdrücken allgemeiner Reihen, oder solcher, bey denen die Scalen allgemein angenommen werden, enthalten sind (dergleichen z. B. in meiner Abhandlung: Formulae de Serierum Reversione demonstratio vniuersalis, und in Herrn Prof. Pfaffs Aufsätzen im ersten Bande des Archivs der reinen und angewandten Mathematik, ingleichen in der ersten und zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen sich finden), so giebt es doch außer diesen allgemeinen Formeln, für besondere Reihen oder Scalen noch besondere, welche vorzüglich dann, wenn es zu der numerischen Berechnung solcher Lokalausdrücke kommt, vorzüglich brauchbar und nützlich sind.

2. In dem dritten Paragraph meiner nur erwähnten Abhandlung, ist die, für die allgemeine Scale

$$p\,[a, b, c, d, e \ldots]$$

geltende Lokalformel

$$s\,a\,p^m x\,(n+1) + (s+d)\,b\,p^m x n + (s+2d)\,c\,p^m x\,(n-1)$$

$$\ldots + (s+rd)\overset{r}{a}\,p^m x\,(n-r+1)\ldots + (s+nd)\overset{n}{a}\,p^m x1$$
$$= \frac{s(m+1)+nd}{m+1}\,p^{m+1}x(n+1)$$ bewiesen worden.

Man ſetze in dieſer Formel

ſtatt

$b \qquad c \qquad d \qquad e$

nun

$$\frac{af}{g},\ \frac{af(f+c)}{g(g+e)},\ \frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)(g+2e)},\ \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{g(g+e)(g+2e)(g+3e)}\ldots$$

und ſtatt s, d, n, einmal $g-e, e, l$, das anderemal $f, c, l-1$, und man bekommt die beyden Formeln

$$a(g-e)\,p^m x(l+1)+a\,fp^m x1+\frac{af(f+c)}{g}\,p^m x\,(l-1)$$
$$+\frac{af(f+c)(f+2c)}{g\,(g+e)}\,p^m x(l-2)\ldots+\frac{af(f+c)(f+2c)\ldots(f+(l-1)c)}{g(g+e)(g+2e)\ldots(g+(l-2)c)}\,p^m x1$$
$$= \frac{(g-e)(m+1)+le}{m+1}\,p^{m+1}x\,(l+1)$$

und

$$af\,p^m x1+\frac{af(f+c)}{g}\,p^m x\,(l-1)+\frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)}\,p^m x(l-2)$$
$$\ldots+\frac{af(f+c)(f+2c)\ldots(f+(l-1)c)}{g(g+e)(g+2c)\ldots(g+(l-2)c)}\,p^m x1$$
$$= \frac{f(m+1)+(l-1)c}{m+1}\,p^{m+1}x1$$

Man ziehe die letzte Formel von der ersten ab, und man erhält

$$a(g-e)p^m x(l+1) = \frac{(g-e)(m+1)+le}{m+1} p^{m+1} x(l+1)$$

$$- \frac{f(m+1)+(l-1)c}{m+1} p^{m+1} xl$$

oder, wenn man statt l durchgängig n schreibt,

I. $(m+1)a(g-e)p^m x(n+1) + [f(m+1)+(n-1c]\, p^{m+1} xn$

$$= [(g-e)(m+1)+ne]\, p^{m+1} x(n+1).$$

und $a(g-e)p^{-1}x(n+1) + (n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.xn = ne\,\mathrm{Log}\,p.x(n+1)$ [a])

für die Scale

$$p[a, \frac{af}{g}, \frac{af(f+c)}{g(g+c)}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+c)(g+2c)}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{g(g+c)(g+2c)(g+3c)}, \ldots]$$

3. Man setze in den Formeln I) $g = e$, und man hat

A) $[f(m+1)+(n-1)c]\, p^{m+1} xn = ne\, p^{m+1} x(n+1)$ und $(n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.xn = ne\,\mathrm{Log}\,p.x(n+1)$ für die Scale

$$p[a, \frac{af}{e}, \frac{af(f+c)}{e.2e}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.2e.3e}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{e.2e.3e.4e}, \ldots]$$

und hieraus folgt, für eben diese Scale,

a) Denn der Werth von $\frac{p^m x(n+1)}{m}$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, verwandelt sich für $m=0$, in $\mathrm{Log}\,p\,x(n+1)$. Da sowohl in meiner Abhandlung (Formulae de serierum reversione demonstratio universalis) Seite 56 unten, als auch in gegenwärtigem Aufsatze, logarithmische Lokalausdrücke vorkommen, so ist zu Ende dieses Aufsatzes eine Erläuterung derselben beygefügt worden, welche, im Falle man hier anstieße, vorher nachgelesen werden kann.

$p^m x1 = a^m$; $p^m x2 = \frac{mf}{e} a^m$; $p^m x3 = \frac{mf(mf+c)}{e.\ 2e} a^m$; u. allgemein

$$p^m x(n+1) = \frac{mf(mf+c)(mf+2c)(mf+3c)\ldots(mf+(n-1)c)}{e.\ 2e.\ 3e.\ 4e.\ \ldots\ ne} a^m;$$

und

$$L.p.x2 = \frac{f}{e}; L.p.x3 = \frac{cf}{2e^2}; \text{Log } p.x4 = \frac{c^2 f}{3e^3}; \text{Log} p.x5 = \frac{c^3 f}{4e^4};$$

allgemein, $\text{Log } p.x(n+1) = \frac{c^{n-1} f}{ne^n}$

Es ist demnach

$$(ax^\alpha + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e} x^{\alpha+3\beta} + \ldots)^m$$
$$= a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e} a^m x^{m\alpha+\beta} + \frac{mf(mf+c)}{e.\ 2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \ldots$$

und

$$\text{Log}(ax^\alpha + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e} x^{\alpha+3\beta} \ldots)$$
$$= \text{Log}(ax^\alpha) + \frac{f}{e} x^\beta + \frac{cf}{2e^2} x^{2\beta} + \frac{c^2 f}{3e^3} x^{3\beta} + \frac{c^3 f}{4e^4} x^{4\beta} + \ldots$$

Hieraus ergeben sich folgende besondere Fälle:

1) Für $a = y^h$, $c = -d$, $e = \beta = 1$, $f = h$, $x = \frac{z}{y}$, $\alpha = 0$

$$(y^h + \frac{h}{1} y^{h-1} z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2} y^{h-2} z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{h-3} z^3 + \ldots)^m$$

$$= y^{mh} + \frac{mh}{1} y^{mh-1}z + \frac{mh(mh-d)}{1.\ 2} y^{mh-2}z^2 + \frac{mh(mh-d)(mh-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{mh-3}z^3 \ldots$$

und

$$\mathrm{Log}(y^h + \frac{h}{1} y^{h-1}z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2} y^{h-2}z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{h-3}z^3 \ldots)$$
$$= \mathrm{Log}(y^h) + \frac{hz}{y} - \frac{dhz^2}{2y^2} + \frac{d^2hz^3}{3y^3} - \frac{d^3hz^4}{4y^4} + \ldots$$

2) Für $f = 1$, $c = -1$

$$(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta})^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{e} a^m x^{m\alpha+\beta}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{e.\ 2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m(m-1)(m-2)}{e\ \ 2e.\ \ 3e} a^m x^{m\alpha+3\beta}$$
$$+ \ldots = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{1} \cdot \frac{a^m}{e} x^{m\alpha+\beta} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{a^m}{e^2} x^{m\alpha+2\beta}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{a^m}{e^3} x^{m\alpha+3\beta} + \ldots \text{ und}$$

$$\mathrm{Log}(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta}) = \mathrm{Log}(ax^\alpha) + \frac{x^\beta}{e} - \frac{x^{2\beta}}{2e^2} + \frac{x^{3\beta}}{3e^3} - \frac{x^{4\beta}}{4e^4} + \ldots$$

oder das Binomialtheorem

b) Siehe mein Programm (Theorema binomiale ex fimplicifimis Analyfeos finitorum fontibus vniuerfaliter demonftratum). §. VIII Formel 8) Seite 14.

3) Für $c = a$

$$\ldots + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$\frac{af^4}{1.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots)^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e} a^m x^{m\alpha+\beta}$$

$$\frac{m^2f^2}{1.2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m^3f^3}{e.2e.3e} a^m x^{m\alpha+3\beta} + \ldots$$

$$+ \ldots$$

$$(ax^\alpha + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$\frac{af^4}{e.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots) = \text{Log}(ax^\alpha) + \frac{f}{e} x^\beta \text{ oder}$$

Exponentialreihen.

4. Man setze in den Formeln 1) $a=f=1$, $c=e=2$, $g=3$ man hat

$$(m+1)p^m x(n+1)+(m+2n-1)p^{m+1}xn=(m+2n+1)p^{m+1}x(n+1)$$

und $p^{-1}x(n+1)+2(n-1)\text{Log}\,p.xn = 2n\,\text{Log}\,p.x(n+1)$

die Scale

$$p\,[\,1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{9}\ \ldots\ .\,]$$

Diese Formel dient zur leichten Berechnung der Coefficienten die herauskommen, wenn man die logarithmische Reihe

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

und die, zur Rectification des Kreises gehörige,

$$\text{Arc. tang}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 \ldots$$

zu Potenzen erhebt. Denn man ſetze in der erſten Formel von B) m = 1 und man hat

$$2p^2x(n+1) + 2np^2xn = (2n+2)p^2x(n+1), \text{ oder}$$

$$p^1x(n+1) + np^2xn = (n+1)p^2x(n+1); \text{ alſo, wenn}$$

man ſtatt n, der Reihe nach 1, 2, 3, 4 ... ſetzt

$$2\ p^2x2 = p^2x1 + p^1x2 = 1 + \tfrac{1}{3}$$

$$3\ p^2x3 = 2p^2x2 + p^1x3 = 2p^2x2 + \tfrac{1}{5}$$

$$4\ p^2x4 = 3p^2x3 + p^1x4 = 3p^2x3 + \tfrac{1}{7}$$

$$5\ p^2x5 = 4p^2x4 + p^1x5 = 4p^2x4 + \tfrac{1}{9} \text{ u. ſ. w}$$

Man findet alſo

$$2\,p^2x2 = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}$$

$$3\,p^2x3 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{23}{15}$$

$$4\,p^2x4 = \frac{23}{15} + \tfrac{1}{7} = \frac{176}{3\cdot5\cdot7}$$

$$5\,p^2x5 = \frac{176}{3\,5\cdot7} + \tfrac{1}{9} = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7}$$

$$6\,p^2x6 = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7} + \tfrac{1}{11} = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11}$$

$$7\,p^2x7 = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11} + \tfrac{1}{13} = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

$$8\,p^2x8 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} + \tfrac{1}{15} = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

$$9\,p^2x9 = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} + \tfrac{1}{17} = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}$$

$$10\,p^2x10 = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17} + \tfrac{1}{19} = \frac{31037876}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}$$

$$11\,p^2 \times 11 = \frac{31037876}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{1}{2^{11}} = \frac{31730711}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$$

$$12\,p^2 \times 12 = \frac{31730711}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{1}{2^{13}} = \frac{744355888}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

$$13\,p^2 \times 13 = \frac{744355888}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} + \frac{1}{2^{17}} = \frac{37887\,0701}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

$$14\,p^2 \times 14 = \frac{37887\,0701}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} + \frac{1}{2^{17}} = \frac{1155203\,2628}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

also

$$p^2 \times 1 = 1$$

$$p^2 \times 2 = \tfrac{4}{3} : 2 = \tfrac{2}{3}$$

$$p^2 \times 3 = \frac{23}{3 \cdot 5} : 3 = \frac{23}{3^2 \cdot 5}$$

$$p^2 \times 4 = \frac{176}{3 \cdot 5 \cdot 7} : 4 = \frac{44}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^2 \times 5 = \frac{563}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} : 5 = \frac{563}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$$

$$p^2 \times 6 = \frac{6508}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} : 6 = \frac{3254}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$$

$$p^2 \times 7 = \frac{88069}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} : 7 = \frac{88069}{3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

$$p^2 \times 8 = \frac{91072}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} : 8 = \frac{11384}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$$

$$p^2 \times 9 = \frac{1593269}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} : 9 = \frac{1593269}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$$

$$p^2\varkappa 10 = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 10 = \frac{15518938}{3^2.5^2.7.11.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11^2.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 12 = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23} : 12 = \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$p^2\varkappa 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23} : 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$p^2\varkappa 14 = \frac{115520326 28}{3^3.5^2.7.11.13.17.19.23} : 14 = \frac{5776016314}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19.23}$$

Hieraus erhellet auch, daß

$p^2\varkappa 1 = \frac{1}{1} : 1$; $p^2\varkappa 2 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}) : 2$; $p^2\varkappa 3 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) : 3$ u. s. w.

Man setze nun in der ersten Formel von B) $m = 2$, und man hat

$$3p^2\varkappa(n+1) + (2n+1)p^3\varkappa n = (2n+3)p^3\varkappa(n+1) \text{ oder}$$

$$p^2\varkappa(n+1)\,\frac{2n+1}{3}.\,p^3\varkappa n = \frac{2n+3}{3}.\,p^3\varkappa(n+1)$$

also, wenn man statt n nach und nach 1, 2, 3, 4 ... setzt

$\frac{5}{3}\ p^3\varkappa 2 = \frac{3}{3}\ p^3\varkappa 1 + p^2\varkappa 2 = 1 + p^2\varkappa 2$

$\frac{7}{3}\ p^3\varkappa 3 = \frac{5}{3}\ p^3\varkappa 2 + p^2\varkappa 3$

$\frac{9}{3}\ p^3\varkappa 4 = \frac{7}{3}\ p^3\varkappa 3 + p^2\varkappa 4$

$\frac{11}{3}\ p^3\varkappa 5 = \frac{9}{3}\ p^3\varkappa 4 + p^2\varkappa 5$ u. s. w.

Man findet alſo

$\frac{5}{3}\ p^3 x2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{7}{3}\ p^3 x3 = \frac{5}{3} + \frac{23}{3^2 \cdot 5} = \frac{98}{3^2 \cdot 5}$

$\frac{9}{3}\ p^3 x4 = \frac{98}{3^2 \cdot 5} + \frac{44}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$\frac{11}{3}\ p^3 x5 = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{563}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$

$\frac{13}{3}\ p^3 x6 = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{3254}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

$\frac{15}{3}\ p^3 x7 = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{88069}{3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{17}{3}\ p^3 x8 = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{11384}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{19}{3}\ p^3 x9 = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1593269}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

$\frac{21}{3}\ p^3 x10 = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} + \frac{15518938}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\ 17 \cdot 19}$

$= \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$\frac{23}{3}\ p^3 x11 = \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{31730711}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$= \frac{223945554290}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$$\tfrac{25}{3}\, p^3 \varkappa\, 12 = \frac{223945554290}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13\, 17 \cdot 19} + \frac{186088972}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

$$= \frac{5365680511330}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13\, 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

$$\tfrac{27}{3}\, p^3 \varkappa\, 13 = \frac{5365680511330}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} + \frac{3788707301}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

$$= \frac{72379420806883}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}$$

also

$$p^3 \varkappa\, 1 = 1$$

$$p^3 \varkappa\, 2 = 1$$

$$p^3 \varkappa\, 3 = \frac{14}{3 \cdot 5}$$

$$p^3 \varkappa\, 4 = \frac{818}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^3 \varkappa\, 5 = \frac{141}{5^2 \cdot 7}$$

$$p^3 \varkappa\, 6 = \frac{13063}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$$

$$p^3 \varkappa\, 7 = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

$$p^3 \varkappa\, 8 = \frac{1057052}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$$

$$p^3 \varkappa\, 9 = \frac{4651811}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17}$$

$$p^3x\ 10 = \frac{778001383}{3^9.7^3.11.13.17.19}$$

$$p^3x\ 11 = \frac{1947352646}{3^3.5.7^2.11^2.13.17.19}$$

$$p^3x\ 12 = \frac{1073136102266}{3^3.5^3.7^2.11^2.13.17.19.23}$$

$$p^3x\ 13 = \frac{72379420806883}{3^6.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

Auf diese Art kann man alle Coefficienten ganzer positiver Potenzen von der gedachten Reihe ohne Schwierigkeit berechnen. Zur Probe, daß man sich nicht verrechnet hat, kann die Bemerkung, deren Richtigkeit leicht in die Augen fällt, dienen, daß in dem Werthe des $(n+1)$ten Coefficienten jeder ganzen positiven oder negativen Potenz der Nenner keine Primzahl als Factor enthalten kann, welche 2, oder höher als $2n+1$ ist. So fand sich z. B. bey der Berechnung der Coefficienten der 3ten Potenz, daß

$\frac{19}{3}\ p^3x9 = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17}$. Hieraus folgt, daß

$p^3x\ 9 = \frac{972228499}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19}$. Da aber nach der gedachten Regel im Nenner keine Primzahl höher als 17 vorkommen kann, so muß der Zähler des gedachten Bruches, oder die Zahl 972228499, sich durch 19 ohne Rest dividiren und dadurch die 19 aus dem Nenner wegschaffen lassen.

5. Um die Coefficienten ganzer negativer Potenzen zu berechnen, stelle man folgende Betrachtung an:

Man ziehe die letzte Formel von der ersten ab, und man erhält

$$a(g-e)p^m x(l+1) = \frac{(g-e)(m+1)+le}{m+1} p^{m+1} x(l+1)$$

$$- \frac{f(m+1)+(l-1)c}{m+1} p^{m+1} xl$$

oder, wenn man statt l durchgängig n schreibt,

I. $(m+1)a(g-e)p^m x(n+1) + [f(m+1)+(n-1c]p^{m+1}xn$

$$= [(g-e)(m+1)+ne]\, p^{m+1}x(n+1)$$

und $a(g-e)p^{-1}x(n+1) + (n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.xn = ne\,\mathrm{Log}\,p.x(n+1)$ [a])

für die Scale

$$p[a, \frac{af}{g}, \frac{af(f+c)}{g(g+e)}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{g(g+e)(g+2e)}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{g(g+e)(g+2e)(g+3e)}, \ldots]$$

3. Man setze in den Formeln I) $g = e$, und man hat

A) $[f(m+1)+(n-1)c]\,p^{m+1}xn = ne\,p^{m+1}x(n+1)$ und $(n-1)c\,\mathrm{Log}\,p.xn = ne\,\mathrm{Log}\,p.x(n+1)$ für die Scale

$$p[a, \frac{af}{e}, \frac{af(f+c)}{e.2e}, \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.2e.3e}, \frac{af(f+c)(f+2c)(f+3c)}{e.2e.3e.4e}, \ldots]$$

und hieraus folgt, für eben diese Scale,

a) Denn der Werth von $\frac{p^m x(n+1)}{m}$, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, verwandelt sich für $m=0$, in $\mathrm{Log}\,p\,x(n+1)$. Da sowohl in meiner Abhandlung (Formulae de serierum reversione demonstratio vniuersalis) Seite 36 unten, als auch in gegenwärtigem Aufsatze, logarithmische Lokalausdrücke vorkommen, so ist zu Ende dieses Aufsatzes eine Erläuterung derselben beygefügt worden, welche, im Falle man hier anstieße, vorher nachgelesen werden kann.

$p^m x1 = a^m$; $p^m x2 = \frac{mf}{e} a^m$; $p^m x3 = \frac{mf(mf+c)}{e.\ 2e} a^m$; u. allgemein

$$p^m x(n+1) = \frac{mf(mf+c)(mf+2c)(mf+3c)\ldots(mf+(n-1)c)}{e.\ 2e.\ 3e.\ 4e.\ \ldots\ ne} a^m;$$

und

$$L.p.x2 = \frac{f}{e}; L.p.x3 = \frac{cf}{2e^2}; \text{Log } p.x4 = \frac{c^2 f}{3e^3}; \text{Log} p.x5 = \frac{c^3 f}{4e^4};$$

allgemein, $\text{Log } p.x(n+1) = \frac{c^{n-1} f}{ne^n}$

Es ist demnach

$$\left(ax^\alpha + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e} x^{\alpha+3\beta} + \ldots\right)^m$$

$$= a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e} a^m x^{m\alpha+\beta} + \frac{mf\,(mf+c)}{e.\ 2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \ldots$$

und

$$\text{Log}\left(ax^\alpha + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af(f+c)}{e.\ 2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af(f+c)(f+2c)}{e.\ 2e.\ 3e} x^{\alpha+3\beta} \ldots\right)$$

$$= \text{Log}(ax^\alpha) + \frac{f}{e} x^\beta + \frac{cf}{2e^2} x^{2\beta} + \frac{c^2 f}{3e^3} x^{3\beta} + \frac{c^3 f}{4e^4} x^{4\beta} + \ldots$$

Hieraus ergeben sich folgende besondere Fälle:

1) Für $a = y^h$, $c = -d$, $e = \beta = 1$, $f = h$, $x = \frac{z}{y}$, $\alpha = 0$

$$\left(y^h + \frac{h}{1} y^{h-1} z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2} y^{h-2} z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{h-3} z^3 + \ldots\right)^m$$

$$= y^{mh} + \frac{mh}{1} y^{mh-1}z + \frac{mh(mh-d)}{1.\ 2} y^{mh-2}z^2 + \frac{mh(mh-d)(mh-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{mh-3}z^3 \ldots$$

und

$$\mathrm{Log}(y^h + \frac{h}{1} y^{h-1}z + \frac{h(h-d)}{1.\ 2} y^{h-2}z^2 + \frac{h(h-d)(h-2d)}{1.\ 2.\ 3} y^{h-3}z^3 + \ldots$$

$$= \mathrm{Log}(y^h) + \frac{hz}{y} - \frac{dhz^2}{2y^2} + \frac{d^2hz^3}{3y^3} - \frac{d^3hz^4}{4y^4} + \ldots$$

2) Für $f = 1$, $c = -1$

$$(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta})^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{e} a^m x^{m\alpha+\beta} + \frac{m(m-1)}{e.\ 2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m(m-1)(m-2)}{e\ \ 2e.\ \ 3e} a^m x^{m\alpha+3\beta}$$

$$+ \ldots = a^m x^{m\alpha} + \frac{m}{1} \cdot \frac{a^m}{e} x^{m\alpha+\beta} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{a^m}{e^2} x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{a^m}{e^3} x^{m\alpha+3\beta} + \ldots \text{ und}$$

$$\mathrm{Log}(ax^\alpha + \frac{a}{e} x^{\alpha+\beta}) = \mathrm{Log}(ax^\alpha) + \frac{x^\beta}{e} - \frac{x^{2\beta}}{2e^2} + \frac{x^{3\beta}}{3e^3} - \frac{x^{4\beta}}{4e^4} \ldots$$

oder das Binomialtheorem

b) Siehe mein Programm (Theorema binomiale ex simpliciſſimis Analyſeos finitorum fontibus vniuerſaliter demonſtratum). §. VIII Formel 8) Seite 14.

3) Für c = a

$$x^{\alpha} + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$\frac{af^4}{e.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots)^m = a^m x^{m\alpha} + \frac{mf}{e} a^m x^{m\alpha+\beta}$$

$$\frac{m^2f^2}{e.2e} a^m x^{m\alpha+2\beta} + \frac{m^3f^3}{e.2e.3e} a^m x^{m\alpha+3\beta} + \ldots$$

$$g\,(ax^{\alpha} + \frac{af}{e} x^{\alpha+\beta} + \frac{af^2}{e.2e} x^{\alpha+2\beta} + \frac{af^3}{e.2e.3e} x^{\alpha+3\beta}$$

$$\frac{af^4}{e.2e.3e.4e} x^{\alpha+4\beta} \ldots) = \mathrm{Log}\,(ax^{\alpha}) + \frac{f}{e} x^{\beta} \text{ oder}$$

Exponentialreihen.

4. Man ſetze in den Formeln I) a = f = 1, c = e = 2, g = 3 und man hat

$$(m+1)p^m x(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1} xn = (m+2n+1)p^{m+1} x(n+1)$$

und $p^{-1}x(n+1) + 2(n-1)\,\mathrm{Log}\,p.xn = 2n\,\mathrm{Log}\,p.x(n+1)$

für die Scale

$$p\,[\,1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{9}\ \ldots\ .\,]$$

Dieſe Formel dient zur leichten Berechnung der Coefficienten die herauskommen, wenn man die logarithmiſche Reihe

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

oder die, zur Rectification des Kreiſes gehörige,

$$\mathrm{Arc.\,tang}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 \ldots$$

zu Potenzen erhebt. Denn man setze in der ersten Formel von B) $m = 1$ und man hat

$$2p^1x(n+1) + 2np^2xn = (2n+2)p^2x(n+1), \text{ oder}$$

$$p^1x(n+1) + np^2xn = (n+1)p^2x(n+1); \text{ also, wenn}$$

man statt n, der Reihe nach 1, 2, 3, 4 ... setzt

$$2\ p^2x2 = p^2x1 + p^1x2 = 1 + \tfrac{1}{3}$$

$$3\ p^2x3 = 2p^2x2 + p^1x3 = 2p^2x2 + \tfrac{1}{5}$$

$$4\ p^2x4 = 3p^2x3 + p^1x4 = 3p^2x3 + \tfrac{1}{7}$$

$$5\ p^2x5 = 4p^2x4 + p^1x5 = 4p^2x4 + \tfrac{1}{9} \text{ u. s. w}$$

Man findet also

$$2\,p^2x2 = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}$$

$$3\,p^2x3 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{23}{15}$$

$$4\,p^2x4 = \frac{23}{15} + \tfrac{1}{7} = \frac{176}{3.5.7}$$

$$5\,p^2x5 = \frac{176}{3\,5.7} + \tfrac{1}{9} = \frac{563}{3^2.5.7}$$

$$6\,p^2x6 = \frac{563}{3^2.5.7} + \tfrac{1}{11} = \frac{6508}{3^2.5.7.11}$$

$$7\,p^2x7 = \frac{6508}{3^2.5.7.11} + \tfrac{1}{13} = \frac{88069}{3^2.5.7.11.13}$$

$$8\,p^2x8 = \frac{88069}{3^2.5.7.11.13} + \tfrac{1}{15} = \frac{91072}{3^2.5.7.11.13}$$

$$9\,p^2x9 = \frac{91072}{3^2.5.7.11.13} + \tfrac{1}{17} = \frac{1593269}{3^2.5.7.11.13.17}$$

$$10p^2x10 = \frac{1593269}{3^2.5.7.11.13.17} + \tfrac{1}{19} = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19}$$

$$11\,p^2\varkappa\,11 = \frac{31037876}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19} + \frac{1}{2\cdot11} = \frac{31730711}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}$$

$$12\,p^2\varkappa\,12 = \frac{31730711}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19} + \frac{1}{2\cdot13} = \frac{744355888}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$13\,p^2\varkappa\,13 = \frac{744355888}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23} + \frac{1}{2\cdot13} = \frac{3788707301}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$14\,p^2\varkappa\,14 = \frac{3788707301}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23} + \frac{1}{2\cdot17} = \frac{115520326\,28}{3^3\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

also

$$p^2\varkappa\ 1 = 1$$

$$p^2\varkappa\ 2 = \tfrac{4}{3} : 2 = \tfrac{2}{3}$$

$$p^2\varkappa\ 3 = \frac{23}{3\cdot5} : 3 = \frac{23}{3^2\cdot5}$$

$$p^2\varkappa\ 4 = \frac{176}{3\cdot5\cdot7} : 4 = \frac{44}{3\cdot5\cdot7}$$

$$p^2\varkappa\ 5 = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7} : 5 = \frac{563}{3^2\cdot5^2\cdot7}$$

$$p^2\varkappa\ 6 = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11} : 6 = \frac{3254}{3^3\cdot5\cdot7\cdot11}$$

$$p^2\varkappa\ 7 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} : 7 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7^2\cdot11\cdot13}$$

$$p^2\varkappa\ 8 = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} : 8 = \frac{11384}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

$$p^2\varkappa\ 9 = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17} : 9 = \frac{1593269}{3^4\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}$$

$$p^2\varkappa 10 = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 10 = \frac{15518938}{3^2.5^2.7.11.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11^2.13.17.19}$$

$$p^2\varkappa 12 = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23} : 12 = \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$p^2\varkappa 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23} : 13 = \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$p^2\varkappa 14 = \frac{115520326 28}{3^3.5^2.7.11.13.17.19.23} : 14 = \frac{5776016314}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19.23}$$

Hieraus erhellet auch, daß

$p^2\varkappa 1 = \frac{1}{1} : 1$; $p^2\varkappa 2 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}) : 2$; $p^2\varkappa 3 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) : 3$ u. s. w.

Man setze nun in der ersten Formel von B) $m = 2$, und man hat

$3p^2\varkappa(n+1) + (2n+1)p^3\varkappa n = (2n+3)p^3\varkappa(n+1)$ oder

$$p^2\varkappa(n+1)\,\frac{2n+1}{3}.\,p^3\varkappa n = \frac{2n+3}{3}.\,p^3\varkappa(n+1)$$

also, wenn man statt n nach und nach 1, 2, 3, 4 ... setzt

$\frac{5}{3}\,p^3\varkappa 2 = \frac{3}{3}\,p^3\varkappa 1 + p^2\varkappa 2 = 1 + p^2\varkappa 2$

$\frac{7}{3}\,p^3\varkappa 3 = \frac{5}{3}\,p^3\varkappa 2 + p^2\varkappa 3$

$\frac{9}{3}\,p^3\varkappa 4 = \frac{7}{3}\,p^3\varkappa 3 + p^2\varkappa 4$

$\frac{11}{3}\,p^3\varkappa 5 = \frac{9}{3}\,p^3\varkappa 4 + p^2\varkappa 5$ u. s. w.

Man findet also

$\frac{5}{3}\ p^3 x 2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{7}{3}\ p^3 x 3 = \frac{5}{3} + \frac{23}{3^2 \cdot 5} = \frac{98}{3^2 \cdot 5}$

$\frac{9}{3}\ p^3 x 4 = \frac{98}{3^2 \cdot 5} + \frac{44}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$\frac{11}{3}\ p^3 x 5 = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{563}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$

$\frac{13}{3}\ p^3 x 6 = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{3254}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

$\frac{15}{3}\ p^3 x 7 = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{88069}{3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{17}{3}\ p^3 x 8 = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{11384}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{19}{3}\ p^3 x 9 = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1593269}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

$\frac{21}{3}\ p^3 x 10 = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} + \frac{15518938}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\ 17 \cdot 19}$

$= \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$\frac{23}{3}\ p^3 x 11 = \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{31730711}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$= \frac{223945554290}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$$\tfrac{25}{3}\,p^3\varkappa\,12 = \frac{223945554290}{3^4.5^2.7^2.11^2.13\,17.19} + \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$= \frac{5365680511330}{3^4.5^2.7^2.11^2.13\,17.19.23}$$

$$\tfrac{27}{3}\,p^3\varkappa 13 = \frac{5365680511330}{3^4.5^2.7^2.11^2.13.17.19.23} + \frac{3788707301}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$= \frac{72379420806883}{3^4.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

also

$$p^3\varkappa\ 1 = 1$$

$$p^3\varkappa\ 2 = 1$$

$$p^3\varkappa\ 3 = \frac{14}{3.5}$$

$$p^3\varkappa\ 4 = \frac{818}{3^3.5.7}$$

$$p^3\varkappa\ 5 = \frac{141}{5^2.7}$$

$$p^3\varkappa\ 6 = \frac{13063}{3^2.5^2.7.11}$$

$$p^3\varkappa\ 7 = \frac{16774564}{3^3.5^3.7^2.11.13}$$

$$p^3\varkappa\ 8 = \frac{1057052}{3^2.5^2.7^2.11.13}$$

$$p^3\varkappa\ 9 = \frac{4651811}{3^3.5^2.7^2.13.17}$$

$$p^3x\ 10 = \frac{778001383}{3^4.7^3.11.13.17.19}$$

$$p^3x\ 11 = \frac{1947352646}{3^3.5.7^2.11^2.13.17.19}$$

$$p^3x\ 12 = \frac{107313610226 6}{3^3.5^3.7^2.11^2.13.17.19.23}$$

$$p^3x\ 13 = \frac{72379420806883}{3^6.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

Auf diese Art kann man alle Coefficienten ganzer positiver Potenzen von der gedachten Reihe ohne Schwierigkeit berechnen. Zur Probe, daß man sich nicht verrechnet hat, kann die Bemerkung, deren Richtigkeit leicht in die Augen fällt, dienen, daß in dem Werthe des (n+1)ten Coefficienten jeder ganzen positiven oder negativen Potenz der Nenner keine Primzahl als Factor enthalten kann, welche 2, oder höher als 2n+1 ist. So fand sich z. B. bey der Berechnung der Coefficienten der 3ten Potenz, daß

$\frac{19}{3}\ p^3x9 = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17}$. Hieraus folgt, daß

$p^3x\ 9 = \frac{972228499}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19}$. Da aber nach der gedachten Regel im Nenner keine Primzahl höher als 17 vorkommen kann, so muß der Zähler des gedachten Bruches, oder die Zahl 972228499, sich durch 19 ohne Rest dividiren und dadurch die 19 aus dem Nenner wegschaffen lassen.

5. Um die Coefficienten ganzer negativer Potenzen zu berechnen, stelle man folgende Betrachtung an:

Es sey

$z = T^{-1} - \frac{1}{3} T^{-3} + \frac{1}{5} T^{-5} - \frac{1}{7} T^{-7} + \frac{1}{9} T^{-9} \ldots$ so ist nach der Umkehrungsformel

$$T = p^{1} \times 1\, z^{-1} + p^{-1} \times 2\, z - \tfrac{1}{3} p^{-3} \times 3 z^{3} + \tfrac{1}{5} p^{-5} \times 4 z^{5} \ldots$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} p^{1-2n} \times (n+1) z^{2n-1} \ldots ; T^{-1} = p^{-1} \times 1 z - \tfrac{1}{3} p^{-3} \times 2 z^{3}$$

$$+ \tfrac{1}{5} p^{-5} \times 3 z^{5} \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} p^{1-2n} \times (n)\, z^{2n-1} \ldots .$$

Nun ist T die Cotangente, und T^{-1} die Tangente von z, mithin, wie man aus andern Gründen weis,

$$T = z^{-1} - \frac{2^2 \mathfrak{A}}{1.2} z - \frac{2^4 \mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^3 \ldots - \frac{2^{2n} \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} z^{2n-1} \ldots$$

$$T^{-1} = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}}{1.2} z + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^3 + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6} z^5 \ldots$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} z^{2n-1} \ldots .$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ... die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Also ist

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} p^{1-2n} \times (n+1) = - \frac{2^{2n} \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} \text{ und}$$

$$(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} p^{1-2n} \times n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) \overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n}$$

mithin $p^{1-2n} \times (n+1) = - \dfrac{p^{1-2n} \times n}{2^{2n} - 1}$ (8)

Nun übersieht man ohne Schwierigkeit daß

$p^{-1}\times 1 = 1$, $p^{-2}\times 1 = 1$, $p^{-3}\times 1 = 1$

$p^{-1}\times 2 = -\frac{1}{2}$, $p^{-2}\times 2 = -\frac{2}{3}$, $p^{-3}\times 2 = -1$, also, wenn man in der Formel (♀) $n = 2$ setzt

$$p^{-3}\times 3 = -\frac{p^{-3}\times 2}{15} = \frac{1}{3\cdot 5}$$

Setzt man nun in der ersten Formel von B) in (4) $n = 2$, so hat man

$\frac{m+1}{m+5} p^{m}\times 3 + \frac{m+3}{m+5} p^{m+1}\times 2 = p^{m+1}\times 3$, also

$p^{-2}\times 3 = -p^{-3}\times 3 = -\frac{1}{3\cdot 5}$ für $m = -3$

$p^{-1}\times 3 = -\frac{1}{3}p^{-2}\times 3 + \frac{1}{3}p^{-1}\times 2 = \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^2} = -\frac{4}{3^2\cdot 5}$ für $m = -2$

Man setze in der ersten Formel von B) $m = -4$ so ist

$$p^{-4}\times(n+1) = -\frac{2n-3}{3} p^{-3}\times(n+1) + \frac{2n-5}{3} p^{-3}\times n \text{ also}$$

$p^{-4}\times 1 = p^{-3}\times 1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-4}\times 2 = \frac{1}{3}p^{-3}\times 2 - p^{-3}\times 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{3}{4}$, für $n = 1$

$p^{-4}\times 3 = -\frac{1}{3}p^{-3}\times 3 - \frac{1}{3}p^{-3}\times 2 = -\frac{1}{3^2\cdot 5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{3^2\cdot 5}$ für $n = 2$

Man setze in der ersten Formel von B) $m = -5$ so ist

$$p^{-5}\times(n+1) = -\frac{2n-4}{4} p^{-4}\times(n+1) + \frac{2n-6}{4} p^{-4}\times n$$

also

$p^{-5}x\,1 = p^{-4}x\,1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-5}x\,2 = \frac{2}{4}p^{-4}x\,2 - \frac{4}{4}p^{-4}x\,1 = -\frac{2}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$ für $n = 1$

$p^{-5}x\,3 = -\frac{2}{4}p^{-4}x\,2 = \frac{2}{3}$ für $n = 2$, und wenn man in der Formel (♀) $n = 3$ setzt

$$p^{-5}x\,4 = -\frac{p^{-5}x\,3}{2^6 - 1} = -\frac{2}{3^3 \cdot 7}$$

Nun setze man in B) $n = 3$, so ist

$$\frac{m+1}{m+7}p^m x\,4 + \frac{m+5}{m+7}p^{m+1}x\,3 = p^{m+1}x\,4$$ also

für $m = -5, -4, -3, -2$,

$p^{-4}x\,4 = -\frac{4}{3}p^{-5}x\,4 = \frac{4}{3^3 \cdot 7}$

$$p^{-3}x\,4 = -\frac{3}{2}p^{-4}x\,4 + \frac{1}{2}p^{-3}x\,3 = -\frac{4}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-2}x\,4 = -\frac{2}{4}p^{-3}x\,4 + \frac{2}{4}p^{-3}x\,3 = -\frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{32}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-1}x\,4 = -\frac{1}{1}p^{-2}x\,4 + \frac{3}{1}p^{-1}x\,3 = \frac{32}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{4}{3 \cdot 5^2} = -\frac{44}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Man setze nun in B) $m = -6$ so hat man

$$p^{-6}x(n+1) = -\frac{2n-5}{5}p^{-5}x(n+1) + \frac{2n-7}{5}p^{-5}x\,n$$

also für $n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-6}x\,1 = p^{-5}x\,1 = 1$

$p^{-6}x\,2 = \frac{3}{2}p^{-5}x\,2 - p^{-5}x\,1 = -1 - 1 = -2$

$$p^{-6}x3 = \tfrac{1}{7}p^{-5}x3 - \tfrac{3}{7}p^{-4}x2 = \frac{2}{3\cdot5} + 1 = \frac{17}{3\cdot5}$$

$$p^{-6}x4 = -\tfrac{1}{7}p^{-5}x4 - \tfrac{1}{7}p^{-4}x3 = \frac{2}{3^2\cdot5\cdot7} - \frac{2}{3\cdot5} = -\frac{124}{3^2\cdot5\cdot7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -7$ ſo hat man

$$p^{-7}x(n+1) = -\frac{2n-6}{6}p^{-6}x(n+1) + \frac{2n-8}{6}p^{-6}xn$$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-7}x\,1 = p^{-6}x\,1 = 1$

$p^{-7}x\,2 = \frac{4}{6}p^{-6}x\,2 - p^{-6}x\,1 = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$

$p^{-7}x\,3 = \frac{2}{6}p^{-6}x\,3 - \frac{4}{6}p^{-5}x\,2 = \frac{17}{3^2\cdot5} + \frac{4}{3} = \frac{77}{3^2\cdot5}$

$p^{-7}x\,4 = -\frac{2}{6}p^{-6}x\,3 = -\frac{17}{3^2\cdot5}$

Man ſetze nun in (♀) $n = 4$ ſo iſt

$$p^{-7}x\,5 = -\frac{p^{-7}x\,4}{2^8-1} = \frac{1}{3^1\cdot5^2}$$

Man ſetze nun in B) $n = 4$ ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+9}p^{m}x\,5 + \frac{m+7}{m+9}p^{m+1}x\,4 = p^{m+1}x\,5$$ und für

$m = -7, -6, -5, -4, -3, -2$

$p^{-6}x\,5 = -\frac{6}{2}p^{-7}x\,5 = -\frac{1}{3^2\cdot5^2}$

$p^{-5}x\,5 = -\frac{5}{4}p^{-6}x\,5 + \frac{1}{4}p^{-5}x\,4 = \frac{1}{3^1\cdot5} - \frac{2}{3^4\cdot7} = \frac{11}{3^4\cdot5\cdot7}$

zu Potenzen erhebt. Denn man setze in der ersten Formel von B) $m = 1$ und man hat

$$2p^1x(n+1) + 2np^2xn = (2n+2)p^2x(n+1), \text{ oder}$$

$p^1x(n+1) + np^2xn = (n+1)p^2x(n+1)$; also, wenn man statt n, der Reihe nach 1, 2, 3, 4 ... setzt

$$2\ p^2x2 = p^2x1 + p^1x2 = 1 + \tfrac{1}{3}$$
$$3\ p^2x3 = 2p^2x2 + p^1x3 = 2p^2x2 + \tfrac{1}{5}$$
$$4\ p^2x4 = 3p^2x3 + p^1x4 = 3p^2x3 + \tfrac{1}{7}$$
$$5\ p^2x5 = 4p^2x4 + p^1x5 = 4p^2x4 + \tfrac{1}{9} \text{ u. s. w}$$

Man findet also

$$2p^2x2 = 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}$$
$$3p^2x3 = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{23}{15}$$
$$4p^2x4 = \frac{23}{15} + \tfrac{1}{7} = \frac{176}{3.5.7}$$
$$5p^2x5 = \frac{176}{3.5.7} + \tfrac{1}{9} = \frac{563}{3^2.5.7}$$
$$6p^2x6 = \frac{563}{3^2.5.7} + \tfrac{1}{11} = \frac{6508}{3^2.5.7.11}$$
$$7p^2x7 = \frac{6508}{3^2.5.7.11} + \tfrac{1}{13} = \frac{88069}{3^2.5.7.11.13}$$
$$8p^2x8 = \frac{88069}{3^2.5.7.11.13} + \tfrac{1}{15} = \frac{91072}{3^2.5.7.11.13}$$
$$9p^2x9 = \frac{91072}{3^2.5.7.11.13} + \tfrac{1}{17} = \frac{1593269}{3^2.5.7.11.13.17}$$
$$10p^2x10 = \frac{1593269}{3^2.5.7.11.13.17} + \tfrac{1}{19} = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19}$$

$$11\,p^2\varkappa\,11 = \frac{31037876}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19} + \tfrac{1}{21} = \frac{31730711}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}$$

$$12\,p^2\varkappa\,12 = \frac{31730711}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19} + \tfrac{1}{23} = \frac{744355888}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$13\,p^2\varkappa 13 = \frac{744355888}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23} + \tfrac{1}{25} = \frac{37887073 01}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$14\,p^2\varkappa 14 = \frac{37887073 01}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23} + \tfrac{1}{27} = \frac{1155203262 8}{3^3\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

also

$p^2\varkappa\ 1 = 1$

$p^2\varkappa\ 2 = \frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3}$

$$p^2\varkappa\ 3 = \frac{23}{3\cdot5} : 3 = \frac{23}{3^2\cdot5}$$

$$p^2\varkappa\ 4 = \frac{176}{3\cdot5\cdot7} : 4 = \frac{44}{3\cdot5\cdot7}$$

$$p^2\varkappa\ 5 = \frac{563}{3^2\cdot5\cdot7} : 5 = \frac{563}{3^2\cdot5^2\cdot7}$$

$$p^2\varkappa\ 6 = \frac{6508}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11} : 6 = \frac{3254}{3^3\cdot5\cdot7\cdot11}$$

$$p^2\varkappa\ 7 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} : 7 = \frac{88069}{3^2\cdot5\cdot7^2\cdot11\cdot13}$$

$$p^2\varkappa\ 8 = \frac{91072}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13} : 8 = \frac{11384}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

$$p^2\varkappa\ 9 = \frac{1593269}{3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17} : 9 = \frac{1593269}{3^4\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}$$

$$p^2x\,10 = \frac{31037876}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 10 = \frac{15518938}{3^2.5^2.7.11\,13.17.19}$$

$$p^2x\,11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11.13.17.19} : 11 = \frac{31730711}{3^2.5.7.11^2.13.17.19}$$

$$p^2x\,12 = \frac{744355888}{3^2.5.7.11.13.17.19.23} : 12 = \frac{186088972}{3^3.5.7.11.13.17.19.23}$$

$$p^2x\,13 = \frac{37887073\,01}{3^2.5^2.7.11.13.17.19.23} : 13 = \frac{37887073\,01}{3^2.5^2.7.11.13^2.17.19.23}$$

$$p^2x\,14 = \frac{1155203262\,8}{3^3.5^2.7.11.13\,17.19.23} : 14 = \frac{5776016314}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19.23}$$

Hieraus erhellet auch, daß

$p^3x1 = \frac{1}{1} : 1$; $p^2x2 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}) : 2$; $p^2x3 = (\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) : 3$ u. s. w.

Man setze nun in der ersten Formel von B) $m = 2$, und man hat

$$3p^2x(n+1) + (2n+1)p^3xn = (2n+3)p^3x(n+1) \text{ oder}$$

$$p^2x(n+1)\,\frac{2n+1}{3}.\,p^3xn = \frac{2n+3}{3}.\,p^3x(n+1)$$

also, wenn man statt n nach und nach 1, 2, 3, 4 ... setzt

$\frac{5}{3}\ p^3x2 = \frac{3}{3}\ p^3x1 + p^2x2 = 1 + p^2x2$

$\frac{7}{3}\ p^3x3 = \frac{5}{3}\ p^3x2 + p^2x3$

$\frac{9}{3}\ p^3x4 = \frac{7}{3}\ p^3x3 + p^2x4$

$\frac{11}{3}\ p^3x5 = \frac{9}{3}\ p^3x4 + p^2x5$ u. s. w.

Man findet also

$\frac{5}{3}\ p^3 x 2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$\frac{7}{3}\ p^3 x 3 = \frac{5}{3} + \frac{23}{3^2 \cdot 5} = \frac{98}{3^2 \cdot 5}$

$\frac{9}{3}\ p^3 x 4 = \frac{98}{3^2 \cdot 5} + \frac{44}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7}$

$\frac{11}{3}\ p^3 x 5 = \frac{818}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{563}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$

$\frac{13}{3}\ p^3 x 6 = \frac{4653}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{3254}{3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

$\frac{15}{3}\ p^3 x 7 = \frac{169819}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{88069}{3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{17}{3}\ p^3 x 8 = \frac{16774564}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{11384}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

$\frac{19}{3}\ p^3 x 9 = \frac{17969884}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1593269}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

$\frac{21}{3}\ p^3 x 10 = \frac{972228499}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} + \frac{15518938}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13\ 17 \cdot 19}$

$= \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$\frac{23}{3}\ p^3 x 11 = \frac{19450034575}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} + \frac{3173071 1}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$= \frac{223945554290}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$

$$\frac{2}{7}\,p^3x\,12 = \frac{223945554290}{3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13\,17\cdot19} + \frac{18608897\,2}{3^3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$= \frac{53656805\,11330}{3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13\,17\cdot19\cdot23}$$

$$\frac{2}{7}\,p^3x\,13 = \frac{53656805\,11330}{3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23} + \frac{3788707301}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23}$$

$$= \frac{72379420806883}{3^4\cdot5^2\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23}$$

also

$$p^3x\ 1 = 1$$

$$p^3x\ 2 = 1$$

$$p^3x\ 3 = \frac{14}{3\cdot5}$$

$$p^3x\ 4 = \frac{818}{3^3\cdot5\cdot7}$$

$$p^3x\ 5 = \frac{141}{5^2\cdot7}$$

$$p^3x\ 6 = \frac{13063}{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11}$$

$$p^3x\ 7 = \frac{1677456\,4}{3^3\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13}$$

$$p^3x\ 8 = \frac{1057052}{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13}$$

$$p^3x\ 9 = \frac{4651811}{3^3\cdot5^2\cdot7^2\cdot13\cdot17}$$

$$p^3x\ 10 = \frac{778001383}{3^4.7^3.11.13.17.19}$$

$$p^3x\ 11 = \frac{1947352646}{3^3.5.7^2.11^2.13.17.19}$$

$$p^3x\ 12 = \frac{107313610226 6}{3^3.5^3.7^2.11^2.13.17.19.23}$$

$$p^3x\ 13 = \frac{72379420806883}{3^6.5^2.7^2.11^2.13^2.17.19.23}$$

Auf diese Art kann man alle Coefficienten ganzer positiver Potenzen von der gedachten Reihe ohne Schwierigkeit berechnen. Zur Probe, daß man sich nicht verrechnet hat, kann die Bemerkung, deren Richtigkeit leicht in die Augen fällt, dienen, daß in dem Werthe des (n+1)ten Coefficienten jeder ganzen positiven oder negativen Potenz der Nenner keine Primzahl als Factor enthalten kann, welche 2, oder höher als 2n+1 ist. So fand sich z. B. bey der Berechnung der Coefficienten der 3ten Potenz, daß

$$\frac{19}{3}\ p^3x9 = \frac{972228499}{3^4.5^2.7^2.11.13.17}.$$ Hieraus folgt, daß

$$p^3x\ 9 = \frac{972228499}{3^3.5^2.7^2.11.13.17.19}.$$ Da aber nach der gedachten Regel im Nenner keine Primzahl höher als 17 vorkommen kann, so muß der Zähler des gedachten Bruches, oder die Zahl 972228499, sich durch 19 ohne Rest dividiren und dadurch die 19 aus dem Nenner wegschaffen lassen.

5. Um die Coefficienten ganzer negativer Potenzen zu berechnen, stelle man folgende Betrachtung an:

Es sey

$z = T^{-1} - \frac{1}{3}T^{-3} + \frac{1}{5}T^{-5} - \frac{1}{7}T^{-7} + \frac{1}{9}T^{-9} \ldots$ so ist nach der Umkehrungsformel

$$T = p^{1}\times 1\, z^{-1} + p^{-1}\times 2\, z - \frac{1}{3}p^{-3}\times 3 z^{3} + \frac{1}{5}p^{-5}\times 4 z^{5} \ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\times(n+1) z^{2n-1} \ldots; T^{-1} = p^{-1}\times 1 z - \frac{1}{3}p^{-3}\times 2 z^{3}$$

$$+\frac{1}{5}p^{-5}\times 3 z^{5} \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\times(n)\, z^{2n-1} \ldots.$$

Nun ist T die Cotangente, und T^{-1} die Tangente von z, mithin, wie man aus andern Gründen weis,

$$T = z^{-1} - \frac{2^2\mathfrak{A}}{1.2} z - \frac{2^4\mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^3 \ldots - \frac{2^{2n}\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} z^{2n-1} \ldots$$

$$T^{-1} = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}}{1.2} z + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} z^3 + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6} z^5 \ldots$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} z^{2n-1} \ldots.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ... die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Also ist

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\times(n+1) = -\frac{2^{2n}\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n} \text{ und}$$

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n-1}\, p^{1-2n}\times n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)\overset{n-1}{\mathfrak{A}}}{1.2.3 \ldots 2n}$$

mithin $p^{1-2n}\times(n+1) = -\dfrac{p^{1-2n}\times n}{2^{2n}-1}$ (%)

Nun übersieht man ohne Schwierigkeit daß

$p^{-1}\times 1 = 1,\quad p^{-2}\times 1 = 1,\quad p^{-3}\times 1 = 1$

$p^{-1}\times 2 = -\frac{1}{2},\quad p^{-2}\times 2 = -\frac{2}{3},\quad p^{-3}\times 2 = -1$, also, wenn man in der Formel (♃) $n = 2$ setzt

$$p^{-3}\times 3 = -\frac{p^{-3}\times 2}{15} = \frac{1}{3\cdot 5}$$

Setzt man nun in der ersten Formel von B) in (4) $n = 2$, so hat man

$$\frac{m+1}{m+5}\,p^{m}\times 3 + \frac{m+3}{m+5}\,p^{m+1}\times 2 = p^{m+1}\times 3, \text{ also}$$

$p^{-2}\times 3 = -p^{-3}\times 3 = -\frac{1}{3\cdot 5}$ für $m = -3$

$p^{-1}\times 3 = -\frac{1}{3}p^{-2}\times 3 + \frac{1}{3}p^{-1}\times 2 = \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^2} = -\frac{4}{3^2\cdot 5}$ für $m = -2$

Man setze in der ersten Formel von B) $m = -4$ so ist

$$p^{-4}\times(n+1) = -\frac{2n-3}{3}\,p^{-3}\times(n+1) + \frac{2n-5}{3}\,p^{-3}\times n \text{ also}$$

$p^{-4}\times 1 = p^{-3}\times 1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-4}\times 2 = \frac{1}{3}p^{-3}\times 2 - p^{-3}\times 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{3}{4}$, für $n = 1$

$p^{-4}\times 3 = -\frac{1}{3}p^{-3}\times 3 - \frac{1}{3}p^{-3}\times 2 = -\frac{1}{3^2\cdot 5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{3^2\cdot 5}$ für $n = 2$

Man setze in der ersten Formel von B) $m = -5$ so ist

$$p^{-5}\times(n+1) = -\frac{2n-4}{4}\,p^{-4}\times(n+1) + \frac{2n-6}{4}\,p^{-4}\times n$$

also

$p^{-5}x\,1 = p^{-4}x\,1 = 1$ für $n = 0$

$p^{-5}x\,2 = \frac{2}{4}p^{-4}x\,2 - \frac{4}{4}p^{-4}x\,1 = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$ für $n = 1$

$p^{-5}x\,3 = -\frac{2}{4}p^{-4}x\,2 = \frac{2}{3}$ für $n = 2$, und wenn man in der Formel (♀) $n = 3$ setzt

$$p^{-5}x\,4 = -\frac{p^{-5}x\,3}{2^6 - 1} = -\frac{2}{3^3 \cdot 7}$$

Nun setze man in B) $n = 3$, so ist

$$\frac{m+1}{m+7}p^m x\,4 + \frac{m+5}{m+7}p^{m+1}x\,3 = p^{m+1}x\,4$$ also

für $m = -5, -4, -3, -2,$

$$p^{-4}x\,4 = -\frac{4}{5}p^{-5}x\,4 = \frac{4}{3^3 \cdot 7}$$

$$p^{-3}x\,4 = -\frac{3}{3}p^{-4}x\,4 + \frac{1}{3}p^{-3}x\,3 = -\frac{4}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-2}x\,4 = -\frac{2}{4}p^{-3}x\,4 + \frac{2}{4}p^{-2}x\,3 = -\frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{32}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$p^{-1}x\,4 = -\frac{1}{3}p^{-2}x\,4 + \frac{3}{3}p^{-1}x\,3 = \frac{32}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} - \frac{4}{3 \cdot 5^2} = -\frac{44}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$$

Man setze nun in B) $m = -6$ so hat man

$$p^{-6}x(n+1) = -\frac{2n-5}{5}p^{-5}x(n+1) + \frac{2n-7}{5}p^{-5}x\,n$$

also für $n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-6}x\,1 = p^{-5}x\,1 = 1$

$p^{-6}x\,2 = \frac{3}{3}p^{-5}x\,2 - p^{-5}x\,1 = -1 - 1 = -2$

$$p^{-6}x3 = \tfrac{1}{7}p^{-5}x3 - \tfrac{3}{7}p^{-6}x2 = \frac{2}{3\cdot5} + 1 = \frac{17}{3\cdot5}$$

$$p^{-6}x4 = -\tfrac{1}{7}p^{-5}x4 - \tfrac{1}{7}p^{-5}x3 = \frac{2}{3^2\cdot5\cdot7} - \frac{2}{3\cdot5} = -\frac{124}{3^2\cdot5\cdot7}$$

Man ſetze nun in B) $m = -7$ ſo hat man

$$p^{-7}x(n+1) = -\frac{2n-6}{6}p^{-6}x(n+1) + \frac{2n-8}{6}p^{-6}xn$$ alſo für

$n = 0, 1, 2, 3$

$p^{-7}x\,1 = p^{-6}x\,1 = 1$

$p^{-7}x\,2 = \frac{4}{6}p^{-6}x\,2 - p^{-6}x\,1 = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$

$$p^{-7}x\,3 = \tfrac{2}{6}p^{-6}x\,3 - \tfrac{4}{6}p^{-6}x\,2 = \frac{17}{3^2\cdot5} + \frac{4}{3} = \frac{77}{3^2\cdot5}$$

$$p^{-7}x\,4 = -\tfrac{2}{6}p^{-6}x\,3 = -\frac{17}{3^2\cdot5}$$

Man ſetze nun in ($\mathfrak{X}$) $n = 4$ ſo iſt

$$p^{-7}x\,5 = -\frac{p^{-7}x\,4}{2^3 - 1} = \frac{1}{3^3\cdot5^2}$$

Man ſetze nun in B) $n = 4$ ſo iſt

$$\frac{m+1}{m+9}p^{m}x\,5 + \frac{m+7}{m+9}p^{m+1}x\,4 = p^{m+1}x\,5$$ und für

$m = -7, -6, -5, -4, -3, -2$

$$p^{-6}x\,5 = -\tfrac{6}{1}p^{-7}x\,5 = -\frac{1}{3^2\cdot5^2}$$

$$p^{-5}x\,5 = -\tfrac{5}{7}p^{-6}x\,5 + \tfrac{1}{7}p^{-5}x\,4 = \frac{1}{3^3\cdot5} - \frac{2}{3^4\cdot7} = \frac{11}{3^4\cdot5\cdot7}$$

$$p^{-4}x5=-\tfrac{4}{4}p^{-5}x5+\tfrac{2}{4}p^{-4}x4=-\frac{11}{3^4\cdot5\cdot7}+\frac{2}{3^3\cdot7}=\frac{19}{3^4\cdot5\cdot7}$$

$$p^{-3}x5=-\tfrac{3}{3}p^{-4}x5+\tfrac{3}{3}p^{-3}x4=-\frac{19}{3^3\cdot5^2\cdot7}+\frac{1}{3^2\cdot5^2\cdot7}=-\frac{16}{3^3\cdot5^2\cdot7}$$

$$p^{-2}x5=-\tfrac{2}{6}p^{-3}x5+\tfrac{4}{6}p^{-3}x4=\frac{16}{3^4\cdot5^2\cdot7}-\frac{64}{3^4\cdot5\cdot7}=-\frac{304}{3^4\cdot5^2\cdot7}$$

$$p^{-1}x5=-\tfrac{1}{7}p^{-2}x5+\tfrac{5}{7}p^{-1}x4=\frac{304}{3^4\cdot5^2\cdot7^2}-\frac{44}{3^3\cdot7^2}=-\frac{428}{3^4\cdot5^2\cdot7}$$

Man setze in B) $m=-8$, so ist

$$p^{-8}x(n+1)=-\frac{2n-7}{7}p^{-7}x(n+1)+\frac{2n-9}{7}p^{-7}xn$$ also für

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

$p^{-8}x1=p^{-7}x1=1$

$p^{-8}x2=\tfrac{5}{7}p^{-7}x2-p^{-7}x1=-\tfrac{5}{3}-1=-\tfrac{8}{3}$

$p^{-8}x3=\tfrac{3}{7}p^{-7}x3-\tfrac{6}{7}p^{-7}x2=\frac{11}{3\cdot5}+\tfrac{5}{3}=\tfrac{18}{5}$

$$p^{-8}x4=\tfrac{1}{7}p^{-7}x4-\tfrac{3}{7}p^{-7}x3=-\frac{17}{3^2\cdot5\cdot7}-\frac{11}{3\cdot5}=-\frac{248}{3^2\cdot5\cdot7}$$

$$p^{-8}x5=-\tfrac{1}{7}p^{-7}x5-\tfrac{1}{7}p^{-7}x4=-\frac{1}{3^3\cdot5^2\cdot7}+\frac{17}{3^2\cdot5\cdot7}=\frac{254}{3^3\cdot5^2\cdot7}$$

Man setze in B) $m=-9$, so ist

$$p^{-9}x(n+1)=-\frac{2n-8}{8}p^{-8}x(n+1)+\frac{2n-10}{8}p^{-8}xn$$ also

für $n=0, 1, 2, 3, 4$

$p^{-9}x1=p^{-8}x1=1$

$p^{-9}\times 2=\frac{6}{8}p^{-8}\times 2-p^{-8}\times 1=-2-1=-3$

$p^{-9}\times 3=\frac{4}{8}p^{-8}\times 3-\frac{6}{8}p^{-9}\times 2=\frac{6}{5}+2=\frac{16}{5}$

$$p^{-9}\times 4=\frac{2}{8}p^{-8}\times 4-\frac{4}{8}p^{-8}\times 3=-\frac{62}{3^2\cdot 5\cdot 7}-\frac{6}{5}=-\frac{88}{3^2\cdot 7}$$

$$p^{-9}\times 5=-\frac{2}{8}p^{-8}\times 4=\frac{62}{3^2\cdot 5\cdot 7}$$

Man setzt nun in (☿) $n=5$ und man hat

$$p^{-9}\times 6=-\frac{p^{-9}\times 5}{2^1-1}=-\frac{2}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$$

Man setze nun auch in B) $n=5$ so erhält man

$\frac{m+1}{m+11}p^m\times 6+\frac{m+9}{m+11}p^{m+1}\times 5=p^{m+1}\times 6$, und für

$m=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,$

$$p^{-8}\times 6=-\frac{8}{2}p^{-9}\times 6=\frac{8}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$$

$$p^{-7}\times 6=-\frac{7}{3}p^{-8}\times 6+\frac{1}{3}p^{-7}\times 5=-\frac{8}{3^4\cdot 5\cdot 11}+\frac{1}{3^4\cdot 5^2}=-\frac{29}{3^5\cdot 5^2\cdot 11}$$

$$p^{-6}\times 6=-\frac{6}{4}p^{-7}\times 6+\frac{2}{4}p^{-6}\times 5=\frac{29}{2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 11}-\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5^2}=-\frac{2}{3^3\cdot 5^2\cdot 11}$$

$$p^{-5}\times 6=-\frac{5}{5}p^{-6}\times 6+\frac{3}{5}p^{-6}\times 5=\frac{2}{3^3\cdot 5^2\cdot 11}+\frac{11}{3^3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{1}{5\cdot 7\cdot 11}$$

$$p^{-4}\times 6=-\frac{4}{6}p^{-5}\times 6+\frac{4}{6}p^{-4}\times 5=-\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}+\frac{38}{3^5\cdot 5\cdot 7}=\frac{256}{3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11}$$

$$p^{-3}\times 6=-\frac{3}{7}p^{-4}\times 6+\frac{5}{7}p^{-3}\times 5=-\frac{256}{3^4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11}-\frac{16}{3^3\cdot 5\cdot 7^2}=-\frac{16}{3^4\cdot 5\cdot 11}$$

$$p^{-3}\varkappa 6 = -\tfrac{2}{5}p^{-3}\varkappa 6 + {}^{6}p\cdot 2\varkappa 5 = \frac{4}{3^4\cdot 5\cdot 11} - \frac{76}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} = -\frac{2368}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

$$p^{-1}\varkappa 6 = -\tfrac{1}{5}p^{-2}\varkappa 6 + \tfrac{7}{5}p^{-1}\varkappa 5 = \frac{2368}{3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} - \frac{428}{3^6\cdot 5^2} = -\frac{10196}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

Das Gesetz des Fortgangs ist nun deutlich einzusehen. Hat man nehmlich von der Potenz $-1, -2, -3$ u. s. w. bis $3-2r$ (wo r eine ganze positive Zahl ist) den ersten, zweyten, dritten u. s. w. bis rten Coefficienten berechnet, so berechnet man nach der Formel B) aus dem gefundenen Werthe von $p^{3-2r}\varkappa 1$, $p^{3-2r}\varkappa 2 \ldots p^{3-2r}\varkappa r$, die Werthe $p^{2-2r}\varkappa 1$, $p^{2-2r}\varkappa 2$, $p^{2-2r}\varkappa 3 \ldots p^{2-2r}\varkappa r$, und aus diesen nach eben der Formel die Werthe $p^{1-2r}\varkappa 1$, $p^{1-2r}\varkappa 2$, $p^{1-2r}\varkappa 3 \ldots p^{1-2r}\varkappa r$; durch Umwendung der Formel (☿) berechnet man dann aus dem gefundenen $p^{1-2r}\varkappa r$, den Werth von $p^{1-2r}\varkappa(r+1)$, und nachher nach der Reihe die Werthe $p^{2-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{3-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{4-2r}\varkappa(r+1) \ldots p^{-1}\varkappa(r+1)$, wieder vermöge der Formel B. Bey der Anwendung der Formel (☿) in dieser Rechnung, ist die zu Ende von (4) gegebene Regel als Probe, ob man richtig gerechnet hat, vorzüglich brauchbar.

6. Aus den berechneten Coefficienten der Potenz -1 lassen sich nun auch sehr leicht die logarithmischen Coefficienten bestimmen. Denn nach der zweiten Formel unter B ist

$$p^{-n}\varkappa(n+1) + 2(n-1)\operatorname{Log} p.\varkappa n = 2n\operatorname{Log} p.\varkappa(n+1)$$

Nun ist offenbar $\operatorname{Log} p.\varkappa 2 = \frac{1}{2}$ also, wenn man in der vorigen Formel statt n nach der Reihe 2, 3, 4 u. s. w. setzt

$$4\operatorname{Log} p.\varkappa 3 = 2\operatorname{Log} p.\varkappa 2 + p^{-1}\varkappa 3$$

$$6\operatorname{Log} p.\varkappa 4 = 4\operatorname{Log} p.\varkappa 3 + p^{-1}\varkappa 4$$

$$8\operatorname{Log} p.\varkappa 5 = 6\operatorname{Log} p.\varkappa 4 + p^{-1}\varkappa 5, \text{ u. s. w.}$$

also

$$4\,\mathrm{Log\,p.}\,x3 = \tfrac{2}{3} - \frac{4}{3^2\cdot 5} = \frac{26}{3^2\cdot 5}$$

$$6\,\mathrm{Log\,p.}\,x4 = \frac{26}{3^2\cdot 5} - \frac{44}{3^3\cdot 5\cdot 7} = \frac{502}{3^3\cdot 5\cdot 7}$$

$$8\,\mathrm{Log\,p.}\,x5 = \frac{502}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \frac{428}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} = \frac{7102}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$10\,\mathrm{Log\,p.}\,x6 = \frac{7102}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} - \frac{10196}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} = \frac{224170}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

also

$$\mathrm{Log\,p.}\,x2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x3 = \frac{13}{2\cdot 3^2\cdot 5}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x4 = \frac{251}{3^4\cdot 5\cdot 7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x5 = \frac{3551}{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x6 = \frac{22417}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

7. Bey der in (5) gezeigten Berechnung der Coefficienten negativer Potenzen, findet man zugleich die Bernoullischen Zahlen mit. Aus folgender Betrachtung ergeben sich aber noch zwey weit leichtere Arten die Bernoullischen Zahlen zu berechnen: Man nenne q die Scale, deren Coefficienten aus der Reihe genommen sind, welche die Cotangente durch den Bogen ausdrückt, oder es sey

$$q\left[1, -\frac{2^2\,\mathfrak{A}}{1.2}, -\frac{2^4\,\mathfrak{B}}{1.2.3.4}, -\frac{2^6\,\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6}\ldots.\right]$$

so folgt aus der Reversionsformel

$$q^s x\,(n+1) = (-1)^n \cdot \frac{s}{s-2n}\, p^{s-2n} x\,(n+1);\quad p^t x\,(n+1) = (-1)^n \cdot \frac{t}{t+2n}\, q^{t+2n} x\,(n+1);$$

ferner

$$\mathrm{Log}\, q.x\,(n+1) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}\, p^{-2n} x\,(n+1);\quad \mathrm{L.p.}x\,(n+1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}\, q^{2n} x\,(n+1)$$

mithin da nach B)

$$(m+1)p^m x(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1} xn = (m+2n+1)p^{m+1} x(n+1)$$

auch

$$(-1)^n \cdot \frac{(m+1)m}{m+2n}\, q^{m+2n} x\,(n+1) + (-1)^{n-1}(m+1)\, q^{m+2n-1} xn = (-1)^n (m+1)\, q^{m+2n+1} x\,(n+1)$$

oder, durch $(-1)^n (m+1)$ dividirt,

$$\frac{m}{m+2n}\, q^{m+2n} x\,(n+1) - q^{m+2n-1} xn = q^{m+2n+1} x\,(n+1)$$

oder, wenn man statt m durchgängig $m-2n$ schreibt,

C) $(m-2n)\, q^m x\,(n+1) = m q^{m-1} xn + m q^{m+1} x\,(n+1)$ und

$$-2n\,\mathrm{Log}\, q.x\,(n+1) = q^{-1} xn + q^1 x\,(n+1)$$

auch ist überdies, wie aus (5) erhellet,

$$q^1 x\,(n+1) = -\frac{2^{2n}\, \mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4 \ldots 2n}$$

$$q^{-1} x\,n = \frac{2^{2n}\,(2^{2n}-1)\, \mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4 \ldots 2n}$$

also $q^{-1} xn = -(2^{2n}-1)\, q^1 x\,(n+1)$

und nach der zweyten Formel unter C)

$$\text{Log } q.\, x\,(n+1) = -\frac{2^{2n+1}\,(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1).2n.2n}$$

Hieraus ist klar, daß die Bernoullischen Zahlen, entweder aus den Coefficienten der Potenz -1, oder den Coefficienten der Potenz $+1$, oder den logarithmischen Coefficienten, für die Scale q, berechnet werden können.

Man setze in der Formel C) $m=-1$ so hat man

$-(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = -q^{-2}xn - q^{0}x\,(n+1)$ also für

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$q^{-1}x\,1 = 1$

$3\,q^{-1}x\,2 = q^{-2}x\,1$

$5\,q^{-1}x\,3 = q^{-2}x\,2$; und allgemein wenn n größer als o ist

$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = q^{-2}x\,n$

Dadurch ist man im Stande, die Coefficienten der Potenz -1, zur Scale q, gehörig zu berechnen. Denn, hat man einmal $q^{-1}x\,1$, $q^{-1}x\,2$, $q^{-1}x\,3$, ... $q^{-1}x\,n$ gefunden, so hat man nach der letzten Formel

für ein gerades n

$$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = q^{-2}x\,n = 2q^{-1}x\,1\;q^{-1}x\,n$$
$$+2q^{-1}x\,2\;q^{-1}x\,(n-1)\ldots + 2q^{-1}x\left(\frac{n}{2}\right).q^{-1}x\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

für ein ungerades h

$$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = 2q^{-1}x\,1\,q^{-1}x\,n + 2q^{-1}x\,2\,q^{-1}x\,(n-1)\ldots$$
$$+2q^{-1}x\left(\frac{n-1}{2}\right).q^{-1}x\left(\frac{n+3}{2}\right) + \left[q^{-1}x\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^{2}$$

Aus dieſen Coefficienten der Potenz -1, findet man die Coefficienten der Potenz $+1$, nach der Formel

$$q^{1}\varkappa(n+1) = -\frac{q^{-1}\varkappa n}{2^{2n}-1}$$

und, da der Nenner von $q^{1}\varkappa(n+1)$ keine andern Primzahlen unter ſeinen Factoren enthalten kann als ſolche, die nicht 2, und nicht höher als $2n+1$ ſind, ſo dient dieſe Formel zugleich zur Probe, ob man richtig gerechnet hat. Hieraus finden ſich nun die Bernoulliſchen Zahlen nach der Formel

$$\mathfrak{A}^{n-1} = -\frac{1.2.3.4....2n}{2^{2n}} q^{1}\varkappa(n+1)$$

und hieraus die logarithmiſchen Coefficienten nach der Formel

$$\text{Log } q.\varkappa(n+1) = -\frac{2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4...2n.2n}$$

Es iſt demnach

$q^{-1}\varkappa 1 = 1$ alſo $q^{1}\varkappa 2 = -\frac{1}{3}$

$3q^{-1}\varkappa 2 = 1$ alſo $q^{-1}\varkappa 2 = \frac{1}{3}$ und $q^{1}\varkappa 3 = -\frac{1}{3^2.5}$

$5q^{-1}\varkappa 3 = 2q^{-1}\varkappa 1\, q^{-1}\varkappa 2 = \frac{2}{3}$ alſo $q^{-1}\varkappa 3 = \frac{2}{3.5}$ und $q^{1}\varkappa 4 = -\frac{2}{3^3.5.7}$

$7q^{-1}\varkappa 4 = 2q^{-1}\varkappa 1 q^{-1}\varkappa 3 + (q^{-1}\varkappa 2)^2 = \frac{4}{3.5} + \frac{1}{3^2} = \frac{17}{3^2.5}$ alſo

$$q^{-1}\varkappa 4 = \frac{17}{3^2.5.7} \text{ und } q^{1}\varkappa 5 = -\frac{1}{3^3.5^2.7}$$

$$9q^{-1}\varkappa 5 = 2q^{-1}\varkappa 1 q^{-1}\varkappa 4 + 2q^{-1}\varkappa 2\, q^{-1}\varkappa 3 = \frac{34}{3^2.5.7} + \frac{4}{3^2.5} = \frac{62}{3^2.5.7}$$

also $q^{-1}x5 = \frac{62}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$ und $q^1x6 = -\frac{2}{3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

$11q^{-1}x6 = 2q^{-1}x1q^{-1}x5 + 2q^{-1}x2q^{-1}x4 + (q^{-1}x3)^2 = \frac{124}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$

$+ \frac{34}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{4}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}$ also $q^{-1}x6 = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

und $q^1x7 = -\frac{1382}{3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11\,13}$

$13q^{-1}x7 = 2q^{-1}x1q^{-1}x6 + 2q^{-1}x2q^{-1}x5 + 2q^{-1}x3q^{-1}x4$

$= \frac{2764}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{124}{3^5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{68}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$ also

$q^{-1}x7 = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1x8 = -\frac{4}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$

$15q^{-1}x8 = 2q^{-1}x1q^{-1}x7 + 2q^{-1}x2q^{-1}x6 + 2q^{-1}x3q^{-1}x5 + (q^{-1}x4)^2$

$= \frac{43688}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{2764}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{248}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{289}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{929569}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

also $q^{-1}x8 = \frac{929569}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1x9 = -\frac{3617}{3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

Auf dieſe Art habe ich berechnet

$q^{-1}x1 = 1 = p^{-1}x1$

$q^{-1}x2 = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p^{-3}x2$

$q^{-1}x3 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5}p^{-5}x3$

$q^{-1}x4 = \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{7}p^{-7}x4$

$$q^{-1}x\,5 = \frac{62}{3^4.5^2.7} = \tfrac{1}{5}\,p^{-9}x\,5$$

$$q^{-1}x\,6 = \frac{1382}{3^4.5^2.7.11} = -\tfrac{1}{11}\,p^{-11}x\,6$$

$$q^{-1}x\,7 = \frac{21844}{3^5.5^2.7.11.13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}x\,7$$

$$q^{-1}x\,8 = \frac{929569}{3^6.5^3.7^2.11.13} = -\tfrac{1}{15}\,p^{-15}x\,8$$

$$q^{-1}x\,9 = \frac{6404582}{3^6.5^3.7^2.11.13.17} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}x\,9$$

$$q^{-1}x\,10 = \frac{4438611162}{3^8.5^3.7^2.11.13.17.19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}x\,10$$

$$q^{-1}x\,11 = \frac{18888466084}{3^9.5^4.7^3.11.13.17.19} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}x\,11$$

$$q^{-1}x\,12 = \frac{113927491862}{3^9.5^4.7^3.11^2.13.19.23} = -\tfrac{1}{23}\,p^{-23}x\,12$$

$$q^{-1}x\,13 = \frac{588706684566044}{3^{10}.5^6.7^3.11^2.13.17.19.23} = \tfrac{1}{25}\,p^{-25}x\,13$$

$$q^{-1}x\,14 = \frac{8374643517010684}{3^{13}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23} = -\tfrac{1}{27}\,p^{-27}x\,14$$

$$q^{-1}x\,15 = \frac{689005380505609448}{3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29} = \tfrac{1}{29}\,p^{-29}x\,15$$

$$q^{-1}x\,16 = \frac{1298481636811073019 53}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29.31} = -\tfrac{1}{31}\,p^{-31}x\,16$$

$$q^{-1}x\,17 = \frac{1736640792209901647222}{3^{15}.5^7.7^4.11^3.13^2.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{33}\,p^{-33}x\,17$$

$$q^{-1}\times 18 = \frac{4187812314952930389 13922}{3^{13}\cdot 5^{11}\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17^2\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = -\tfrac{1}{17}\,p^{-35}\times 18$$

und hieraus findet sich

$$q^1\times 1 = 1 = p^1\times 1$$

$$q^1\times 2 = -\tfrac{1}{1} = p^{-1}\times 2$$

$$q^1\times 3 = -\frac{1}{3^2\cdot 5} = -\tfrac{1}{1}\,p^{-3}\times 3$$

$$q^1\times 4 = -\frac{2}{3^3\cdot 5\cdot 7} = \tfrac{1}{3}\,p^{-5}\times 4$$

$$q^1\times 5 = -\frac{1}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} = -\tfrac{1}{7}\,p^{-7}\times 5$$

$$q^1\times 6 = -\frac{2}{3^5\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \tfrac{1}{5}\,p^{-9}\times 6$$

$$q^1\times 7 = -\frac{1382}{3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} = -\tfrac{1}{11}\,p^{-11}\times 7$$

$$q^1\times 8 = -\frac{4}{3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}\times 8$$

$$q^1\times 9 = -\frac{3617}{3^7\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17} = -\tfrac{1}{15}\,p^{-15}\times 9$$

$$q^1\times 10 = -\frac{87734}{3^9\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}\times 10$$

$$q^1\times 11 = -\frac{349222}{3^9\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}\times 11$$

$$q^1\times 12 = -\frac{310732}{3^{10}\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}\times 12$$

$$p^{-2}\varkappa 6 = -\tfrac{2}{5}p^{-3}\varkappa 6 + {}^{6}p\cdot 2\varkappa 5 = \frac{4}{3^4\cdot 5\cdot 11} - \frac{76}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} = -\frac{2368}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

$$p^{-1}\varkappa 6 = -\tfrac{1}{5}p^{-2}\varkappa 6 + \tfrac{7}{5}p^{-1}\varkappa 5 = \frac{2368}{3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} - \frac{428}{3^6\cdot 5^2} = -\frac{10196}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

Das Gesetz des Fortgangs ist nun deutlich einzusehen. Hat man nehmlich von der Potenz $-1, -2, -3$ u. s. w. bis $3-2r$ (wo r eine ganze positive Zahl ist) den ersten, zweyten, dritten u. s. w. bis rten Coefficienten berechnet, so berechnet man nach der Formel B) aus dem gefundenen Werthe von $p^{3-2r}\varkappa 1$, $p^{3-2r}\varkappa 2 \ldots p^{3-2r}\varkappa r$, die Werthe $p^{2-2r}\varkappa 1$, $p^{2-2r}\varkappa 2$, $p^{2-2r}\varkappa 3 \ldots p^{2-2r}\varkappa r$, und aus diesen nach eben der Formel die Werthe $p^{1-2r}\varkappa 1$, $p^{1-2r}\varkappa 2$, $p^{1-2r}\varkappa 3 \ldots p^{1-2r}\varkappa r$; durch Umwendung der Formel (♀) berechnet man dann aus dem gefundenen $p^{1-2r}\varkappa r$, den Werth von $p^{1-2r}\varkappa(r+1)$, und nachher nach der Reihe die Werthe $p^{2-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{3-2r}\varkappa(r+1)$, $p^{4-2r}\varkappa(r+1) \ldots p^{-1}\varkappa(r+1)$, wieder vermöge der Formel B. Bey der Anwendung der Formel (♀) in dieser Rechnung, ist die zu Ende von (4) gegebene Regel als Probe, ob man richtig gerechnet hat, vorzüglich brauchbar.

6. Aus den berechneten Coefficienten der Potenz -1 lassen sich nun auch sehr leicht die logarithmischen Coefficienten bestimmen. Denn nach der zweiten Formel unter B ist

$$p^{-1}\varkappa(n+1) + 2(n-1)\ \mathrm{Log\,p.}\,\varkappa n = 2n\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa(n+1)$$

Nun ist offenbar $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2 = \frac{1}{2}$ also, wenn man in der vorigen Formel statt n nach der Reihe 2, 3, 4 u. s. w. setzt

$$4\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3 = 2\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2 + p^{-1}\varkappa 3$$

$$6\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 4 = 4\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3 + p^{-1}\varkappa 4$$

$$8\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 5 = 6\,\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 4 + p^{-1}\varkappa 5, \text{ u. s. w.}$$

also

$$4\,\mathrm{Log\,p.}\,x3 = \tfrac{2}{3} - \frac{4}{3^2\cdot 5} = \frac{26}{3^2\cdot 5}$$

$$6\,\mathrm{Log\,p.}\,x4 = \frac{26}{3^2\cdot 5} - \frac{44}{3^3\cdot 5\cdot 7} = \frac{502}{3^3\cdot 5\cdot 7}$$

$$8\,\mathrm{Log\,p.}\,x5 = \frac{502}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \frac{428}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} = \frac{7102}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$10\,\mathrm{Log\,p.}\,x6 = \frac{7102}{3^4\cdot 5^2\cdot 7} - \frac{10196}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} = \frac{224170}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

also

$$\mathrm{Log\,p.}\,x2 = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x3 = \frac{13}{2\cdot 3^2\cdot 5}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x4 = \frac{251}{3^4\cdot 5\cdot 7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x5 = \frac{3551}{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}$$

$$\mathrm{Log\,p.}\,x6 = \frac{22417}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$$

7. Bey der in (5) gezeigten Berechnung der Coefficienten negativer Potenzen, findet man zugleich die Bernoullischen Zahlen mit. Aus folgender Betrachtung ergeben sich aber noch zwey weit leichtere Arten die Bernoullischen Zahlen zu berechnen: Man nenne q die Scale, deren Coefficienten aus der Reihe genommen sind, welche die Cotangente durch den Bogen ausdrückt, oder es sey

$$q\left[1, -\frac{2^2\,\mathfrak{A}}{1.2}, -\frac{2^4\,\mathfrak{B}}{1.2.3.4}, -\frac{2^6\,\mathfrak{C}}{1.2.3.4.5.6}\ldots\right]$$

so folgt aus der Reversionsformel

$q^s x\,(n+1) = (-1)^n \cdot \frac{s}{s-2n}\, p^{s-2n} x\,(n+1)$; $p^t x\,(n+1)$

$= (-1)^n \cdot \frac{t}{t+2n}\, q^{t+2n} x\,(n+1)$; ferner $\mathrm{Log}\, q.x\,(n+1)$

$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}\, p^{-2n} x\,(n+1)$; $\mathrm{L.p.}x\,(n+1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}\, q^{2n} x\,(n+1)$

mithin da nach B)

$(m+1)p^m x(n+1) + (m+2n-1)p^{m+1} xn = (m+2n+1)p^{m+1} x(n+1)$

auch

$$(-1)^n \cdot \frac{(m+1)m}{m+2n}\, q^{m+2n} x\,(n+1) + (-1)^{n-1}(m+1)\, q^{m+2n-1} xn$$
$$= (-1)^n (m+1)\, q^{m+2n+1} x\,(n+1)$$

oder, durch $(-1)^n (m+1)$ dividirt,

$$\frac{m}{m+2n}\, q^{m+2n} x\,(n+1) - q^{m+2n-1} xn = q^{m+2n+1} x\,(n+1)$$

oder, wenn man statt m durchgängig $m-2n$ schreibt,

C) $(m-2n)\, q^m x\,(n+1) = m q^{m-1} xn + m q^{m+1} x\,(n+1)$ und

$$-2n\, \mathrm{Log}\, q.x\,(n+1) = q^{-1} xn + q^1 x\,(n+1)$$

auch ist überdies, wie aus (5) erhellet,

$$q^1 x\,(n+1) = -\frac{2^{2n}\, \mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4 \ldots 2n}$$

$$q^{-1} x\,n = \frac{2^{2n}\,(2^{2n}-1)\, \mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4 \ldots 2n}$$

also $q^{-1} xn = -(2^{2n}-1)\, q^1 x\,(n+1)$

und nach der zweyten Formel unter C)

$$\text{Log } q.\, x\,(n+1) = -\frac{2^{2n+1}\,(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3\ldots.(2n-1).2n.2n}$$

Hieraus ist klar, daß die Bernoullischen Zahlen, entweder aus den Coefficienten der Potenz -1, oder den Coefficienten der Potenz $+1$, oder den logarithmischen Coefficienten, für die Scale q, berechnet werden können.

Man setze in der Formel C) $m = -1$ so hat man

$-(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = -q^{-2}xn - q^{0}x\,(n+1)$ also für

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$q^{-1}x\,1 = 1$

$3\,q^{-1}x\,2 = q^{-2}x\,1$

$5\,q^{-1}x\,3 = q^{-2}x\,2$; und allgemein wenn n größer als o ist

$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = q^{-2}x\,n$

Dadurch ist man im Stande, die Coefficienten der Potenz -1, zur Scale q, gehörig zu berechnen. Denn, hat man einmal $q^{-1}x\,1$, $q^{-1}x\,2$, $q^{-1}x\,3$, $\ldots$, $q^{-1}x\,n$ gefunden, so hat man nach der letzten Formel

für ein gerades n

$$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = q^{-2}x\,n = 2q^{-2}x\,1\;q^{-1}x\,n$$
$$+2q^{-1}x\,2\;q^{-1}x\,(n-1)\ldots + 2q^{-1}x\left(\frac{n}{2}\right).q^{-1}x\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

für ein ungerades n

$$(1+2n)\,q^{-1}x\,(n+1) = 2q^{-1}x\,1\,q^{-1}x\,n + 2q^{-1}x\,2\,q^{-1}x\,(n-1)\ldots$$
$$+2q^{-1}x\left(\frac{n-1}{2}\right).q^{-1}x\left(\frac{n+3}{2}\right) + \left[q^{-1}x\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2$$

Aus diesen Coefficienten der Potenz -1, findet man die Coefficienten der Potenz $+1$, nach der Formel

$$q^{1}\times(n+1) = -\frac{q^{-1}\times n}{2^{2n}-1}$$

und, da der Nenner von $q^{1}\times(n+1)$ keine andern Primzahlen unter seinen Factoren enthalten kann als solche, die nicht 2, und nicht höher als $2n+1$ sind, so dient diese Formel zugleich zur Probe, ob man richtig gerechnet hat. Hieraus finden sich nun die Bernoullischen Zahlen nach der Formel

$$\mathfrak{A}^{n-1} = -\frac{1.2.3.4.\ldots.2n}{2^{2n}}\, q^{1}\times(n+1)$$

und hieraus die logarithmischen Coefficienten nach der Formel

$$\text{Log } q.\times(n+1) = -\frac{2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4.\ldots.2n.2n}$$

Es ist demnach

$q^{-1}\times 1 = 1$ also $q^{1}\times 2 = -\frac{1}{2}$

$3q^{-1}\times 2 = 1$ also $q^{-1}\times 2 = \frac{1}{2}$ und $q^{1}\times 3 = -\frac{1}{3^{2}\cdot 5}$

$5q^{-1}\times 3 = 2q^{-1}\times 1\; q^{-1}\times 2 = \frac{2}{3}$ also $q^{-1}\times 3 = \frac{2}{3\cdot 5}$ und $q^{1}\times 4 = -\frac{2}{3^{3}\cdot 5\cdot 7}$

$7q^{-1}\times 4 = 2q^{-1}\times 1 q^{-1}\times 3 + (q^{-1}\times 2)^{2} = \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{1}{3^{2}} = \frac{17}{3^{2}\cdot 5}$ also

$$q^{-1}\times 4 = \frac{17}{3^{2}\cdot 5\cdot 7} \text{ und } q^{1}\times 5 = -\frac{1}{3^{3}\cdot 5^{2}\cdot 7}$$

$9q^{-1}\times 5 = 2q^{-1}\times 1 q^{-1}\times 4 + 2q^{-1}\times 2\, q^{-1}\times 3 = \frac{34}{3^{2}\cdot 5\cdot 7} + \frac{4}{3^{2}\cdot 5} = \frac{62}{3^{2}\cdot 5\cdot 7}$

also $q^{-1}x5 = \frac{62}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$ und $q^1x6 = -\frac{2}{3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$

$11q^{-1}x6 = 2q^{-1}x1q^{-1}x5 + 2q^{-1}x2q^{-1}x4 + (q^{-1}x3)^2 = \frac{124}{3^4 \cdot 5 \cdot 7}$

$+ \frac{34}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{4}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}$ also $q^{-1}x6 = \frac{1382}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$

und $q^1x7 = -\frac{1382}{3^6 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11\ 13}$

$13q^{-1}x7 = 2q^{-1}x1q^{-1}x6 + 2q^{-1}x2q^{-1}x5 + 2q^{-1}x3q^{-1}x4$

$= \frac{2764}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{124}{3^5 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{68}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$ also

$q^{-1}x7 = \frac{21844}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1x8 = -\frac{4}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$

$15q^{-1}x8 = 2q^{-1}x1q^{-1}x7 + 2q^{-1}x2q^{-1}x6 + 2q^{-1}x3q^{-1}x5 + (q^{-1}x4)^2$

$= \frac{43688}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{2764}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{248}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{289}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{929569}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$

also $q^{-1}x8 = \frac{929569}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$ und $q^1x9 = -\frac{3617}{3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$

Auf diese Art habe ich berechnet

$q^{-1}x1 = 1 = p^{-1}x1$

$q^{-1}x2 = \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}p^{-3}x2$

$q^{-1}x3 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{7}p^{-5}x3$

$q^{-1}x4 = \frac{17}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{1}{7}p^{-7}x4$

$$q^{-1}x\,5 = \frac{62}{3^4\cdot 5\cdot 7} = \tfrac{1}{5}\,p^{-9}x\,5$$

$$q^{-1}x\,6 = \frac{1382}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} = -\tfrac{1}{11}\,p^{-11}x\,6$$

$$q^{-1}x\,7 = \frac{21844}{3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}x\,7$$

$$q^{-1}x\,8 = \frac{929569}{3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} = -\tfrac{1}{15}\,p^{-15}x\,8$$

$$q^{-1}x\,9 = \frac{6404582}{3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}x\,9$$

$$q^{-1}x\,10 = \frac{44386116^2}{3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}x\,10$$

$$q^{-1}x\,11 = \frac{1388846608^4}{3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}x\,11$$

$$q^{-1}x\,12 = \frac{1139274918^{62}}{3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 19\cdot 23} = -\tfrac{1}{23}\,p^{-23}x\,12$$

$$q^{-1}x\,13 = \frac{588706684566^4}{3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \tfrac{1}{25}\,p^{-25}x\,13$$

$$q^{-1}x\,14 = \frac{837464351701068^4}{3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = -\tfrac{1}{27}\,p^{-27}x\,14$$

$$q^{-1}x\,15 = \frac{6890053805056094^{48}}{3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29} = \tfrac{1}{29}\,p^{-29}x\,15$$

$$q^{-1}x\,16 = \frac{1298481636811073019^{53}}{3^{14}\cdot 5^7\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = -\tfrac{1}{31}\,p^{-31}x\,16$$

$$q^{-1}x\,17 = \frac{1736640792209901647222}{3^{15}\cdot 5^7\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = \tfrac{1}{33}\,p^{-33}x\,17$$

$$q^{-1} \times 18 = \frac{41878123149529303891 3922}{3^{13}.5^{8}.7^{5}.11^{3}.13^{2}.17^{2}.19.23.29.31} = -\tfrac{1}{35}\, p^{-35} \times 18$$

und hieraus findet sich

$$q^{1} \times 1 = 1 = p^{1} \times 1$$

$$q^{1} \times 2 = -\tfrac{1}{3} = p^{-1} \times 2$$

$$q^{1} \times 3 = -\frac{1}{3^{2}.5} = -\tfrac{1}{3}\, p^{-3} \times 3$$

$$q^{1} \times 4 = -\frac{2}{3^{3}.5.7} = \tfrac{1}{5}\, p^{-5} \times 4$$

$$q^{1} \times 5 = -\frac{1}{3^{3}.5^{2}.7} = -\tfrac{1}{7}\, p^{-7} \times 5$$

$$q^{1} \times 6 = -\frac{2}{3^{5}.5.7.11.} = \tfrac{1}{9}\, p^{-9} \times 6$$

$$q^{1} \times 7 = -\frac{1382}{3^{6}.5^{3}.7^{2}.11.13} = -\tfrac{1}{11}\, p^{-11} \times 7$$

$$q^{1} \times 8 = -\frac{4}{3^{6}.5^{2}.7.11.13} = \tfrac{1}{13}\, p^{-13} \times 8$$

$$q^{1} \times 9 = -\frac{3617}{3^{7}.5^{4}.7^{2}.11.13.17} = -\tfrac{1}{15}\, p^{-15} \times 9$$

$$q^{1} \times 10 = -\frac{87734}{3^{9}.5^{3}.7^{3}.11.13.17.19} = \tfrac{1}{17}\, p^{-17} \times 10$$

$$q^{1} \times 11 = -\frac{349222}{3^{9}.5^{5}.7^{2}.11^{2}.13.17.19} = -\tfrac{1}{19}\, p^{-19} \times 11$$

$$q^{1} \times 12 = -\frac{310732}{3^{10}.5^{4}.7^{3}.11.13.17.19.23} = \tfrac{1}{21}\, p^{-21} \times 12$$

$$q^{1}x\,13 = -\frac{472728182}{3^{16}\cdot 5^{5}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = -\tfrac{1}{23}\,p^{-23}x\,13$$

$$q^{1}x\,14 = -\frac{2631724}{3^{17}\cdot 5^{6}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \tfrac{1}{25}\,p^{-25}x\,14$$

$$q^{1}x\,15 = -\frac{1357111120588}{3^{14}\cdot 5^{7}\cdot 7^{3}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29} = -\tfrac{1}{27}\,p^{-27}x\,15$$

$$q^{1}x\,16 = -\frac{13785346041608}{3^{15}\cdot 5^{6}\cdot 7^{5}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = \tfrac{1}{29}\,p^{-29}x\,16$$

$$q^{1}x\,17 = -\frac{770932104217}{3^{15}\cdot 5^{8}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17^{2}\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = -\tfrac{1}{31}\,p^{-31}x\,17$$

$$q^{1}x\,18 = -\frac{30325739502}{3^{16}\cdot 5^{7}\cdot 7^{4}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = \tfrac{1}{33}\,p^{-33}x\,18$$

$$q^{1}x\,19 = -\frac{526305431061069547461}{3^{18}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{3}\cdot 13^{3}\cdot 17^{2}\cdot 19^{2}\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37} = -\tfrac{1}{35}\,p^{-35}x\,19$$

Um ein Beyspiel von einer solchen Rechnung zu geben, suche man, aus $q^{-1}x\,1$, $q^{-1}x\,2 \ldots q^{-1}x\,15$, den Werth von $q^{-1}x\,16$. Es ist erstlich

$$31\,q^{-1}x\,16 = q^{-2}x\,15 = 2q^{-1}x\,1\;q^{-1}x\,15 + 2q^{-1}x\,2\;q^{-1}x\,14$$
$$+ 2q^{-1}x\,3\;q^{-1}x\,13 + 2q^{-1}x\,4\;q^{-1}x\,12 + 2q^{-1}x\,5\;q^{-1}x\,11$$
$$+ 2q^{-1}x\,6\,q^{-1}x\,10 + 2q^{-1}x\,7\;q^{-1}x\,9 + (q^{-1}x\,8)^{2}$$

Nun ist, $3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29 = m$ gesetzt;

$$\left.\begin{aligned}
2q^{-1}\times 1\ q^{-1}\times 15 &= 2067016141516828344 0\\
2q^{-1}\times 2\ q^{-1}\times 14 &= 1709052633953168852 0\\
2q^{-1}\times 3\ q^{-1}\times 13 &= 1677884695815361924 8\\
2q^{-1}\times 4\ q^{-1}\times 12 &= 1675720172813465610 0\\
2q^{-1}\times 5\ q^{-1}\times 11 &= 1675488728708943720 0\\
2q^{-1}\times 6\ q^{-1}\times 10 &= 1675463336675151660 0\\
2q^{-1}\times 7\ q^{-1}\times 9 &= 1675460531429669880 0\\
q^{-1}\times 8\ q^{-1}\times 8 &= 8377301271981402045
\end{aligned}\right\} : m$$

und $31\,q^{-1}\times 16 = \dfrac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29}$

also $q^{-1}\times 16 = \dfrac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29.31}$

und da $2^{32}-1 = 4294967295 = 3.5.17.16843009$, so ist

$$q^1\times 17 = \frac{1}{2}\,\frac{q^{-1}\times 16}{2^{32}-1} = -\frac{770932104 1217}{3^5.5^4.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31}$$

Daß nehmlich der Zähler von $q^{-1}\times 16$ durch den Factor 16843009 von $2^{32}-1$ sich ohne Rest dividiren läßt, dient zur Probe, daß $q^{-1}\times 16$ richtig berechnet worden ist. Der Quotient von der gedachten Division ist der Zähler von $q^1\times 17$. Bey dieser Art die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen, zeigt sich der merkwürdige Umstand, daß jede zwo zunächst auf einander folgende Zahlen der Verhältniß 1: 1 immer näher und näher kommen, oder immer mehr Ziffern, von der Linken nach der Rechten zu gerechnet, mit einander gemein haben, je weiter man herunterkommt. Die letzte Zahl hat die mehrsten Ziffern mit der vorhergehenden, oder (wenn wie hier ein gerader Coefficient gesucht wird) mit der Hälfte der vorher-

gehenden Zahl gemein. Uebrigens ist die hier angezeigte Methode die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen einerley mit der, welcher sich Herr Eschenbach in seinem Aufsatze: Commentatio in locum Kaestnerianum de multipli angulorum tangentibus Seite 13 und 14 bedient hat.

Eine andere Art die Coefficienten von q^r, mithin auch von q^{-r}, zu berechnen ergiebt sich aus der Formel C), wenn man darinnen $m = 1$ setzt, man erhält dann

$$q^2x\,(n+1) = (1-2n)\,q^1x\,(n+1) - q^0x\,n$$

also für $n = 0$

$$q^2x\,1 = q^1x\,1 \text{ mithin } q^1x\,1 = 1$$

für $n = 1$

$$q^2x\,2 = -q^1x\,2 - q^0x\,1$$

oder

$$2\,q^1x\,1\,q^1x\,2 = -q^1x\,2 - 1 \text{ und da } q^1x\,1 = 1$$

$$2\,q^1x\,2 = -q^1x\,2 - 1 \text{ oder } 3\,q^1x\,2 = -1 \text{ und } q^1x\,2 = -\tfrac{1}{3}$$

Für jedes n das größer als 1 ist hat man aber

$q^2x\,(n+1) = (1-2n)\,q^1x\,(n+1)$ also,

für ein gerades n

$$(1-2n)q^1x(n+1) = 2q^1x(n+1) + 2\,q^1x2.\,q^1xn + 2q^1x3.q^1x(n-1)$$

$$+ 2q^1x\frac{n}{2}.q^1x\left(\frac{n}{2}+2\right) + \left[q^1x\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^2 \text{ und}$$

$$-(1+2n)\,q^1x\,(n+1) = 2q^1x\,2.\,q^1xn + 2q^1x\,3.\,q^1x\,(n-1)$$

$$+2q^1x4.q^1x(n-2)\ldots+2q^1x\frac{n}{2}.q^1x\left(\frac{n}{2}+2\right) + \left\{q^1x\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}^2$$

für ein ungerades n

$$(1-2n)q^1x(n+1)=2q^1x(n+1)+2q^1x2.q^1xn+2q^1x3.q^1x(n-1)$$
$$\ldots + 2q^1x\left(\frac{n+1}{2}\right).q^1x\left(\frac{n+3}{2}\right) \text{ und}$$
$$-(1+2n)\,q^1x\,(n+1) = 2q^1x2.\,q^1xn + 2q^1x3.\,q^1x\,(n-1)$$
$$+2q^1x4.\,q^1x\,(n-2) \ldots + 2q^1x\left(\frac{n+1}{2}\right).q^1x\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

Vermittelst dieser Formeln kann man aus den Werthen von q^1x2, q^1x3, q^1x4, q^1x5, $\ldots q^1xn$, den Werth von $q^1x(n+1)$ berechnen. Z. B. Man suchte q^1x17 so hat man für $n=16$

$$-33\,q^1x17 = 2q^1x2.\,q^1x16 + 2q^1x3.\,q^1x15 + 2q^1x4.\,q^1x14$$
$$+2\,q^1x5.\,q^1x13 + 2\,q^1x6.\,q^1x12 + 2q^1x7.\,q^1x11$$
$$+2q^1x8.\,q^1x10 + (q^1x9)^2$$

Nun ist, $3^{16}.5^8.7^5.11^3.13^2.17^2.19.23.29.31=r$ gesetzt,

$$\left.\begin{array}{rl} 2\,q^1x2\,q^1x16 &= 11717544135366800 \\ 2\,q^1x3\,q^1x15 &= 7709835032766328 \\ 2\,q^1x4\,q^1x14 &= 7246954535380560 \\ 2\,q^1x5\,q^1x13 &= 7152457757450940 \\ 2\,q^1x6\,q^1x12 &= 7130499109734000 \\ 2\,q^1x7\,q^1x11 &= 7125172413627912 \\ 2\,q^1x8\,q^1x10 &= 7123876129986000 \\ q^1x9\,q^1x9 &= 3561815182884651 \end{array}\right\} : r$$

$$\text{also } q^1x17 = -\frac{587681542971971911}{3^{17}.5^8.7^5.11^4.13^2.17^2.19.23.29.31}$$
$$= -\frac{77093210412171}{3^{15}.5^8.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31}$$

Vergleicht man diese Rechnung mit der obern, durch welche eben diese Bernoullische Zahl wie hier bestimmt wird, so erhellet, daß man zwar hier nicht mit so großen Zahlen wie dort zu rechnen hat, dagegen hat aber jene Methode den Vorzug, daß man nach geendigter Rechnung eine so leichte Probe von der Richtigkeit derselben machen kann, welche hier nicht statt findet.

8. Aus diesen berechneten Werthen der Coefficienten von q^{-z} oder q^{z} findet man nun für die Bernoullischen Zahlen folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{42} = \frac{1}{2.3.7}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{66} = \frac{5}{2.3.11}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730} = \frac{691}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{7}{6} = \frac{7}{2.3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{510} = \frac{3617}{2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{43867}{798} = \frac{43867}{2.3.7.19}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{174611}{330} = \frac{174611}{2.3.5.11}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{138} = \frac{11.77683}{2.3.23}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730} = \frac{236364091}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6} = \frac{13.657931}{2.3}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{2374946\,1029}{870 = 2.3.5.29}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322} = \frac{5.1723168255201}{2.3.7.11.31}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{7709321041217}{510 = 2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2577687858367}{6} = \frac{17.151628697551}{2.3}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{263152715530534773\,73}{1919190 = 2.3.5.7.13.19.37}$$

also noch 3 Bernoullische Zahlen mehr, als Euler berechnet hat, und daraus findet man für die Coefficienten von log q folgende Werthe

$$2\log q. \varkappa 2 = -\tfrac{2}{3} = p^{-2} \varkappa 2$$

$$4\log q. \varkappa 3 = -\frac{14}{3^2.5} = -p^{-4} \varkappa 3$$

$$6\log q. \varkappa 4 = -\frac{124}{3^3.5.7} = p^{-6} \varkappa 4$$

$$q^{-1}\varkappa 5 = \frac{62}{3^4.5.7} = \tfrac{1}{5}\,p^{-9}\varkappa 5$$

$$q^{-1}\varkappa 6 = \frac{1382}{3^4.5^2.7.11} = -\tfrac{5}{11}\,p^{-11}\varkappa 6$$

$$q^{-1}\varkappa 7 = \frac{21844}{3^5.5^2.7.11.13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}\varkappa 7$$

$$q^{-1}\varkappa 8 = \frac{929569}{3^6.5^3.7^2.11.13} = -\tfrac{7}{15}\,p^{-15}\varkappa 8$$

$$q^{-1}\varkappa 9 = \frac{6404582}{3^6.5^3.7^2.11.13.17} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}\varkappa 9$$

$$q^{-1}\varkappa 10 = \frac{443861162}{3^8.5^3.7^2.11.13.17.19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}\varkappa 10$$

$$q^{-1}\varkappa 11 = \frac{18888466084}{3^9.5^4.7^3.11.13.17.19} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}\varkappa 11$$

$$q^{-1}\varkappa 12 = \frac{1139274918 62}{3^9.5^4.7^3.11^2.13.19.23} = -\tfrac{1}{23}\,p^{-23}\varkappa 12$$

$$q^{-1}\varkappa 13 = \frac{588706684566 04}{3^{10}.5^6.7^3.11^2.13.17.19.23} = \tfrac{1}{25}\,p^{-25}\varkappa 13$$

$$q^{-1}\varkappa 14 = \frac{8374643517010684}{3^{13}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23} = -\tfrac{1}{27}\,p^{-27}\varkappa 14$$

$$q^{-1}\varkappa 15 = \frac{689005380505609448}{3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29} = \tfrac{1}{29}\,p^{-29}\varkappa 15$$

$$q^{-1}\varkappa 16 = \frac{1298481636811073019 53}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29.31} = -\tfrac{1}{31}\,p^{-31}\varkappa 16$$

$$q^{-1}\varkappa 17 = \frac{1736640792209901647222}{3^{15}.5^7.7^4.11^3.13^2.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{33}\,p^{-33}\varkappa 17$$

$$q^{-1}\varkappa\,18 = \frac{418781231495293938913922}{3^{19}\cdot 5^{8}\cdot 7^{5}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 17^{2}\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31} = -\tfrac{1}{35}\,p^{-35}\varkappa\,18$$

und hieraus findet sich

$$q^{1}\varkappa\,1 = 1 = p^{1}\varkappa\,1$$

$$q^{1}\varkappa\,2 = -\tfrac{1}{1} = p^{-1}\varkappa\,2$$

$$q^{1}\varkappa\,3 = -\frac{1}{3^{2}\cdot 5} = -\tfrac{1}{3}\,p^{-3}\varkappa\,3$$

$$q^{1}\varkappa\,4 = -\frac{2}{3^{3}\cdot 5\cdot 7} = \tfrac{1}{3}\,p^{-5}\varkappa\,4$$

$$q^{1}\varkappa\,5 = -\frac{1}{3^{3}\cdot 5^{2}\cdot 7} = -\tfrac{1}{7}\,p^{-7}\varkappa\,5$$

$$q^{1}\varkappa\,6 = -\frac{2}{3^{5}\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \tfrac{1}{5}\,p^{-9}\varkappa\,6$$

$$q^{1}\varkappa\,7 = -\frac{1382}{3^{6}\cdot 5^{3}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13} = -\tfrac{1}{11}\,p^{-11}\varkappa\,7$$

$$q^{1}\varkappa\,8 = -\frac{4}{3^{6}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 11\cdot 13} = \tfrac{1}{13}\,p^{-13}\varkappa\,8$$

$$q^{1}\varkappa\,9 = -\frac{3617}{3^{7}\cdot 5^{4}\cdot 7^{2}\cdot 11\cdot 13\cdot 17} = -\tfrac{1}{15}\,p^{-15}\varkappa\,9$$

$$q^{1}\varkappa\,10 = -\frac{87734}{3^{9}\cdot 5^{3}\cdot 7^{3}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = \tfrac{1}{17}\,p^{-17}\varkappa\,10$$

$$q^{1}\varkappa\,11 = -\frac{349222}{3^{9}\cdot 5^{5}\cdot 7^{2}\cdot 11^{2}\cdot 13\cdot 17\cdot 19} = -\tfrac{1}{19}\,p^{-19}\varkappa\,11$$

$$q^{1}\varkappa\,12 = -\frac{310732}{3^{10}\cdot 5^{4}\cdot 7^{3}\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \tfrac{1}{21}\,p^{-21}\varkappa\,12$$

$$q^1 \times 13 = -\frac{47272818 2}{3^{16}.5^5.7^4.11^2.13^2.17.19.23} = -\tfrac{1}{2^3}\, p^{-23} \times 13$$

$$q^1 \times 14 = -\frac{2631724}{3^{11}.5^6.7^3.11^2.13.17.19.23} = \tfrac{1}{2^3}\, p^{-25} \times 14$$

$$q^1 \times 15 = -\frac{1357111 20588}{3^{14}.5^7.7^3.11^2.13^2.17.19.23.29} = -\tfrac{1}{2^7}\, p^{-27} \times 15$$

$$q^1 \times 16 = -\frac{1378534604 1608}{3^{15}.5^6.7^5.11^3.13^2.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{2^5}\, p^{-29} \times 16$$

$$q^1 \times 17 = -\frac{770932104 12 17}{3^{15}.5^8.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31} = -\tfrac{1}{3^1}\, p^{-31} \times 17$$

$$q^1 \times 18 = -\frac{30325739 5102}{3^{16}.5^7.7^4.11^3.13^2.17.19.23.29.31} = \tfrac{1}{3^3}\, p^{-33} \times 18$$

$$q^1 \times 19 = -\frac{526305431061069547461}{3^{18}.5^9.7^6.11^3.13^3.17^2.19^2.23.29.31.37} = -\tfrac{1}{3^5}\, p^{-35} \times 19$$

Um ein Beyspiel von einer solchen Rechnung zu geben, suche man, aus $q^{-1} \times 1, q^{-1} \times 2 \ldots q^{-1} \times 15$, den Werth von $q^{-1} \times 16$. Es ist erstlich

$$31\, q^{-1} \times 16 = q^{-2} \times 15 = 2q^{-1} \times 1\, q^{-1} \times 15 + 2q^{-1} \times 2\, q^{-1} \times 14$$
$$+ 2q^{-1} \times 3\, q^{-1} \times 13 + 2q^{-1} \times 4\, q^{-1} \times 12 + 2q^{-1} \times 5\, q^{-1} \times 11$$
$$+ 2q^{-1} \times 6\, q^{-1} \times 10 + 2q^{-1} \times 7\, q^{-1} \times 9 + (q^{-1} \times 8)^2$$

Nun ist, $3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29 = m$ gesetzt;

$$\left.\begin{aligned}
2q^{-1}\times 1\ q^{-1}\times 15 &= 2067016141516828344 0\\
2q^{-1}\times 2\ q^{-1}\times 14 &= 1709052633953168852 0\\
2q^{-1}\times 3\ q^{-1}\times 13 &= 1677884695815361924 8\\
2q^{-1}\times 4\ q^{-1}\times 12 &= 1675720172813465610 0\\
2q^{-1}\times 5\ q^{-1}\times 11 &= 1675488728708943720 0\\
2q^{-1}\times 6\ q^{-1}\times 10 &= 1675463336675151660 0\\
2q^{-1}\times 7\ q^{-1}\times 9 &= 1675460531429669880 0\\
q^{-1}\times 8\ q^{-1}\times 8 &= 8377301271981402045
\end{aligned}\right\} : m$$

$$\text{und } 31\,q^{-1}\times 16 = \frac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29}$$

$$\text{also } q^{-1}\times 16 = \frac{129848163681107301953}{3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29.31}$$

und da $2^{32}-1 = 4294967295 = 3.5.17.16843009$, so ist

$$q^1\times 17 = \frac{q^{-1}\times 16}{2^{32}-1} = -\frac{770932104 1217}{3^5.5^4.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31}$$

Daß nehmlich der Zähler von $q^{-1}\times 16$ durch den Factor 16843009 von $2^{32}-1$ sich ohne Rest dividiren läßt, dient zur Probe, daß $q^{-1}\times 16$ richtig berechnet worden ist. Der Quotient von der gedachten Division ist der Zähler von $q^1\times 17$. Bey dieser Art die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen, zeigt sich der merkwürdige Umstand, daß jede zwo zunächst auf einander folgende Zahlen der Verhältniß 1: 1 immer näher und näher kommen, oder immer mehr Ziffern, von der Linken nach der Rechten zu gerechnet, mit einander gemein haben, je weiter man herunterkommt. Die letzte Zahl hat die mehrsten Ziffern mit der vorhergehenden, oder (wenn wie hier ein gerader Coefficient gesucht wird) mit der Hälfte der vorher-

gehenden Zahl gemein. Uebrigens ist die hier angezeigte Methode die Coefficienten von q^{-1} zu berechnen einerley mit der, welcher sich Herr Eschenbach in seinem Aufsatze: Commentatio in locum Kaestnerianum de multipli angulorum tangentibus Seite 13 und 14 bedient hat.

Eine andere Art die Coefficienten von q^1, mithin auch von q^{-1}, zu berechnen ergiebt sich aus der Formel C) wenn man darinnen $m = 1$ setzt, man erhält dann

$$q^2\varkappa\,(n+1) = (1-2n)\,q^1\varkappa\,(n+1) - q^0\varkappa\,n$$

also für $n = 0$

$$q^2\varkappa\,1 = q^1\varkappa\,1 \text{ mithin } q^1\varkappa\,1 = 1$$

für $n = 1$

$$q^2\varkappa\,2 = -q^1\varkappa\,2 - q^0\varkappa\,1$$

oder

$$2\,q^1\varkappa\,1\,.\,q^1\varkappa\,2 = -q^1\varkappa\,2 - 1 \text{ und da } q^1\varkappa\,1 = 1$$

$$2\,q^1\varkappa\,2 = -q^1\varkappa\,2 - 1 \text{ oder } 3\,q^1\varkappa\,2 = -1 \text{ und } q^1\varkappa\,2 = -\tfrac{1}{3}$$

Für jedes n das größer als 1 ist hat man aber

$q^2\varkappa\,(n+1) = (1-2n)\,q^1\varkappa\,(n+1)$ also,

für ein gerades n

$$(1-2n)q^1\varkappa(n+1) = 2q^1\varkappa(n+1) + 2q^1\varkappa 2.\,q^1\varkappa n + 2q^1\varkappa 3.q^1\varkappa(n-1)$$

$$\ldots + 2q^1\varkappa\frac{n}{2}.q^1\varkappa\left(\frac{n}{2}+2\right) + \left[q^1\varkappa\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^2 \text{ und}$$

$$-(1+2n)\,q^1\varkappa\,(n+1) = 2q^1\varkappa 2.\,q^1\varkappa n + 2q^1\varkappa 3.\,q^1\varkappa\,(n-1)$$

$$+2q^1\varkappa 4.q^1\varkappa(n-2)\ldots + 2q^1\varkappa\frac{n}{2}.q^1\varkappa\left(\frac{n}{2}+2\right) + \left\{q^1\varkappa\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}^2$$

für ein ungerades n

$$(1-2n)q^1x(n+1)=2q^1x(n+1)+2q^1x2.q^1xn+2q^1x3.q^1x(n-1)$$
$$\ldots + 2q^1x\left(\frac{n+1}{2}\right).q^1x\left(\frac{n+3}{2}\right) \text{ und}$$
$$-(1+2n)q^1x(n+1)=2q^1x2.q^1xn+2q^1x3.q^1x(n-1)$$
$$+2q^1x4.q^1x(n-2)\ldots+2q^1x\left(\frac{n+1}{2}\right).q^1x\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

Vermittelst dieser Formeln kann man aus den Werthen von q^1x2, q^1x3, q^1x4, q^1x5, $\ldots q^1xn$, den Werth von $q^1x(n+1)$ berechnen. Z. B. Man suchte q^1x17 so hat man für $n=16$

$$-33q^1x17=2q^1x2.q^1x16+2q^1x3.q^1x15+2q^1x4.q^1x14$$
$$+2q^1x5.q^1x13+2q^1x6.q^1x12+2q^1x7.q^1x11$$
$$+2q^1x8.q^1x10+(q^1x9)^2$$

Nun ist, $3^{16}.5^8.7^5.11^3.13^2.17^2.19.23.29.31=r$ gesetzt,

$$\left.\begin{array}{rl} 2q^1x2\,q^1x16 &= 11717544135366800\\ 2q^1x3\,q^1x15 &= 7709835032766328\\ 2q^1x4\,q^1x14 &= 7246954535380560\\ 2q^1x5\,q^1x13 &= 7152457757450940\\ 2q^1x6\,q^1x12 &= 7130499109734000\\ 2q^1x7\,q^1x11 &= 7125172413627912\\ 2q^1x8\,q^1x10 &= 7123876129986000\\ q^1x9\,q^1x9 &= 3561815182884651 \end{array}\right\} : r$$

$$\text{also } q^1x17=-\frac{587681542971971 91}{3^{17}.5^8.7^5.11^4.13^2.17^2.19.23.29.31}$$
$$=-\frac{7709321041217}{3^{15}.5^8.7^4.11^2.13^2.17^2.19.23.29.31}$$

Vergleicht man diese Rechnung mit der obern, durch welche eben diese Bernoullische Zahl wie hier bestimmt wird, so erhellet, daß man zwar hier nicht mit so großen Zahlen wie dort zu rechnen hat, dagegen hat aber jene Methode den Vorzug, daß man nach geendigter Rechnung eine so leichte Probe von der Richtigkeit derselben machen kann, welche hier nicht statt findet.

8. Aus diesen berechneten Werthen der Coefficienten von q^{-1} oder q^{1} findet man nun für die Bernoullischen Zahlen folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{42} = \frac{1}{2.3.7}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{66} = \frac{5}{2.3.11}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730} = \frac{691}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{7}{6} = \frac{7}{2.3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{510} = \frac{3617}{2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{43867}{798} = \frac{43867}{2.3.7.19}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{174611}{330} = \frac{174611}{2.3.5.11}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{138} = \frac{11.77683}{2.3.23}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730} = \frac{236364091}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6} = \frac{13.657931}{2.3}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{2374946\,1029}{870 = 2.3.5.29}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322} = \frac{5.172316825520\,1}{2.3.7.11.31}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{77093210412\,17}{510 = 2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2577687858367}{6} = \frac{17.151628697551}{2.3}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{263152715530534773\,73}{1919190 = 2.3.5.7.13.19.37}$$

also noch 3 Bernoullische Zahlen mehr, als Euler berechnet hat, und daraus findet man für die Coefficienten von log q folgende Werthe

$$2 \log q. \varkappa 2 = -\frac{2}{3} = p^{-2} \varkappa 2$$

$$4 \log q. \varkappa 3 = -\frac{14}{3^2.5} = -p^{-4} \varkappa 3$$

$$6 \log q. \varkappa 4 = -\frac{124}{3^3.5.7} = p^{-6} \varkappa 4$$

$$8 \log q. \varkappa 5 = -\frac{254}{3^3.5^2.7} = -p^{-8} \varkappa 5$$

$$10 \log q. \varkappa 6 = -\frac{292}{3^3.5.11} = p^{-10} \varkappa 6$$

$$12 \log q. \varkappa 7 = -\frac{5657908}{3^6.5^3.7^2.11.13} = -p^{-12} \varkappa 7$$

$$14 \log q. \varkappa 8 = -\frac{65528}{3^6.5^2.7.11.13} = p^{-14} \varkappa 8$$

$$16 \log q. \varkappa 9 = -\frac{33862354}{3^7.5^4.7.11.13.17} = -p^{-16} \varkappa 9$$

$$18 \log q. \varkappa 10 = -\frac{212998766228}{3^9.5^3.7^3.11.13.17.19} = p^{-18} \varkappa 10$$

$$20 \log q. \varkappa 11 = -\frac{366185109428}{3^9.5^5.7^2.11^2.13.17.19} = -p^{-20} \varkappa 11$$

$$22 \log q. \varkappa 12 = -\frac{2659803773 6}{3^{10}.5^4.7.11.13.17.19.23} = p^{-22} \varkappa 12$$

Mehrere solche logarithmische Coefficienten von q könnte man entweder aus den vorhin angegebenen Bernoullischen Zahlen nach der Formel

$$2n \log q. \varkappa(n+1) = -\frac{2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)\,\mathfrak{A}^{n-1}}{1.2.3.4\ldots.2n}$$

oder aus dem Coefficienten von q^1 nach der Formel

$$2n \log q. \varkappa (n+1) = (2^{2n}-2)\, q^1 \varkappa (n+1)$$

berechnen.

(Mehrere Anwendungen auf Potenzen besonderer merkwürdiger Reihen, künftig.)

Erläuterung über logarithmische Lokalausdrücke.

Es ist $\text{Log}\,(ax^{\alpha}+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}\ldots)$

$$= \text{Log}\,(ax^{\alpha}) + \text{Log}\left(1+\frac{bx^{\beta}+cx^{2\beta}+dx^{3\beta}\ldots}{a}\right)$$

$$= \text{Log}\,(ax^{\alpha}) + \text{Log}\left(1+\frac{y}{a}\right)$$

$$= \text{Log}\,(ax^{\alpha}) + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + \ldots$$

wenn man $y = bx^{\beta}+cx^{2\beta}+dx^{3\beta}+ex^{4\beta}\ldots$ setzt.

In diesem Falle ist für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} b & c & d & e & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{a^1A}{a}x^{\beta} + \frac{a^2A}{a}x^{2\beta} + \frac{a^3A}{a}x^{3\beta} + \frac{a^4A}{a}x^{4\beta} + \frac{a^5A}{a}x^{5\beta} + \ldots$$

$$-\frac{y^2}{2a^2} = -\frac{b^2B}{2a^2}x^{2\beta} - \frac{b^3B}{2a^2}x^{3\beta} - \frac{b^4B}{2a^2}x^{4\beta} - \frac{b^5B}{2a^2}x^{5\beta} - \ldots$$

$$+\frac{y^3}{3a^3} = +\frac{c^3C}{3a^3}x^{3\beta} + \frac{c^4C}{3a^3}x^{4\beta} + \frac{c^5C}{3a^3}x^{5\beta} + \ldots$$

$$-\frac{y^4}{4a^4} = -\frac{b^4D}{4a^4}x^{4\beta} - \frac{b^5D}{4a^4}x^{5\beta} - \ldots$$

$$+\frac{y^5}{5a^5} = +\frac{e^5E}{5a^5}x^{5\beta} + \ldots$$

u. s. w. u. s. w.

also $\text{Log}\,(ax^{\alpha}+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}+\ldots)$

$$= \text{Log}\,(ax^{\alpha}) + \frac{a^1A}{a}x^{\beta} + \left(\frac{a^2A}{a} - \frac{b^2B}{2a^2}\right)x^{2\beta} +$$

$$+\left(\frac{a^3A}{a}-\frac{b^3B}{2a^2}+\frac{c^3C}{3a^3}\right)x^{3\beta}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{a^nA}{a}-\frac{b^nB}{2a^2}+\frac{c^nC}{3a^3}-\frac{b^nD}{4a^4}\ldots+\frac{n^nN}{na^n}\right)x^{n\beta}+\ldots$$

wofür man kurz ſetzen kann

$$\mathrm{Log}\,(ax^\alpha+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}+\ldots)$$
$$=\mathrm{Log}\,(ax^\alpha)+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2\,x^\beta+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3\,x^{2\beta}$$
$$+\ldots+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa(n+1).\,x^{n\beta}+\ldots.$$

für die Scale $\mathrm{p}[a,\ b,\ c,\ d,\ e\ldots]$.

Es erhellet hieraus, daß $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 1$ niemals vorkommt, ſondern blos $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2$, $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3$ u. ſ. w. und daß für den Zeiger und die Scale

$$\mathrm{p}\begin{bmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Lp}\varkappa(n+1)\begin{cases}=\dfrac{a^nA}{a}-\dfrac{b^nB}{2a^2}+\dfrac{c^nC}{3a^3}-\dfrac{b^nD}{4a^4}+\ldots+\dfrac{-n^nN}{na^n}\\[2ex] =\dfrac{a^nA}{a}+\dfrac{-{}^1\mathfrak{A}b^nB}{2a^2}+\dfrac{-{}^1\mathfrak{B}c^nC}{3a^3}+\dfrac{-{}^1\mathfrak{C}d^nD}{4a^4}+\ldots+\dfrac{-{}^1\mathfrak{N}^{-1}n^nN}{na^n}\end{cases}$$

Nun iſt

$$\frac{\mathrm{p}^m\varkappa(n+1)}{m}=a^m\left(\frac{a^nA}{a}+\frac{m-{}^1\mathfrak{A}b^nB}{2a^2}+\frac{m-{}^1\mathfrak{B}c^nC}{3a^3}+\ldots+\frac{m-{}^1\mathfrak{N}^{-1}n^nN}{na^n}\right)$$

welcher Ausdruck, für $m=0$, in $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa(n+1)$ übergeht.

XII.

Verſchiedene combinatoriſch-analytiſch bearbeitete Aufgaben; von Herrn D. Chriſtian Kramp[a]).

Vorerinnerung des Herausgebers.

Nachfolgende Aufgaben waren ſchon im May 1796, alſo noch vor dem Abdrucke der erſten Sammlung combinatoriſch-analytiſchen Abhandlungen, in meinen Händen. Sie konnten aber dort (a. a. O. S. 113, 1) nicht Platz finden, und ſollten daher im mathematiſchen Archive nachgeliefert werden. Jetzt führe ich ſie, als Fortſetzung jener Aufgaben in der erſten Sammlung, nun in der zweyten auf, wo ſie auch eigentlich hingehören.

Hindenburg.

VII. Aufgabe.

I.

Mit Beybehaltung (E. S. c. a. A. S. 114, V) von

$$\frac{dy}{dx} = p;\ \frac{dp}{dx} = 2q;\ \frac{dq}{dx} = 3r;\ \frac{dr}{dx} = 4s \text{ u. ſ. w.}$$

ſey auch

a) Jetzt Profeſſeur de Chymie et de Phyſique expérimentale à l'école centrale du Département de la Roer zu Cöln. H.

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = 2q; \quad \frac{dq}{dy} = 3r; \quad \frac{dr}{dy} = 4s \text{ u. ſ. w.}$$

Die Glieder beyder Reihen ſeyen Functionen von x, nicht von y. Die Glieder p, q, r, s ... der erſtern Reihe werden als gegeben vorausgeſetzt; man ſucht p, q, r, s ... die Glieder der letztern.

Auflöſung.

2. Es iſt [b])

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{dx}{dy} = p = {}^{0}p = \frac{\Pi^{-1} \times 1}{1}$$

$$\frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = q = {}^{1}p = \frac{\Pi^{-2} \times 2}{2}$$

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3x}{dy^3} = r = {}^{2}p = \frac{\Pi^{-3} \times 3}{3}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4x}{dy^4} = s = {}^{3}p = \frac{\Pi^{-4} \times 4}{4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{1.2.3.4 \ldots n} \cdot \frac{d^nx}{dy^n} = {}^{n-1}p = \frac{\Pi^{-n} \times n}{n}$$

für die Scale Π [p, q, r, s ...]

b) Was hier (in 2 und 3) ſteht, habe ich der Auflöſung, die Herr Prof. Kramp ſogleich mit (4) beginnt, vorangeſetzt. Die Lokalzeichen (in 2) ſind nichts anders als bequeme Ausdrücke für die Coefficienten, wie ſie Herr K. (in 7) fordert: Coefficienten nähmlich der Glieder $x^0, x^1, x^2 \ldots x^{n-1}$, der Potenzen $-1, -2, -3 \ldots -n$, des Infinitinoms $p + qx + rx^2 + sx^3 \ldots$ durch die Gliederzahlen, $1, 2, 3 \ldots n$ dividirt; welche Coefficienten ſich combinatoriſch (nach 3) leicht finden und angeben laſſen. Es wird für manche Leſer nützlich ſeyn, die Norm der Entwickelung (in 2 und 3) voraus angegeben zu haben, welche nachher (in 6, 7) bewieſen wird. S.

3. Für diese Scale, oder, wenn man $\Pi = (p + qx^1 + rx^2 + sx^3 + \text{etc})^{-n}$ setzt, findet man leicht die Werthe der Lokalausdrücke für die p, q, r, s ... in (2). Hiezu dient unter andern die combinatorische Formel (E. S. c. a. A. S. 233) für p^m, wenn man für

die dortigen p, m, a, b, c, d ... z
hier Π, −n, p, q, r, s ... x

und für n, nach und nach 1, 2, 3, 4 ... setzt.

4. Daraus ergiebt sich

$pp = 1$

$p^3q = -q$

$p^5r = -pr + 2qq$

$p^7s = -p^2s + 5pqr - 5q^3$

$p^9t = -p^3t + p^2(6qs + 3rr) - 21pq^2r + 14q^4$

$p^{11}u = -p^4u + p^3(7qt + 7rs) - p^2(28q^2s + 28qr^2) + 84pq^3r - 42q^5$

$p^{13}v = -p^5v + p^4(8qu + 8rt + us^2) - p^3(36q^2t + 72qrs + 12r^3)$
$+ p^2(120q^3s + 180q^2r^2) - 330pq^4r + 132q^6$

$p^{15}w = -p^6w + p^5(9qv + 9ru + 9st) - p^4(45q^2u + 90qrt$
$+ 45qs^2 + 45r^2s) + p^3(165q^3t + 495q^2rs + 165qr^3)$
$- p^2(495q^4s + 990q^3r^2) + p(1287q^5r) - 429q^7$

etc etc etc etc

5. Und nun das allgemeine Gesetz: für das Differentialverhältniß vom Grade n; oder für

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.\ldots n} \cdot \frac{d^n x}{dy^n}$$

Es ist dasselbe =

$$\frac{+}{1}\int \frac{n+1.n+2....n+(\beta+\gamma+\delta+\text{etc})-1}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc.}} \cdot \frac{q^{\beta} r^{\gamma} s^{\delta} t^{\varepsilon} \text{ etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\text{ etc}}}$$ c)

wo die unbestimmte Gleichung ist $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-1$.

Setzt man hier den Faktoren im Zähler des Coefficienten noch den Faktor n vor, so wird aus ihm der Polynomial-Coefficient des Gliedes $\frac{q^{\beta} r^{\gamma} s^{\delta} t^{\varepsilon} \text{ etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{ etc}}}$; mit der einzigen Modification, die der verneinte Zustand des Exponenten von p nothwendig macht. Der Beweis dieses Satzes ist folgender:

6. Der Exponent von p, den wir sonst a genannt haben, ist hier $-(n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc})$. Folglich die Summe der Exponenten, oder $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc}$, die in der (ersten Aufgabe (S. S. c. a. A. S. 102. 3. Zus.) m hieß, ist hier $-n$. Man setze daher $-m$ an die Stelle von n, so erhält der vorher mit n multiplicirte Coefficient folgende Form:

$$\frac{+(-m)(-m+1)(-m+2)....(-m+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}-1)}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc}}$$

Und da hier das obere Zeichen + für diejenigen Fälle gilt,

c) Dieser Ausdruck ist mit jenem (S. S. c. a. A. S. 114. Aufl.) durch das dortige $\alpha=n+\beta+\gamma+\text{etc}$ (das. no. 2) verkürzten, einerley. Beyde Aufgaben nähmlich, die dortige und die hiesige (1) sind vollkommen dieselben; nur ist, was dort blos angegeben ist, hier mehr auseinandergesetzt und erwiesen worden. H.

wo $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc eine gerade Zahl ist; das untere Zeichen $\mp$ für diejenigen, wo eben dieses $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc ungerade wird; in den ersten Fällen aber, die sämmtlichen verneinten Faktoren des Zählers ein wirklich bejahtes, in den letzten aber ein verneintes Produkt ausmachen müssen; so ist folglich der aufgestellte Coefficient weder mehr noch weniger, als

$$\frac{m(m-1)\ldots(\alpha+1)}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\eta'\text{ etc}} \mp \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\eta'\text{ etc}};$$ also

der wirkliche Polynomialcoefficient des Produkts $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. Bezeichnet man diesen Polynomialcoefficienten, wie oben (E. S. c. a. A. S. 102. 2. Aufl.) mit K, so wird das gesuchte Differentialverhältniß vom Grade n gleich

$$\frac{1}{n}\int K p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon \text{ etc (daſ. 103. 5)}$$

wobey $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$

und da zugleich $\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$

so folgt daraus, $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\text{etc}=-1$.

7. Allein, für den besondern Fall, wo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$, und $\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$, ist $\int K p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon$ etc offenbar der Coefficient des Gliedes x^{n-1}, in der unbestimmten Potenz des Infinitinoms

$$(p+qx+rx^2+sx^3+\text{etc})^{-n}.$$

Folglich ist das gesuchte Differentialverhältniß vom Grade n, oder $\frac{1}{1.2.3.4.5.\ldots.n}\cdot\frac{d^n x}{dy^n}$ gleich dem Coefficienten

des Gliedes x^{n-x} in der unbestimmten Potenz des Infinitinoms $(p+qx+rx^2+\text{etc})^{-n}$, durch n dividiert. d)

8. Die gegenwärtige Aufgabe dient überhaupt dazu, wenn y eine gegebene, algebraische oder transcendente Function von x ist, dieser letztern Größe die Gestalt einer functionis explicitae von y, oder einer allgemeinen Reihe zu geben, die nach den Potenzen von y fortgeht. In den Fällen wo $y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc}$; oder $y = Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc}$, findet die gegebene Formel auf der Stelle ihre Anwendung. Sollte aber $y = Ax^m+Bx^{m+d}+Cx^{m+2d}+\text{etc}$ seyn, so machte die Umkehrung der Reihe eine Modification jener Formel nöthig, um anwendbar zu seyn. Ich behalte mir dieses auf eine andere Zeit vor e). Hier noch einige ganz leichte Beispiele.

I. Wenn $y = x+qx^2$, so ist $x = y-qy^2+2qqy^3-5q^3y^4+14q^4y^5-42q^5y^6+132q^6y^7-429q^7y^8+1430q^8y^9-4862q^9y^{10}+16796q^{10}y^{11}-58786q^{11}y^{12}+\text{etc.}$ Der Ter-

d) Das Glied, worinn x^{n-x} vorkommt, ist offenbar das nte; und so kommt für den nten Coefficienten mein obiger (1) Ausdruck $\frac{\Pi^{-n}xn}{n}$. S.

e) Man kann die obige allgemeine Reihe

$$y = Ax^m+Bx^{m+d}+Cx^{m+2d}+\text{etc}$$

nach der Formel (E. S. c. a. A. S. 293, 7) für das (n+1)te Glied von x^a, für $x^{a+7}(n+1)$ umkehren, indem man statt l, r hier 1, m setzt. Das nte Glied für x (wie oben in 7) zu haben, müßte man in jener Formel

minus Generalis ist $\frac{n+2.\,n+3\ldots 2n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots n}\,q^n y^{n+2}$

II. Für $y = x + rx^3$ ist $x = y - ry^3 + 3r^2y^5 - 12r^3y^7 + 55r^4y^9 - 273r^5y^{11} + 1428r^6y^{13}$ – etc. Der Terminus Generalis ist $\frac{2n+2.\,2n+3\ldots 3n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots n}\,r^n y^{2n+1}$

III. Für $y = x + sx^4$ ist $x = y - sy^4 + 4s^2y^7 - 22s^3y^{10} + 140s^4y^{13} - 969s^5y^{16} + 7084s^6y^{19}$ – etc. Der Terminus Generalis ist $\frac{3n+2.\,3n+3\ldots 4n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots n}\,s^n y^{3n+1}$

IV. Und im Allgemeinen, für $y = x + \theta x^m$ ist $x = y - A\theta y^m + B\theta^2 y^{2m-1} - C\theta^3 y^{3m-2} + D\theta^4 y^{4m-3} - E\theta^5 y^{5m-4} + F\theta^6 y^{6m-5}$ – etc etc. Der Coefficient für das allgemeine

statt	1 ,	r ,	s ,	n
hier	1 ,	m ,	1 ,	n-1

setzen; und so kömmt

$$x7n = \frac{1}{1+(n-1)d}\,q^{-\frac{1+(n-1)d}{m}}\,xn.y^{\frac{1+(n-1)d}{m}}$$

wo man für q, wenn man will, auch Π setzen kann, wie oben (1) vorkommt.

Vergleicht man diese Rechnung mit der obern, durch welche eben diese Bernoullische Zahl wie hier bestimmt wird, so erhellet, daß man zwar hier nicht mit so großen Zahlen wie dort zu rechnen hat, dagegen hat aber jene Methode den Vorzug, daß man nach geendigter Rechnung eine so leichte Probe von der Richtigkeit derselben machen kann, welche hier nicht statt findet.

8. Aus diesen berechneten Werthen der Coefficienten von q^{-1} oder q^{t} findet man nun für die Bernoullischen Zahlen folgende Werthe:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2.3}$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{42} = \frac{1}{2.3.7}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{30} = \frac{1}{2.3.5}$$

$$\mathfrak{E} = \tfrac{5}{66} = \frac{5}{2.3.11}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730} = \frac{691}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{G} = \tfrac{7}{6} = \frac{7}{2.3}$$

$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{510} = \frac{3617}{2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{43867}{798} = \frac{43867}{2.3.7.19}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{174611}{330} = \frac{174611}{2.3.5.11}$$

$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{138} = \frac{11.77683}{2.3.23}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730} = \frac{236364091}{2.3.5.7.13}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6} = \frac{13.657931}{2.3}$$

$$\mathfrak{O} = \frac{2374946\,1029}{870 = 2.3.5.29}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{8615841276005}{14322} = \frac{5.172316825520\,1}{2.3.7.11.31}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{77093210412\,17}{510 = 2.3.5.17}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2577687858367}{6} = \frac{17.151628697551}{2.3}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{263152715530534773\,73}{1919190 = 2.3.5.7.13.19.37}$$

also noch 3 Bernoullische Zahlen mehr, als Euler berechnet hat, und daraus findet man für die Coefficienten von log q folgende Werthe

$$2\log q. \times 2 = -\tfrac{2}{3} = p^{-2} \times 2$$

$$4\log q. \times 3 = -\frac{14}{3^2.5} = -p^{-4} \times 3$$

$$5\log q. \times 4 = -\frac{124}{3^3.5.7} = p^{-6} \times 4$$

$$8 \log q. * 5 = -\frac{254}{3^3.5^2.7} = -p^{-8} * 5$$

$$10 \log q. * 6 = -\frac{292}{3^5.5.11} = p^{-10} * 6$$

$$12 \log q. * 7 = -\frac{5657908}{3^6.5^3.7^2.11.13} = -p^{-12} * 7$$

$$14 \log q. * 8 = -\frac{65528}{3^6.5^2.7.11.13} = p^{-14} * 8$$

$$16 \log q. * 9 = -\frac{33862354}{3^7.5^4.7.11.13.17} = -p^{-16} * 9$$

$$18 \log q. * 10 = -\frac{2129987662 28}{3^9.5^3.7^3.11.13.17.19} = p^{-18} * 10$$

$$20 \log q. * 11 = -\frac{3661851094 28}{3^9.5^5.7^2.11^2.13.17.19} = -p^{-20} * 11$$

$$22 \log q. * 12 = -\frac{2659803773 6}{3^{10}.5^4.7.11.13.17.19.23} = p^{-22} * 12$$

Mehrere ſolche logarithmiſche Coefficienten von q könnte man entweder aus den vorhin angegebenen Bernoulliſchen Zahlen nach der Formel

$$2n \log q. * (n+1) = -\frac{2^{2n+1}(2^{2n-1}-1)}{1.2.3.4\ldots.2n} \overset{n-1.}{\mathfrak{A}}$$

oder aus dem Coefficienten von q^1 nach der Formel

$$2n \log q. * (n+1) = (2^{2n}-2)\, q^1 * (n+1)$$

berechnen.

(Mehrere Anwendungen auf Potenzen beſonderer merkwürdiger Reihen, künftig.)

Erläuterung über logarithmische Lokalausdrücke.

Es ist $\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha}+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}\ldots)$

$$=\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha})+\mathrm{Log}\left(1+\frac{bx^{\beta}+cx^{2\beta}+dx^{3\beta}\ldots}{a}\right)$$

$$=\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha})+\mathrm{Log}\left(1+\frac{y}{a}\right)$$

$$=\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha})+\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+\ldots$$

wenn man $y=bx^{\beta}+cx^{2\beta}+dx^{3\beta}+ex^{4\beta}\ldots$ setzt.

In diesem Falle ist für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} b & c & d & e & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\frac{y}{a}=\frac{a^1A}{a}x^{\beta}+\frac{a^2A}{a}x^{2\beta}+\frac{a^3A}{a}x^{3\beta}+\frac{a^4A}{a}x^{4\beta}+\frac{a^5A}{a}x^{5\beta}+\ldots$$

$$-\frac{y^2}{2a^2}=\quad -\frac{b^2B}{2a^2}x^{2\beta}-\frac{b^3B}{2a^2}x^{3\beta}-\frac{b^4B}{2a^2}x^{4\beta}-\frac{b^5B}{2a^2}x^{5\beta}-\ldots$$

$$+\frac{y^3}{3a^3}=\qquad\quad +\frac{c^3C}{3a^3}x^{3\beta}+\frac{c^4C}{3a^3}x^{4\beta}+\frac{c^5C}{3a^3}x^{5\beta}+\ldots$$

$$-\frac{y^4}{4a^4}=\qquad\qquad -\frac{b^4D}{4a^4}x^{4\beta}-\frac{b^5D}{4a^4}x^{5\beta}-\ldots$$

$$+\frac{y^5}{5a^5}=\qquad\qquad +\frac{e^5E}{5a^5}x^{5\beta}+\ldots$$

u. s. w. u. s. w.

also $\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha}+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}+\ldots)$

$$=\mathrm{Log}\,(ax^{\alpha})+\frac{a^1A}{a}x^{\beta}+\left(\frac{a^2A}{a}-\frac{b^2B}{2a^2}\right)x^{2\beta}+$$

$$+\left(\frac{a^3A}{a}-\frac{b^3B}{2a^2}+\frac{c^3C}{3a^3}\right)x^{3\beta}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{a^nA}{a}-\frac{b^nB}{2a^2}+\frac{c^nC}{3a^3}-\frac{b^nD}{4a^4}\ldots+\frac{n^nN}{na^n}\right)x^{n\beta}+\ldots$$

wofür man kurz setzen kann

$$\mathrm{Log}\,(ax^\alpha+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+dx^{\alpha+3\beta}+\ldots)$$
$$=\mathrm{Log}\,(ax^\alpha)+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2\,x^\beta+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3\,x^{2\beta}$$
$$+\ldots+\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa(n+1).\,x^{n\beta}+\ldots.$$

für die Scale $\mathrm{p}[a,\ b,\ c,\ d,\ e\ldots]$.

Es erhellet hieraus, daß $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 1$ niemals vorkommt, sondern blos $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 2$, $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa 3$ u. s. w. und daß für den Zeiger und die Scale

$$\ldots\quad \mathrm{p}\begin{bmatrix} a, & b, & c, & d, & e, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Lp}\varkappa(n+1)\begin{cases} =\dfrac{a^nA}{a}-\dfrac{b^nB}{2a^2}+\dfrac{c^nC}{3a^3}-\dfrac{b^nD}{4a^4}+\ldots+\dfrac{n^nN}{na^n} \\ =\dfrac{a^nA}{a}+\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{A}b^nB}{2a^2}+\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{B}c^nC}{3a^3}+\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{C}d^nD}{4a^4}+\ldots+\dfrac{{}^{-1}\mathfrak{N}^{-1}n^nN}{na^n} \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{\mathrm{p}^m\varkappa(n+1)}{m}=a^m\left(\frac{a^nA}{a}+\frac{{}^{m-1}\mathfrak{A}b^nB}{2a^2}+\frac{{}^{m-1}\mathfrak{B}c^nC}{3a^3}+\ldots+\frac{{}^{m-1}\mathfrak{N}^{-1}n^nN}{na^n}\right)$$

welcher Ausdruck, für $m=0$, in $\mathrm{Log\,p.}\,\varkappa(n+1)$ übergeht.

XII.

Verschiedene combinatorisch-analytisch bearbeitete Aufgaben; von Herrn D. Christian Kramp[a]).

Vorerinnerung des Herausgebers.

Nachfolgende Aufgaben waren schon im May 1796, also noch vor dem Abdrucke der ersten Sammlung combinatorisch-analytischen Abhandlungen, in meinen Händen. Sie konnten aber dort (a. a. O. S. 113, 1) nicht Platz finden, und sollten daher im mathematischen Archive nachgeliefert werden. Jetzt führe ich sie, als Fortsetzung jener Aufgaben in der ersten Sammlung, nun in der zweyten auf, wo sie auch eigentlich hingehören.

Hindenburg.

VII. Aufgabe.

1.

Mit Beybehaltung (E. S. c. a. A. S. 114, V) von

$$\frac{dy}{dx} = p;\ \frac{dp}{dx} = 2q;\ \frac{dq}{dx} = 3r;\ \frac{dr}{dx} = 4s \text{ u. s. w.}$$

sey auch

a) Jetzt Professeur de Chymie et de Physique expérimentale à l'école centrale du Département de la Roer zu Cöln.

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = 2q; \quad \frac{dq}{dy} = 3r; \quad \frac{dr}{dy} = 4s \text{ u. ſ. w.}$$

Die Glieder beyder Reihen ſeyen Functionen von x, nicht von y. Die Glieder p, q, r, s ... der erſtern Reihe werden als gegeben vorausgeſetzt; man ſucht p, q, r, s ... die Glieder der letztern.

Auflöſung.

2. Es iſt [b])

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{dx}{dy} = p = {}^{0}p = \frac{\Pi^{-1} \times 1}{1}$$

$$\frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = q = {}^{1}p = \frac{\Pi^{-2} \times 2}{2}$$

$$\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3x}{dy^3} = r = {}^{2}p = \frac{\Pi^{-3} \times 3}{3}$$

$$\frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4x}{dy^4} = s = {}^{3}p = \frac{\Pi^{-4} \times 4}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{1.2.3.4 \ldots n} \cdot \frac{d^nx}{dy^n} = {}^{n-1}p = \frac{\Pi^{-n} \times n}{n}$$

für die Scale Π [p, q, r, s ...]

b) Was hier (in 2 und 3) ſteht, habe ich der Auflöſung, die Herr Prof. Kramp ſogleich mit (4) beginnt, vorangeſetzt. Die Lokalzeichen (in 2) ſind nichts anders als bequeme Ausdrücke für die Coefficienten, wie ſie Herr K. (in 7) fordert: Coefficienten nähmlich der Glieder $x^0, x^1, x^2 \ldots x^{n-1}$, der Potenzen $-1, -2, -3 \ldots -n$, des Inſinitinoms $p + qx + rx^2 + sx^3 \ldots$ durch die Gliederzahlen, 1, 2, 3 ... n dividirt; welche Coefficienten ſich combinatoriſch (nach 3) leicht finden und angeben laſſen. Es wird für manche Leſer nützlich ſeyn, die Norm der Entwickelung (in 2 und 3) voraus angegeben zu haben, welche nachher (in 6, 7) bewieſen wird. S.

3. Für dieſe Scale, oder, wenn man $\Pi = (p + qx^1 + rx^2 + sx^3 + \text{etc})^{-n}$ ſetzt, findet man leicht die Werthe der Lokalausdrücke für die p, q, r, s ... in (2). Hierzu dient unter andern die combinatoriſche Formel (E. S. c. a. A. S. 233) für p^m, wenn man für

die dortigen p, m, a, b, c, d ... z

hier Π, $-n$, p, q, r, s ... x

und für n, nach und nach 1, 2, 3, 4 ... ſetzt.

4. Daraus ergiebt ſich

$pp = 1$

$p^3q = -q$

$p^5r = -pr + 2qq$

$p^7s = -p^2s + 5pqr - 5q^3$

$p^9t = -p^3t + p^2(6qs + 3rr) - 21pq^2r + 14q^4$

$p^{11}u = -p^4u + p^3(7qt + 7rs) - p^2(28q^2s + 28qr^2) + 84pq^3r - 42q^5$

$p^{13}v = -p^5v + p^4(8qu + 8rt + us^2) - p^3(36q^2t + 72qrs + 12r^3)$
$+ p^2(120q^3s + 180q^2r^2) - 330pq^4r + 132q^6$

$p^{15}w = -p^6w + p^5(9qv + 9ru + 9st) - p^4(45q^2u + 90qrt$
$+ 45qs^2 + 45r^2s) + p^3(165q^3t + 495q^2rs + 165qr^3)$
$- p^2(495q^4s + 990q^3r^2) + p(1287q^5r) - 429q^7$

etc etc etc etc

5. Und nun das allgemeine Geſetz: für das Differentialverhältniß vom Grade n; oder für

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.\ldots n} \cdot \frac{d^n x}{dy^n}$$

Es iſt daſſelbe =

$$\frac{+}{1}\int \frac{n+1.n+2....n+(\beta+\gamma+\delta+\text{etc})-1}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc.}} \cdot \frac{q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}t^{\varepsilon}\ \text{etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}}}$$ c)

wo die unbeſtimmte Gleichung iſt $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-1$.

Setzt man hier den Faktoren im Zähler des Coefficienten noch den Faktor n vor, ſo wird aus ihm der Polynomial-Coefficient des Gliedes $\frac{q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta}t^{\varepsilon}\ \text{etc}}{p^{n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc}}}$; mit der einzigen Modification, die der verneinte Zuſtand des Exponenten von p nothwendig macht. Der Beweis dieſes Satzes iſt folgender:

6. Der Exponent von p, den wir ſonſt a genannt haben, iſt hier $-(n+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc})$. Folglich die Summe der Exponenten, oder $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc}$, die in der erſten Aufgabe (E. S. c. a. A. S. 102. 3. Zuſ.) m hieß, iſt hier $-n$. Man ſetze daher $-m$ an die Stelle von n, ſo erhält der vorher mit n multiplicirte Coefficient folgende Form:

$$\frac{+(-m)(-m+1)(-m+2)....(-m+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}-1)}{\beta'\ \gamma'\ \delta'\ \varepsilon'\ \zeta'\ \eta'\ \text{etc}}$$

Und da hier das obere Zeichen + für diejenigen Fälle gilt,

c) Dieſer Ausdruck iſt mit jenem (E. S. c. a. A. S. 114. Auflöſ.) durch das dortige $\alpha=n+\beta+\gamma+\text{etc}$ (daſ. no. 2) verkürzten, einerley. Beyde Aufgaben nähmlich, die dortige und die hieſige (1) ſind vollkommen dieſelben; nur iſt, was dort blos angegeben iſt, hier mehr auseinandergeſetzt und erwieſen worden. H.

wo $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc eine gerade Zahl ist; das untere Zeichen $\mp$ für diejenigen, wo eben dieses $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc ungerade wird; in den ersten Fällen aber, die sämmtlichen verneinten Faktoren des Zählers ein wirklich bejahtes, in den letzten aber ein verneintes Produkt ausmachen müssen, so ist folglich der aufgestellte Coefficient weder mehr noch weniger, als

$$\frac{m(m-1)\ldots(\alpha+1)}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\eta'\text{ etc}} \mp \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1}{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\eta'\text{ etc}};$$ also

der wirkliche Polynomialcoefficient des Produkts $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. Bezeichnet man diesen Polynomialcoefficienten, wie oben (E. S. c. a. A. S. 102. 2. Aufl.) mit K, so wird das gesuchte Differentialverhältniß vom Grade n gleich

$$\frac{1}{n}\int Kp^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon \text{ etc (daſ. 103. 5)}$$

wobey $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$

und da zugleich $\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$

so folgt daraus, $\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta+\text{etc}=-1$.

7. Allein, für den besondern Fall, wo $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc}=-n$, und $\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=n-1$, ist $\int Kp^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta t^\varepsilon$ etc offenbar der Coefficient des Gliedes x^{n-1}, in der unbestimmten Potenz des Infinitinoms

$$(p+qx+rx^2+sx^3+\text{etc})^{-n}.$$

Folglich ist das gesuchte Differentialverhältniß vom Grade n, oder $\frac{1}{1.2.3.4.5.\ldots n}\cdot\frac{d^n x}{dy^n}$ gleich dem Coefficienten

des Gliedes x^{n-1} in der unbestimmten Potenz des Infinitinoms $(p+qx+rx^2+\text{etc})^{-n}$, durch n dividirt. d)

8. Die gegenwärtige Aufgabe dient überhaupt dazu, wenn y eine gegebene, algebraische oder transcendente Function von x ist, dieser letztern Größe die Gestalt einer functionis explicitae von y, oder einer allgemeinen Reihe zu geben, die nach den Potenzen von y fortgeht. In den Fällen wo $y = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc}$; oder $y = Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc}$, findet die gegebene Formel auf der Stelle ihre Anwendung. Sollte aber $y = Ax^m+Bx^{m+d}+Cx^{m+2d}+\text{etc}$ seyn, so machte die Umkehrung der Reihe eine Modification jener Formel übrig, um anwendbar zu seyn. Ich behalte mir dieses auf eine andere Zeit vor e). Hier noch einige ganz leichte Beispiele.

I. Wenn $y = x+qx^2$, so ist $x = y-qy^2+2qqy^3-5q^3y^4+14q^4y^5-42q^5y^6+132q^6y^7-429q^7y^8+1430q^8y^9-4862q^9y^{10}+16796q^{10}y^{11}-58786q^{11}y^{12}+\text{etc}$. Der Ter-

d) Das Glied, worinn x^{n-1} vorkommt, ist offenbar das nte; und so kommt für den nten Coefficienten mein obiger (1) Ausdruck $\frac{\Pi^{-n}\varkappa n}{n}$. S.

e) Man kann die obige allgemeine Reihe

$$y = Ax^m+Bx^{m+d}+Cx^{m+2d}+\text{etc}$$

nach der Formel (E. S. c. a. A. S. 293, 7) für das (n+1)te Glied von x^a, für $x^{a+7}(n+1)$ umkehren, indem man statt l, r blos 1, m setzt. Das nte Glied für x (wie oben in 7) zu haben, müßte man in jener Formel

minus Generalis ist $\frac{n+2.\,n+3\ldots 2n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots n}\,q^n y^{n+1}$

II. Für $y = x + rx^3$ ist $x = y - ry^3 + 3r^2y^5 - 12r^3y^7 + 55r^4y^9 - 273r^5y^{11} + 1428r^6y^{13} - \text{etc.}$ Der Terminus Generalis ist $\frac{2n+2.\,2n+3\ldots 3n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots n}\,r^n y^{2n+1}$

III. Für $y = x + sx^4$ ist $x = y - sy^4 + 4s^2y^7 - 22s^3y^{10} + 140s^4y^{13} - 969s^5y^{16} + 7084s^6y^{19} - \text{etc.}$ Der Terminus Generalis ist $\frac{3n+2.\,3n+3\ldots 4n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots n}\,s^n y^{3n+1}$

IV. Und im Allgemeinen, für $y = x + \theta x^m$ ist $x = y - A\theta y^m + B\theta^2 y^{2m-1} - C\theta^3 y^{3m-2} + D\theta^4 y^{4m-3} - E\theta^5 y^{5m-4} + F\theta^6 y^{6m-5} - \text{etc etc.}$ Der Coefficient für das allgemeine

statt	1,	r,	s,	n
hier	1,	m,	1,	n-1

setzen; und so kömmt

$$x\,?\,n = \frac{1}{1+(n-1)d}\,q^{-\frac{1+(n-1)d}{m}}\,x^{n}.y^{\frac{1+(n-1)d}{m}}$$

wo man für q, wenn man will, auch Π setzen kann, wie oben (1) vorkommt.

Glied $\theta^n y^{nm-n+1}$ ist $\frac{(m-1)n+2.(m-1)n+3.(m-1)n+4...mn}{1.2.3.4.....n}$

VIII. Aufgabe.

1. Mit Beybehaltung der schon oben (S. S. c. a. A. S. 115, VI, 1) gegebenen Erklärung, sind die beyden

Reihen p, q, r, s, t etc

und P, Q, R, S, T etc

gegeben. Man sucht die dritte Y^1, Y^2, Y^3, Y^4, Y^5 etc.

Oder, die beyden veränderlichen Größen Y und y sind bekannte Functionen einer dritten veränderlichen Größe x. Nun soll x so eliminirt werden, daß von jenen beyden, die eine durch die andere, vermittelst einer unendlichen Reihe bestimmt werde. Hier, Y durch y.

2. Es ist f)

$$Y^1 = \tfrac{1}{1} P\Pi^{-1}x1$$

$$Y^2 = \tfrac{1}{2} P\Pi^{-2}x2 + \tfrac{2}{2} Q\Pi^{-2}x1$$

$$Y^3 = \tfrac{1}{3} P\Pi^{-3}x3 + \tfrac{2}{3} Q\Pi^{-3}x2 + \tfrac{3}{3} R\Pi^{-3}x1$$

$$Y^4 = \tfrac{1}{4} P\Pi^{-4}x4 + \tfrac{2}{4} Q\Pi^{-4}x3 + \tfrac{3}{4} R\Pi^{-4}x2 + \tfrac{4}{4} S\Pi^{-4}x1$$

etc etc etc etc etc etc

f) Ich habe hier (in 2) aus eben der Ursache, wie bey der Auflösung der vorigen Aufgabe (S. 342, 2), die Norm der Entwickelung, die Herr Professor Kramp sogleich mit (3) beginnt, in Lokalausdrücken vorausgeschickt, die das schon etwas complicirte Gesetz der $Y^1, Y^2, Y^3 \ldots Y^n$ deutlich vor Augen legen. S.

Die Scale ist hier, wie bey der Auflösung (2) der vorigen Aufgabe (S. 342)

$$\Pi\,[p, q, r, s, t, u, v \ldots]$$

Auch kann man, zu leichter Auffindung der durch p, q, r, s... zu bestimmenden Werthe der obigen Lokalausdrücke, sich der (in 3. S. 343) angeführten combinatorischen Formel, nach der dort aufgestellten Vergleichung, bedienen.

3. Daraus ergiebt sich

$$p^{1}Y = P$$

$$p^{2}Y = -Pq+Qp$$

$$p^{3}Y = P(-pr+2qq)+Q(-2pq)+R(pq)$$

$$p^{4}Y = P(-p^{2}s+5pqr-5q^{3})+Q(-2p^{2}r+5pq^{2})+R(-3p^{2}q)+Sp^{3}$$

$$p^{5}Y = P(-p^{3}t+6p^{2}qs+3p^{2}r^{2}-21pq^{2}r+14q^{4})+Q(-2p^{3}s+12p^{2}qr-14pq^{3})+R(-3p^{3}r+9p^{2}q^{2})+S(-4p^{3}q)+T(p^{4}).$$

$$p^{6}Y = P(-p^{4}u+7p^{3}qt+7p^{3}rs-28p^{2}q^{2}s-28p^{2}qr^{2}+84pq^{3}r-42q^{5})+Q(-2p^{4}t+14p^{3}qs+7p^{3}r^{2}-56p^{2}q^{2}r+42pq^{4})+R(-3p^{4}s+21p^{3}qr-28p^{2}q^{3})+S(-4p^{4}r+14p^{3}q^{2})+T(-5p^{4}q)+U(p^{5}).$$

$$p^{7}Y = P(-p^{5}v+8p^{4}qu+8p^{4}rt+4p^{4}s^{2}-36p^{3}q^{2}t-72p^{3}qrs-12p^{3}r^{3}+120p^{2}q^{3}s+180p^{2}q^{2}r^{2}-330pq^{4}r+132q^{6})+Q(-2p^{5}u+16p^{4}qt+16p^{4}rs-72p^{3}q^{2}s-72p^{3}qr^{2}+240p^{2}q^{3}r-132pq^{5})+R(-3p^{5}t+24p^{4}qs+12p^{4}r^{2}$$

$$-108p^5q^2r+90p^3q^4)+\delta(-4p^7s+32p^4qr-48p^3q^3)$$
$$+T(-5p^5r+20p^4q^2)+U(-6p^4q)+V(p^6)$$

etc etc etc etc etc etc

4. Was die vorgesetzten Zeichen der Produkte $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc anbetrift, so fällt es sogleich auf, daß die Glieder bejaht sind, wo $\beta+\gamma+\delta+$ etc eine gerade Zahl; diejenigen hingegen verneint sind, wo $\beta+\gamma+\delta+$ etc eine ungerade Zahl ist. In Rücksicht auf alles übrige, ist folgendes das allgemeine Gesetz der Reihe, die $\overset{n}{Y}$ ausdrükken soll, und wo durchgehends a statt $n+\beta+\gamma+\delta+$ etc gesetzt ist:

$$\overset{n}{Y} = P\int \frac{n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-1)$$

$$+Q\int \frac{2.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-2)$$

$$+R\int \frac{3.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-3)$$

$$+S\int \frac{4.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-4)$$

$$+T\int \frac{5.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}}\, p^{-a}q^\beta r^\gamma s^\delta \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-5)$$

$$+ U\int \frac{6.n+1.n+2\ldots a-1}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta' \text{ etc}} p^{-\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}s^{\delta} \text{ etc}$$

$$(\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n-6)$$

etc etc etc etc etc etc g)

5. So viel ist es, was ich bisher, indem ich ganz meinen eigenen Weg gieng, ohne alle Kenntniß Ihrer Lokalzeichen h) in der Combinationenlehre geleistet habe. Ich habe sehr vieles weggelassen. Die Anwendung der allgemeinen Formeln auf besondere Fälle bleiben dem eigenen Fleiße jedes Lesers anheimgestellt, der dieselben bis ins Unendliche vervielfältigen kann. Den weitern Gebrauch der Combinationenlehre in der allgemeinen und vollständigen Auflösung der Equations aux différences finies, worinn ich schon einig-

g) In meinen Lokalausdrücken wäre (nach 2)

$$Y^{n} = \frac{1}{n} P\Pi^{-n}xn + \frac{2}{n} Q\Pi^{-n}x(n-1) + \frac{3}{n} R\Pi^{-n}x(n-2) \ldots$$

$$\ldots + \frac{n-1}{n} P^{n-2}\Pi^{-n}x2 + \frac{n}{n} P^{n-1}\Pi^{-n}x1$$

$$\Pi\,[\,p, q, r, s, t, u \ldots,\,]$$

wo die Buchstaben P, Q, R... deutliche Nachweisung geben, welche, Lokalausdrücke in dieser Formel, und combinatorische Integrale oder Aggregate oben im Texte, mit einander übereinstimmen, und, gehörig entwickelt, einerley Werthe geben. H.

h) Ich trage gewöhnlich, der Kürze und bequemern Uebersicht wegen, die Auflösungsformeln in Lokalzeichen vor, die sich auf combinatorische Functionen beziehen, deren Entwickelung durch bekannte Anordnungen und Involutionen der Elemente gegeben ist. Herr Professor Kramp legt sogleich die, nach seiner Art gezeichneten, combinatorischen Aggregate selbst vor, die, gewöhnlich eine zuweilen zwey unbestimmte Gleichungen von einer beliebigen Anzahl unbekannter Größen voraussetzen, und nur eine bestimmte Anzahl von Auflösungen, in ganzen positiven Zahlen, zulassen. H.

ge nicht unbedeutende Fortschritte gethan habe, behalte ich mir auf eine andere Zeit vor.

6. Anmerkung des Herausgebers. Man darf, wegen dessen, was hier (in 5) gesagt worden ist, nicht vergessen, was ich gleich zu Anfange dieses Aufsatzes (S. 341) erinnert habe, daß mir derselbe, nebst dem, was in der ersten Sammlung (S. 109-117) steht, schon im May 1796 von dem Verfasser überschickt worden ist. Von seinen weitern Fortschritten im combinatorischen Fache habe ich gelegentlich im mathematischen Archive, vom fünften Hefte an, aus Briefen Nachricht gegeben. Die ausführlichste Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis hat Herr K. nachher in seiner gründlichen Analyse der von ihm sogenannten facultés numériques gemacht, wovon ich so oft im Archive gesprochen habe, und welche nunmehr in seinem classischen Werke, Analyse des Réfractions astronomiques et terrestres (Strasburg und Leipzig bey Schwickert 1799) erschienen ist, und daselbst das dritte Kapitel (von S. 46-113) ausmacht.

XIII.

Ueber die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe, vermittelst der Combinationenlehre [a]); von Herrn D. Christian Kramp.

Lehrsatz I.

I.

Die Summe der Potenzen vom Grade n, der Glieder in der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis y, exclusive, oder $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \ldots + (y-1)^n$, ist gleich dem combinatorischen Integrale:

$$\int \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots\ldots(y-t)n'}{(t+1)\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}.1^\beta 2^\gamma 6^\delta 24^\varepsilon 120^\zeta \text{etc}}$$

wobey

1) der Verbindungen von $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ etc so viele sind, als die unbestimmte Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + \text{etc} = n$, mögliche Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen zuläßt:

a) Aus einer Beylage zu einem Schreiben vom 30 May 1796. Eine kurze Uebersicht des Inhalts habe ich bereits im mathematischen Archive (Heft V. S. 107-109) gegeben. Hier liefere ich den Aufsatz selbst, mit Beybehaltung der Zeichnung im Manuscripte, weil diese mit der im Archive und den beyden Sammlungen bisher gebrauchten, übereinstimmt, es also überflüssig seyn würde, die neuen Zeichen der Analyse des facultés numériques hier erst aufzuführen. H.

2) die jedesmalige Summe dieser Größen, in jedem besondern Falle, oder $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc} = t$ gesetzt ist: und

3) die Zeichen n', β', γ', δ', ε' ... die bekannten Produkte (E. S. c. a. A. S. 102, 2; 114, 2) bedeuten.

Erklärung.

2. Bey der Auseinandersetzung desjenigen, was nunmehr gesagt werden soll, kömmt alles auf eine geschickte, und soviel möglich kurze Bezeichnung an. Ich erkläre daher, daß ich durch NT anzeigen werde, die Summe der aus Zahlenprodukten in Zähler und Nenner bestehenden Brüche, $\frac{n'}{\beta'.\ \gamma'.\ \delta'.\ \varepsilon'.\text{etc}\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}}$; wobey die beyden unbestimmten Gleichungen

$$\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc} = n'$$

und $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc} = t'$

zum Grunde gelegt sind, und der Verbindungen der Größen β, γ, δ, ε, etc so viele seyn müssen, als die beyden erst erwähnten Gleichungen Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen zulassen.

Erklärung.

3. Ich werde das Produkt $y(y-1)(y-2)(y-3)...(y-t+1)$ mit y_t bezeichnen. Dieser Bezeichnung zufolge ist

$$y_0 = y$$
$$y_1 = y(y-1)$$
$$y_2 = y(y-1)(y-2)$$
$$y_3 = y(y-1)(y-2)(y-3)$$
$$y_4 = y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$$

Folgesatz.

4. Die gesammte Zahl der möglichen Auflösungen der unbestimmten Gleichung $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc}=n$ läßt sich folgendergestalt in Klassen eintheilen. Ich rechne zur ersten Klasse diejenigen Auflösungen, wo $t=n$ ist. Zur andern Klasse diejenigen Auflösungen, wo $t=n-1$. Zur dritten Klasse diejenigen, wo $t=n-2$. Die letzte Klasse wird diejenigen Auflösungen enthalten, wo $t=1$, und die also nur aus einem einzigen Gliede bestehen.

Folgesatz.

5. Demzufolge ist $1^n+2^n+3^n+4^n+\ldots+(y-1)^n$ oder

$$\int y^n = \frac{y^{n+1}}{n+1} + N(N-1)\frac{y^n}{n} + N(N-2)\frac{y^{n-1}}{n-1}$$
$$+ N(N-3)\frac{y^{n-2}}{n-2} + N(N-4)\frac{y^{n-3}}{n-3} + \ldots + N3\frac{y^4}{4}$$
$$+ N2\frac{y^3}{3} + N1\frac{y^2}{2}.$$

Beyspiel.

6. Man verlangt den allgemeinen Ausdruck für $\int y^7$ oder $1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\ldots+(y-1)^7$?

Die allgemeine Gleichung $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+5\zeta+6\eta+7\theta=7$, läßt 15 Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen zu, die nach ihren Klassen (4) geordnet, folgende sind:

t	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
7	7	0	0	0	0	0	0
6	5	1	0	0	0	0	0
5	4	0	1	0	0	0	0
5	3	2	0	0	0	0	0
4	3	0	0	1	0	0	0
4	2	1	1	0	0	0	0
4	1	3	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0
3	1	0	2	0	0	0	0
3	0	2	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 \end{pmatrix}$$

Dieſer Tafel und der allgemeinen Formel

$$\frac{n'}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\ \text{etc}}$$ (2) zufolge, erhalten die Coefficienten folgende Werthe:

$$\begin{aligned} NN &= 1 \\ N(N-I) &= 21 \\ N(N-II) &= 140 \\ N(N-III) &= 350 \\ N(N-IV) &= 301 \\ N(N-V) &= 63 \\ N(N-VI) &= 1 \end{aligned}$$

Und es wird demnach

$$1^7+2^7+3^7+4^7+5^7+\ldots+(y-1)^7=\frac{y_8}{8}+\frac{21y_7}{7}+\frac{140y_6}{6}+\frac{350y_5}{5}+\frac{301y_4}{4}+\frac{63y_3}{3}+\frac{y_2}{2}.$$

8. Wendet man die gleiche Berechnung auch auf andere Exponenten an, so ergiebt sich daraus folgende Tabelle:

$$\Sigma y^0 = y_1$$
$$\Sigma y^1 = \tfrac{1}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^2 = \tfrac{1}{3}y_3+\tfrac{3}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^3 = \tfrac{1}{4}y_4+\tfrac{6}{3}y_3+\tfrac{7}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^4 = \tfrac{1}{5}y_5+\tfrac{10}{4}y_4+\tfrac{25}{3}y_3+\tfrac{15}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^5 = \tfrac{1}{6}y_6+\tfrac{15}{5}y_5+\tfrac{65}{4}y_4+\tfrac{90}{3}y_3+\tfrac{31}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^6 = \tfrac{1}{7}y_7+\tfrac{21}{6}y_6+\frac{140}{5}y_5+\frac{350}{4}y_4+\frac{301}{3}y_3+\tfrac{63}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^7 = \tfrac{1}{8}y_8+\tfrac{28}{7}y_7+\frac{266}{6}y_6+\frac{1050}{5}y_5+\frac{1701}{4}y_4+\frac{966}{3}y_3+\frac{127}{2}y_2+y_1$$
$$\Sigma y^8 = \tfrac{1}{9}y_9+\tfrac{36}{8}y_8+\frac{462}{7}y_7+\frac{2646}{6}y_6+\frac{6951}{5}y_5+\frac{7770}{4}y_4+\frac{3025}{3}y_3+\frac{255}{2}y_2+y_1$$

$$\Sigma y^9 = \tfrac{1}{10} y_{10} + \tfrac{45}{8} y_9 + \frac{750}{8} y_8 + \frac{3880}{7} y_7 + \frac{22827}{6} y_6 + \frac{42525}{5} y_5 + \frac{34105}{4} y_4 + \frac{9330}{3} y_3^2 + \frac{511}{2} y_2 + y_1$$

9. Vermittelst einer leichten Modification, die ich dem eigenen Forschungsgeiste der Leser überlasse, ist durch diese Formeln das Integral Σy^n so bestimmt, daß es nicht, wie vorhin mit $(y-1)^n$ aufhört, sondern das allerletzte Glied y^n noch mit einschließt. Sollte hingegen jener erstere Sinn beibehalten werden, so dienen zwar die nämlichen Coefficienten, aber für solche Potenzen Summen, die um einen Grad höher sind, auf folgende Weise:

$$\Sigma y^1 = \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^2 = \tfrac{1}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^3 = \tfrac{1}{4} y_4 + \tfrac{3}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^4 = \tfrac{1}{5} y_5 + \tfrac{4}{4} y_4 + \tfrac{7}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^5 = \tfrac{1}{6} y_6 + \tfrac{10}{5} y_5 + \tfrac{24}{4} y_4 + \tfrac{15}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^6 = \tfrac{1}{7} y_7 + \tfrac{15}{6} y_6 + \tfrac{65}{5} y_5 + \tfrac{90}{4} y_4 + \tfrac{31}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^7 = \tfrac{1}{8} y_8 + \frac{21}{7} y_7 + \frac{140}{6} y_6 + \frac{350}{5} y_5 + \frac{301}{4} y_4 + \frac{63}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^8 = \tfrac{1}{9} y_9 + \frac{28}{8} y_8 + \frac{266}{7} y_7 + \frac{1050}{6} y_6 + \frac{1701}{5} y_5 + \frac{966}{4} y_4 + \frac{127}{3} y_3 + \tfrac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^9 = \frac{1}{10} y_{10} + \frac{36}{9} y_9 + \frac{462}{8} y_8 + \frac{2646}{7} y_7$$
$$+ \frac{6951}{6} y_6 + \frac{7770}{5} y_5 + \frac{3025}{4} y_4 + \frac{255}{3} y_3 + \frac{1}{2} y_2$$

$$\Sigma y^{10} = \frac{1}{11} y_{11} + \frac{45}{10} y_{10} + \frac{750}{9} y_9 + \frac{5880}{8} y_8$$
$$+ \frac{22827}{7} y_7 + \frac{42525}{6} y_6 + \frac{34105}{5} y_5 + \frac{9330}{4} y_4$$
$$+ \frac{551}{3} y_3 + {}^1 y_2$$

10. Zieht man die Σy^n der zweyten Tabelle, von den Σy^n der ersten Tabelle ab, so giebt der Unterschied den wahren Werth eben dieses letzten Gliedes y^n zu erkennen, das bey dem zweyten ausgeschlossen, und bey dem erstern mit eingerechnet war. Es ist

$$x^1 = x_1$$
$$x^2 = x_1 + x_2$$
$$x^3 = x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$x^4 = x_1 + 7x_2 + 6x_3 + x_4$$
$$x^5 = x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 10x_4 + x_5$$
$$x^6 = x_1 + 31x_2 + 90x_3 + 65x_4 + 15x_5 + x_6$$
$$x^7 = x_1 + 63x_2 + 301x_3 + 350x_4 + 140x_5 + 21x_6 + x_7$$
$$x^8 = x_1 + 127x_2 + 966x_3 + 1701x_4 + 1050x_5 + 266x_6$$
$$+ 28x_7 + x_8$$
$$x^9 = x_1 + 255x_2 + 3025x_3 + 7770x_4 + 6951x_5 + 2646x_6$$
$$x_7 + 36x_8 + x_9$$

$$x^{10} = x_1 + 551x_2 + 9330x_3 + 34105x_4 + 42525x_5 + 22827x_6 + 5880x_7 + 750x_8 + 45x_9 + x_{10}$$

11. Einem erfahrnen Analysten sollen die hier nacheinander hervortretenden Coefficienten nichts Neues seyn. Sie sind offenbar nichts anders, als die ersten Glieder der aufeinander folgenden Differenzenreihen, der Potenzen natürlicher Zahlen, mit den Gliedern der hypergeometrischen Reihe 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 etc multiplicirt. Ein Beyspiel wird dieses anschaulich machen. Man nehme die Reihe der sechsten Potenzen von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

1						
64	63					
729	665	602				
4096	3367	2702	2100			
15625	11529	8262	5460	3360		
46656	31031	19502	11340	5880	2520	
117649	70993	39962	20460	9120	3240	720

12. Man vergleiche die ersten Glieder dieser Reihen, 1, 63, 602, 2100, 3360, 2520, 720, mit den Coefficienten der Reihe die x^7 ausdrückt, nämlich 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1, so ergiebt sich, daß

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$63 = \frac{63}{1}$$

$$301 = \frac{602}{1.2}$$

$$350 = \frac{2100}{1.2.3}$$

$$140 = \frac{3360}{1.2.3.4}$$

$$21 = \frac{2520}{1.2.3.4.5}$$

$$1 = \frac{720}{1.2.3.4.5.6}$$

13. Und überhaupt, wenn angenommen wird,

$$x^{n+1} = x_1 + Ax_2 + Bx_3 + Cx_4 + Dx_5 + Ex_6 + Fx_7 + \ldots + x_{n+1}$$

so ist

$$1A = 2^n - 1^n$$
$$1.2.B = 3^n - 2.2^n + 1^n$$
$$1.2.3C = 4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1^n$$
$$1.2.3.4D = 5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1^n$$
$$1.2.3.4.5.E = 6^n - 5.5^n + 10.4^n - 10.3^n + 5.2^n - 1^n$$
$$1.2.3.4.5.6.F = 7^n - 6.6^n + 15.5^n - 20.4^n + 15.3^n - 6.2^n + 1^n,$$

14. Da nun ferner $\Delta x_n = nx_{n-1}$; folglich Σx_{n-1} mit Weglassung des letzten Gliedes x_n, oder $1_n + 2_n + 3_n + 4_n + 5_n + \ldots + (x-1)_n = \frac{x_{n+1}}{n+1}$; und eben dieses Σx_n, mit Einschließung des letzten Gliedes x_n, oder $1_n + 2_n + 3_n + 4_n + 5_n + \ldots + (x-1)_n + x_n = \frac{(x+1)_{n+1}}{n+1}$ ist, so lassen sich aus der einzigen Reihe für x_n, die beiden andern, oben erwähnten für Σx_n, unmittelbar herleiten, wo die bey der erstern derselben nothwendige Reduction, vermittelst des an sich selbst auffallenden Lehrsatzes, $x.x_n = nx_n + x_{n+1}$, sehr leicht bewerkstelligt wird.

15. Das bisher Gesagte setzt weiter nichts als die ganz gemeine Theorie der figurirten Zahlen, ohne einige Kenntniß

höherer Analysis, voraus. Allein, daß eben jene Coefficienten A, B, C, D etc, auf welchen hier alles beruht, auch unabhängig von der Berechnung der Potenzen, durch die Combinationenlehre allein, gefunden werden können, dies ist eine neue und für die künftigen Fortschritte der Wissenschaft wichtige Wahrheit.

16. Dem bisher gesagten zufolge ist, die noch nie summirte Reihe $y^n - \frac{(y-1)}{1}(y-1)^n + \frac{(y-1)(y-2)}{1.2}(y-2)^n - \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3}(y-3)^n + \ldots \pm 1^n$ gleich $1.2.3.4\ldots(y-1)$, multiplicirt mit der Summe aller Produkte $\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots 1}{\beta!\,\gamma!\,\delta!\,\text{etc}\ldots 1^\beta 2^\gamma 3^\delta 4^\varepsilon \text{ etc}}$, wobey die beyden Gleichungen

$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc} = y$$
$$\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc} = n+1$$

zum Grunde gelegt sind.

17. Und wenn, $n+1 = m$ gesetzt, und dann, wie oben, ein solches Integral mit MY bezeichnet wird, wobey statt Y auch die numerischen Werthe, die y in besondern Fällen haben kann, nur zur Deutlichkeit in vergrößerter Form, gesetzt werden können, so wird

$$2^n - 1^n = M2$$
$$3^n - 2.2^n + 1^n = 2M3$$
$$4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1^n = 6M4$$
$$5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1^n = 24M5$$
$$6^n - 5.5^n + 10.4^n - 10.3^n + 5.2^n - 1^n = 120M6$$
$$7^n - 6.6^n + 15.5^n - 20.4^n + 15.3^n - 6.2^n + 1^n = 720M7$$
$$8^n - 7.7^n + 21.6^n - 35.5^n + 35.4^n - 21.3^n + 7.2^n - 1^n = 5040M8$$
etc etc etc etc etc

18. Die unmittelbare Folge der hier aufgestellten Gleichungen ist folgende Reihe von Wahrheiten:

$1^n = M1$
$2^n = M1 + M2$
$3^n = M1 + 2M2 + 2.1M3$
$4^n = M1 + 3M2 + 3.2M3 + 3.2.1M4$
$5^n = M1 + 4M2 + 4.3M3 + 4.3.2M4 + 4.3.2.1M5$
$6^n = M1 + 5M2 + 5.4M3 + 5.4.3M4 + 5.4.3.2M5 + 5.4.3.2.1M6$
$7^n = M1 + 6M2 + 6.5M3 + 6.5.4M4 + 6.5.4.3M5 + 6.5.4.3.2M6$
$+ 6.5.4.3.2.1M7$

etc etc etc etc etc

19. Und überhaupt

$$y^n = M1 + (y-1)M2 + (y-1)(y-2)(y-3)M3 + (y-1)(y-2)(y-3)(y-4)M4 + \ldots$$
$$\ldots + (y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)MP + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (y-1)(y-2)\ldots 5.4.3.2.1MY.$$

20. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP besteht, ist

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots.3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}} \cdots \begin{pmatrix} \beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=m; \\ \beta+\gamma+\delta+\text{etc}=p; \end{pmatrix}$$

Dieser, mit $(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)$ oder $\frac{y'}{y(y-p)(y-p-1)\ldots3.2.1}$ multiplicirt, und zugleich $y-p$, oder $y-(\beta+\gamma+\delta+\text{etc})=\alpha$ gesetzt, giebt $\frac{m'.y'}{\alpha.\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}.1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}}$ für den allgemeinen Ausdruck aller der einzelnen Glieder, aus welchen das gesammte combinatorische Integral besteht, das y^n oder y^{m-1} gleich seyn soll. Es ist demnach

$$y^m = \int \frac{m'.y'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}.}$$

welche die beyden unbestimmten Gleichungen

$$z + x + y^2 + etc = m$$
$$z + z + y + \delta + etc = y$$

zum Grunde liegen.

Beyspiel.

1. Es sey $m = 6$; $y = 10$; die Gleichung $z + x$ [illegible] $= 0$ läßt eilf Auflösungen in ganzen und brüchigten Zahlen zu; für deren jede der Exponent n derjenige der zweyten Gleichung $z^n + z^n - 4 = 0$,

und dann auch der Bruch $\frac{m \cdot y^n}{x^n + y^n + z^n + etc}$,

seinen besondern Werth erhält, nämlich:

[illegible]	Bruch
4 [illegible]	15120
5 [illegible]	45360
6 [illegible]	120120
7 [illegible]	322320
8 [illegible]	120120
9 [illegible]	43120
10 [illegible]	5082
11 [illegible]	12870
12 [illegible]	4368
13 [illegible]	1352
14 [illegible]	42
Summe	[illegible]

2. Da [illegible] Summe von [illegible] [illegible] Grundwerthen zu bestimmen, [illegible] [illegible] verschiedene Art [illegible] Brüche von [illegible] [illegible]

aufſuchen; und man wird, auf dieſem ganz verſchiedenen Wege, obigen Ausdruck beſtätigt finden. Es iſt nämlich, das lezte Glied y^n mit eingeſchloſſen,

$\Sigma 1^n = M1$

$\Sigma 2^n = 2M1 + M2$

$\Sigma 3^n = 3M1 + 3M2 + 2M3$

$\Sigma 4^n = 4M1 + 6M2 + 8M3 + 6M4$

$\Sigma 5^n = 5M1 + 10M2 + 20M3 + 30M4 + 24M5$

$\Sigma 6^n = 6M1 + 15M2 + 40M3 + 90M4 + 144M5 + 120M6$

$\Sigma 7^n = 7M1 + 21M2 + 70M3 + 210M4 + 504M5 + 840M6 + 720M7$

etc etc etc etc etc etc

und überhaupt

$$\Sigma y^n = \Sigma y^{m-1} = yM1 + \frac{y(y-1)}{2} M2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3} M3 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4} M4 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}{5} M5 + \ldots + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-p+1)}{p} MP \ldots + (y-1)(y-2)(y-3)\ldots 3.2.1\, MY$$

23. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP beſteht, iſt wieder

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots 3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ 1^\beta 2^\gamma 6^\delta \text{etc}}; \quad \begin{pmatrix} \beta + 2\gamma + 3\delta + \text{etc} = m \\ \beta + \gamma + \delta + \text{etc} = p \end{pmatrix}$$

Dieſer, mit

$$\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-p+1)}{p} \text{ oder } \frac{y'}{p(y-p)(y-p-1)\ldots 3.2.1}$$

oder $\frac{y'}{(y-\alpha)\alpha'}$ multiplicirt, giebt

$$\frac{m'.\ y'}{(y-\alpha)\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\ \text{etc}\ \ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\ \text{etc}}$$

Die Summe dieser Produkte ist Σy^{m-1}.

Der hier gegebene allgemeine Ausdruck für y^n, wobey beyde, sowohl y als n, als veränderliche Größen angesehen werden können, ist für die Fortschritte der Wissenschaft deswegen wichtig, weil durch ihn die veränderliche Größe, die so viele Schwierigkeit macht, wenn sie als Exponent vorkömmt, aus demselben ganz oder zum Theil weggeschafft, und unter die Coefficienten versetzt wird. Die Sache ist um so viel unerwarteter, da der einzige, einigermaßen hieher gehörige Ausdruck von y^n, den die höhere Analysis bisher gelehrt hat, Erstens, die Kenntnis der Basis des hyperbolischen Logarithmen-Systems voraussetzt: sodann, derselbe Ausdruck eine unendliche Reihe ist, und alle Beschwerden unendlicher Reihen mit sich führt; und drittens derselbe Ausdruck nur in den allerwenigsten Fällen, und nur alsdann brauchbar ist, wenn der Exponent einen Bruch, kleiner als die Einheit, vorstellt, indem in allen andern Fällen die Reihe mehr oder weniger divergirt.

Von so erheblichen Vorzügen und Folgen ist die combinatorische Auflösung dieser Aufgabe vor andern nicht-combinatorischen!

Schlußerinnerung des Herausgebers.

1. Von den Potenzsummen der Zahlen 1, 2, 3 .... nach der Ordnung, hat unter andern Euler in seinen Institt. Calc. Differ. ausführlich gehandelt, und (Vol. I. art. 61, 62 und Vol. II. art. 132) zwey Formeln, für

$$S\,x^n = 1+2^n+3^n+4^n+5^n \ldots +x^n$$

für die Summe nähmlich der Potenzen n der natürlichen Zahlen von 1 bis x, inclusive, gegeben. Wie dabey die

Bernoullischen Zahlen, $\frac{1}{6} = A$; $\frac{1}{30} = B$; $\frac{1}{42} = C$; u. s. w. und die Binomialcoefficienten, ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{C}$, ${}^{n}\mathfrak{E}$ ... concurriren, erhellet sehr deutlich aus der zweyten Formel, nach welcher, die beyderley Zeichen darinn substituirt,

$$Sx^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{A \cdot {}^{n}\mathfrak{A}}{2} x^{n-1} + \frac{B \cdot {}^{n}\mathfrak{C}}{4} x^{n-3} + \frac{C \cdot {}^{n}\mathfrak{E}}{6} x^{n-5} - \frac{D \cdot {}^{n}\mathfrak{G}}{8} x^{n-7}$$

u. s. w.

wo, vom dritten Gliede an, die Bernoullischen Zahlen nach der Ordnung, die Binomialcoefficienten aber (so wie die Divisoren und die Exponenten von x) sprungweise fortgehen. Die Werthe der Bernoullischen Zahlen A, B, C, D .... bis mit der achtzehnden S, findet man auch hier (S. 336, 337) von Herrn Prof. Rothe berechnet angegeben.

2. Da die Binomialcoefficienten an sich combinatorischer Herkunft sind, auch die Bernoullischen Zahlen, sowohl durcheinander als unabhängig von einander, combinatorisch sich darstellen lassen, so leuchtet es deutlich ein, daß auch jene Potenzsumme $1 + 2^n + 3^n$ .... auf combinatorischem Wege sich finden und bestimmen lassen müsse. Dies war, wie auch die Ueberschrift (S. 353) aussagt, die eigentliche Absicht, der nächste Zweck, der vorstehenden Untersuchung. Wie sich die Summen der Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis $m-1$ inclusive, durch Summen der Potenzen eben dieser Zahlen ausdrücken lassen, davon in der Analyse des facultés numériques, art. 165 (Anal. des Refr. p. 96).

3. Ebendaſelbſt (p. 71-73) wird die Aufgabe (art. 91) zu unmittelbarer Beſtimmung der Summen ſolcher Producte vorgelegt, mit Beyfügung zweyer Auflöſungsformeln (art. 92 und 94) in Form von Lehnſätzen. Wegen des Beweiſes der erſten Formel bezieht ſich Herr K. (art. 96) auf meine erſte Sammlung c. a. Abhandlungen S. 110, 111) und wegen der zweyten Formel auf einen andern mir überſchickten Aufſatz. Was darüm dieſe Formel betrifft, hier beyzubringen, würde zu weitläuftig ſeyn. Alſo davon ein andermal im mathematiſchen Archive.

4. Mit dem Aufſatze XIII über die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen (S. 353), war ein anderer über die Fakultäten der Zahlen verbunden, von welchem ich auch einen Auszug im mathematiſchen Archive (Heft V. S. 109-112) gegeben habe. Der Aufſatz ſelbſt kann hier nicht nachgeliefert werden. Zu der Zeit, wo er geſchrieben war, entſprach er ſehr gut der Abſicht, was die Sache ſey, in der Kürze zu zeigen. Seitdem hat ſich Alles, Zeichnung, Inhalt und Vortrag, ſehr vervollkommt, und man iſt nun in den Stand geſetzt, unmittelbar aus der Hauptquelle zu ſchöpfen.

5. Unſtreitig dürfte es für mehrere Leſer intereſſant und belehrend ſeyn, eine vergleichende Darſtellung, Entwickelung und Reduction der beyderley combinatoriſchen Formeln, der Krampiſchen und der meinigen, hier vorzulegen. So nahe aber auch die Veranlaſſung, und ſo ſchicklich der Ort hier dazu iſt, ſo würde mich doch die Ausführung der Sache zu weit über die Gränzen hinausführen, die dieſer zweyten Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen beſtimmt ſind.

Verbeſſerungen und Druckfehler.

Seite 57 Zeile 7 ſtatt bekännt leſe man bekannt
S. 95 III. Z. 17 nach den Worten „zur Linken;“ ſetze man: dann eine 3 nebſt einer 2 und den übrigen Einheiten;
S. 100 Z. 6 ſt. S. 60, l. (hier S. 60,
S. 120 Z. 13 ſt. $C^{(s)}$ l. $C^{(8)}$
S. 166 Z. 4 und 6 ſt. $e^{\pm x\sqrt{r-1}}$ l. $e^{\pm x\sqrt{r-1}}$
Ebend. Z. 7. nach $P^4x(n-3)$ ſtatt + . . . l. $\pm \ldots$
S. 175 Z. 3 von unten, ſt. $(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}$ im Nenner des Bruchs iſt zu leſen $(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}$, auch ſteht der ganze Bruch etwas zu hoch.
S. 187 Z. 8 von unten, ſt. $eq-1$ l. e^q-1
S. 222 Z. 7 ſt. $\frac{d.\varphi X.}{dx}\,\frac{dX}{dX}$ l. $\frac{d.\varphi X.}{dX}\,\frac{dX}{dx}$
S. 234 Z. 1 ſt. $x^{(n-1)}r$ l. $x^{(n-1)r}$
S. 307 Z. 8 ſt. (f2+c) l. (f+2c)
S. 308 Z. 8 ſt. (n−1c] l. (n−1)c]
S. 319 Z. 6 von unten, ſt. $-\frac{3}{4}$ l. $-\frac{4}{3}$
S. 395 Z. 4 von unten, ſt. $1050x^5$ l. $1050x$,

höherer Analyſis, voraus. Allein, daß eben jene Coefficienten A, B, C, D etc, auf welchen hier alles beruht, auch unabhängig von der Berechnung der Potenzen, durch die Combinationenlehre allein, gefunden werden können, dies iſt eine neue und für die künftigen Fortſchritte der Wiſſenſchaft wichtige Wahrheit.

16. Dem bisher geſagten zufolge iſt, die noch nie ſummirte Reihe $y^n - \frac{(y-1)}{1}(y-1)^n + \frac{(y-1)(y-2)}{1.2}(y-2)^n - \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3}(y-3)^n + \ldots \pm 1^n$ gleich $1.2.3.4\ldots(y-1)$, multiplicirt mit der Summe aller Produkte $\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots 1}{\beta.\gamma.\delta\,\text{etc}\ldots 1^\beta 2^\gamma 3^\delta 4^\varepsilon\,\text{etc}}$, wobey die beyden Gleichungen

$$\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc} = y$$
$$\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+\text{etc} = n+1$$

zum Grunde gelegt ſind.

17. Und wenn, $n+1 = m$ geſetzt, und dann, wie oben, ein ſolches Integral mit MY bezeichnet wird, wobey ſtatt Y auch die numeriſchen Werthe, die y in beſondern Fällen haben kann, nur zur Deutlichkeit in vergrößerter Form, geſetzt werden können, ſo wird

$$2^n - 1^n = M2$$
$$3^n - 2.2^n + 1^n = 2M3$$
$$4^n - 3.3^n + 3.2^n - 1^n = 6M4$$
$$5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1^n = 24M5$$
$$6^n - 5.5^n + 10.4^n - 10.3^n + 5.2^n - 1^n = 120M6$$
$$7^n - 6.6^n + 15.5^n - 20.4^n + 15.3^n - 6.2^n + 1^n = 720M7$$
$$8^n - 7.7^n + 21.6^n - 35.5^n + 35.4^n - 21.3^n + 7.2^n - 1^n = 5040M8$$
etc etc etc etc etc

18. Die unmittelbare Folge der hier aufgestellten Gleichungen ist folgende Reihe von Wahrheiten:

$1^n = M1$

$2^n = M1 + M2$

$3^n = M1 + 2M2 + 2.1M3$

$4^n = M1 + 3M2 + 3.2M3 + 3.2.1M4$

$5^n = M1 + 4M2 + 4.3M3 + 4.3.2M4 + 4.3.2.1M5$

$6^n = M1 + 5M2 + 5.4M3 + 5.4.3M4 + 5.4.3.2M5 + 5.4.3.2.1\,M6$

$7^n = M1 + 6M2 + 6.5M3 + 6.5\,4M4 + 6.5.4.3M5 + 6.5.4.3.2M6$
$+ 6.5.4.3.2.1\,M7$

etc etc etc etc etc

19. Und überhaupt

$$y^n = M1 + (y-1)\,M2 + (y-1)\,(y-2)\,(y-3)\,M3$$
$$+ (y-1)\,(y-2)\,(y-3)\,(y-4)\,M4 + \ldots$$
$$\ldots + (y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)\,MP + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (y-1)(y-2)\ldots 5.4.3.2.1\,MY.$$

20. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP besteht, ist

$$\frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots 3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}}\ldots\left(\begin{array}{l}\beta+2\gamma+3\delta+\text{etc}=m;\\ \beta+\gamma+\delta+\text{etc}=p;\end{array}\right)$$

Dieser, mit $(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1)$ oder $\dfrac{y'}{y(y-p)(y-p-1)\ldots 3.2.1}$ multiplicirt, und zugleich $y-p$, oder $y-(\beta+\gamma+\delta+\text{etc})=\alpha$ gesetzt, giebt $\dfrac{m'.\,y'}{y.\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}.\,1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{ etc}}$ für den allgemeinen Ausdruck aller der einzelnen Glieder, aus welchen das gesammte combinatorische Integral besteht, das y^n oder y^{m-1} gleich seyn soll. Es ist demnach

$$y^m = \int \frac{m'.\,y'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{ etc }1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{ etc.}}$$

wobey die beyden unbestimmten Gleichungen

$$\beta + 2\gamma + 3\delta + \text{etc} = m$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc} = y$$

zum Grunde liegen.

Beyspiel.

21. Es sey $m = 6$; $y = 10$; die Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon + 5\zeta + 6\eta = 6$ läßt eilf Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen zu; für deren jede der Exponent α, vermöge der zweyten Gleichung $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 10$, und dann auch der Bruch $\frac{m'.\ y'}{\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\varepsilon'.\text{etc}\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\text{etc}}$, seinen besondern Werth erhält, nämlich:

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	Bruch
4	6						151200
5	4	1					453600
6	3	1					100800
6	2	2					226800
7	2		1				10800
7	1	1	1				43200
7		3					540
8	1		1	1			10800
8		2					900
8	1	1					1350
9				1			10
							Summe $= 1000000 = y^m = 10^6$.

22. Die gleich anfangs aufgeworfene Aufgabe, die Summe von $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots + y^m$, durch die Combinationenlehre zu bestimmen, läßt sich, so wie noch unendlich viele andere, vermöge der erst angegebenen allgemeinen Ausdrücke von 1^m, 2^m, 3^m, 4^m etc unmittelbar

auffuchen; und man wird, auf dieſem ganz verſchiedenen Wege, obigen Ausdruck beſtätigt finden. Es iſt nämlich, das lezte Glied y^n mit eingeſchloſſen,

$\Sigma 1^n = M1$

$\Sigma 2^n = 2M1 + M2$

$\Sigma 3^n = 3M1 + 3M2 + 2M3$

$\Sigma 4^n = 4M1 + 6M2 + 8M3 + 6M4$

$\Sigma 5^n = 5M1 + 10M2 + 20M3 + 30M4 + 24M5$

$\Sigma 6^n = 6M1 + 15M2 + 40M3 + 90M4 + 144M5 + 120M6$

$\Sigma 7^n = 7M1 + 21M2 + 70M3 + 210M4 + 504M5 + 840M6 + 720M7$

etc etc etc etc etc etc

und überhaupt

$$\Sigma y^n = \Sigma y^{m-1} = yM1 + \frac{y(y-1)}{2} M2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3} M3 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4} M4 + \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)}{5} M5 + \ldots\ldots \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-p+1)}{p} MP \ldots\ldots + (y-1)(y-2)(y-3)\ldots 3.2.1\, MY$$

23. Der allgemeine Ausdruck aller der einzelnen Glieder, woraus MP beſteht, iſt wieder

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots 3.2.1}{\beta'.\gamma'.\delta'.\text{etc}\ 1^{\beta} 2^{\gamma} 6^{\delta} \text{etc}}; \quad \begin{pmatrix} \beta + 2\gamma + 3\delta + \text{etc} = m \\ \beta + \gamma + \delta + \text{etc} = p \end{pmatrix}$$

Dieſer, mit

$$\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)\ldots(y-p+1)}{p} \quad \text{oder} \quad \frac{y^{\prime}}{p(y-p)(y-p-1)\ldots 3.2.1}$$

oder $\frac{y'}{(y-\alpha)\alpha'}$ multiplicirt, giebt

$$\frac{m'.\ y'}{(y-\alpha)\alpha'.\beta'.\gamma'.\delta'.\ \text{etc}\ 1^{\beta}2^{\gamma}6^{\delta}24^{\varepsilon}\ \text{etc}}$$

Die Summe dieser Produkte ist Σy^{m-1}.

Der hier gegebene allgemeine Ausdruck für y^n, wobey beyde, sowohl y als n, als veränderliche Größen angesehen werden können, ist für die Fortschritte der Wissenschaft deswegen wichtig, weil durch ihn die veränderliche Größe, die so viele Schwierigkeit macht, wenn sie als Exponent vorkömmt, aus demselben ganz oder zum Theil weggeschafft, und unter die Coefficienten versetzt wird. Die Sache ist um so viel unerwarteter, da der einzige, einigermaßen hieher gehörige Ausdruck von y^n, den die höhere Analysis bisher gelehrt hat, Erstens, die Kenntnis der Basis des hyperbolischen Logarithmen-Systems voraussetzt: sodann, derselbe Ausdruck eine unendliche Reihe ist, und alle Beschwerden unendlicher Reihen mit sich führt; und drittens derselbe Ausdruck nur in den allerwenigsten Fällen, nur nur alsdann brauchbar ist, wenn der Exponent einen Bruch, kleiner als die Einheit, vorstellt, indem in allen andern Fällen die Reihe mehr oder weniger divergirt.

Von so erheblichen Vorzügen und Folgen ist die combinatorische Auflösung dieser Aufgabe vor andern nicht-combinatorischen!

Schlußerinnerung des Herausgebers.

1. Von den Potenzsummen der Zahlen 1, 2, 3 .... nach der Ordnung, hat unter andern Euler in seinen Institt. Calc. Differ. ausführlich gehandelt, und (Vol. I. art. 61, 62 und Vol. II. art. 132) zwey Formeln, für

$$S\,x^n = 1+2^n+3^n+4^n+5^n \ldots +x^n$$

für die Summe nähmlich der Potenzen n der natürlichen Zahlen von 1 bis x, inclusive, gegeben. Wie dabey die

Bernoullischen Zahlen, $\frac{1}{6} = A$; $\frac{1}{30} = B$; $\frac{1}{42} = C$; u. s. w. und die Binomialcoefficienten, ${}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\mathfrak{C}$, ${}^{n}\mathfrak{E}$ ... concurriren, erhellet sehr deutlich aus der zweyten Formel, nach welcher, die beyderley Zeichen darinn substituirt,

$$Sx^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{A \cdot {}^{n}\mathfrak{A}}{2} x^{n-1} - \frac{B \cdot {}^{n}\mathfrak{C}}{4} x^{n-3} + \frac{C \cdot {}^{n}\mathfrak{E}}{6} x^{n-5} - \frac{D \cdot {}^{n}\mathfrak{G}}{8} x^{n-7}$$

u. s. w.

wo, vom dritten Gliede an, die Bernoullischen Zahlen nach der Ordnung, die Binomialcoefficienten aber (so wie die Divisoren und die Exponenten von x) sprungweise fortgehen. Die Werthe der Bernoullischen Zahlen A, B, C, D .... bis mit der achtzehnden S, findet man auch hier (S. 336, 337) von Herrn Prof. Rothe berechnet angegeben.

2. Da die Binomialcoefficienten an sich combinatorischer Herkunft sind, auch die Bernoullischen Zahlen, sowohl durcheinander als unabhängig von einander, combinatorisch sich darstellen lassen, so leuchtet es deutlich ein, daß auch jene Potenzsumme $1 + 2^n + 3^n$ .... auf combinatorischem Wege sich finden und bestimmen lassen müsse. Dies war, wie auch die Ueberschrift (S. 353) aussagt, die eigentliche Absicht, der nächste Zweck, der vorstehenden Untersuchung. Wie sich die Summen der Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis $m-1$ inclusive, durch Summen der Potenzen eben dieser Zahlen ausdrücken lassen, davon in der Analyse des facultés numériques, art. 165 (Anal. des Refr. p. 96).

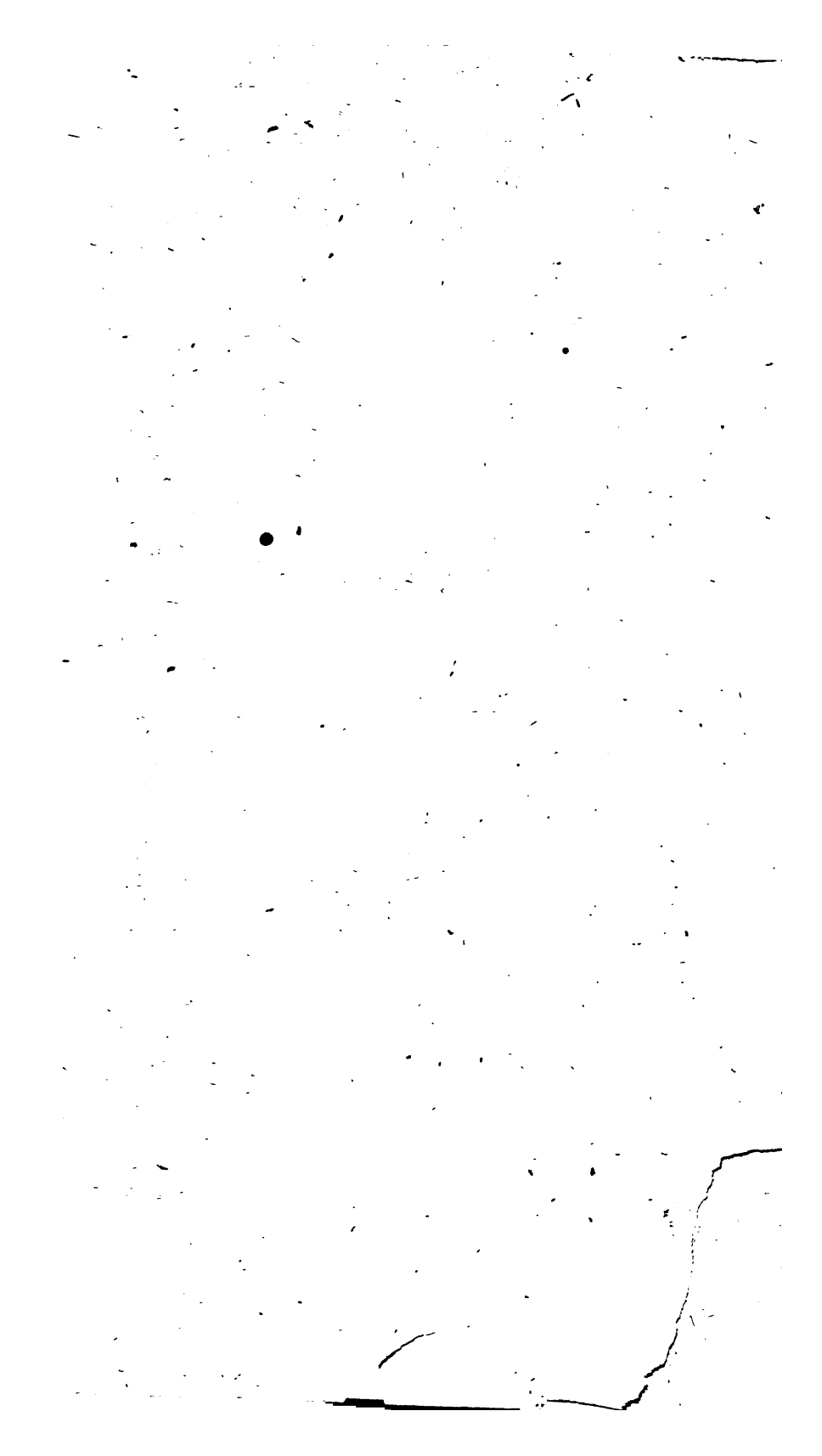
3. Ebendaſelbſt (p. 71-73) wird die Aufgabe (art. 91) zu unmittelbarer Beſtimmung der Summen ſolcher Producte vorgelegt, mit Beyfügung zweyer Auflöſungsformeln (art. 92 und 94) in Form von Lehnſätzen. Wegen des Beweiſes der erſten Formel bezieht ſich Herr K. (art. 96) auf meine erſte Sammlung c. a. Abhandlungen S. 110, 111) und wegen der zweyten Formel auf einen andern mir überſchickten Aufſatz. Was darum dieſe Formel betrifft, hier beyzubringen, würde zu weitläuftig ſeyn. Alſo davon ein andermal im mathematiſchen Archive.

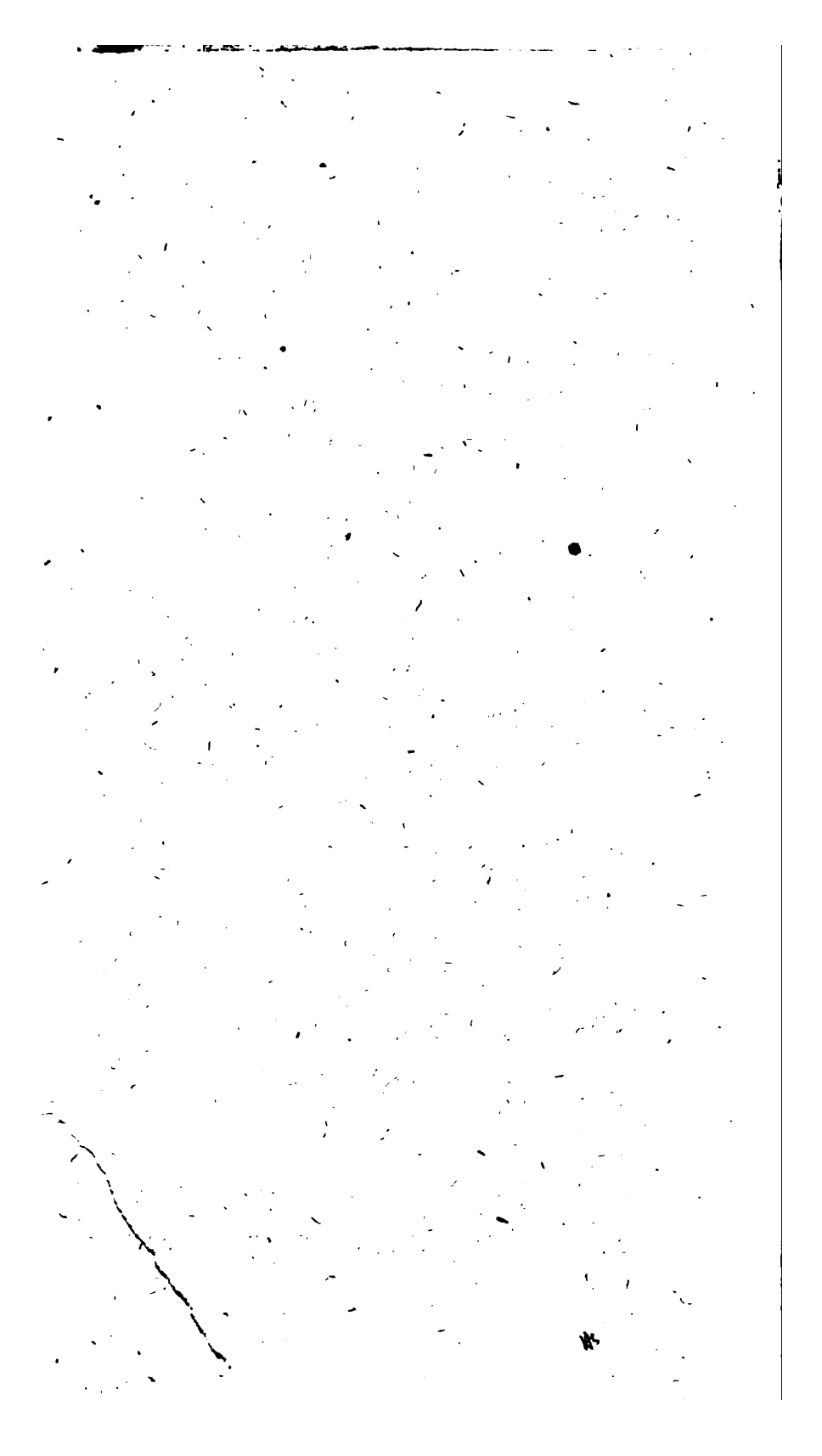
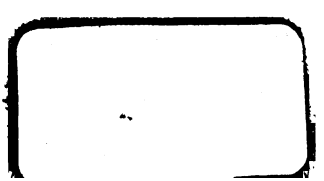
4. Mit dem Aufſatze XIII über die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen (S. 353), war ein anderer über die Fakultäten der Zahlen verbunden, von welchem ich auch einen Auszug im mathematiſchen Archive (Heft V. S. 109-112) gegeben habe. Der Aufſatz ſelbſt kann hier nicht nachgeliefert werden. Zu der Zeit, wo er geſchrieben war, entſprach er ſehr gut der Abſicht, was die Sache ſey, in der Kürze zu zeigen. Seitdem hat ſich Alles, Zeichnung, Inhalt und Vortrag, ſehr vervollkommt, und man iſt nun in den Stand geſetzt, unmittelbar aus der Hauptquelle zu ſchöpfen.

5. Unſtreitig dürfte es für mehrere Leſer intereſſant und belehrend ſeyn, eine vergleichende Darſtellung, Entwicklung und Reduction der beyderley combinatoriſchen Formeln, der Krampiſchen und der meinigen, hier vorzulegen. So nahe aber auch die Veranlaſſung, und ſo ſchicklich der Ort hier dazu iſt, ſo würde mich doch die Ausführung der Sache zu weit über die Gränzen hinausführen, die dieſer zweyten Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen beſtimmt ſind.

Verbeſſerungen und Druckfehler.

Seite 57 Zeile 7 ſtatt bekännt leſe man bekannt
S. 95 III. Z. 17 nach den Worten „zur Linken;“ ſetze man: dann eine 3 nebſt einer 2 und den übrigen Einheiten;
S. 100 Z. 6 ſt. S. 60, l. (hier S. 60,
S. 120 Z. 13 ſt. $C^{(s)}$ l. $C^{(8)}$
S. 166 Z. 4 und 6 ſt. $e^{\pm x\sqrt{-1}}$ l. $e^{\pm x\sqrt{-1}}$
Ebend. Z. 7. nach $P^4x(n-3)$ ſtatt + . . . l. $\pm \dots$
S. 175 Z. 3 von unten, ſt. $(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}$ im Nenner des Bruchs iſt zu leſen $(1-x^2)^{\frac{2r+1}{2}}$, auch ſteht der ganze Bruch etwas zu hoch.
S. 187 Z. 8 von unten, ſt. $eq-1$ l. ε^q-1
S. 222 Z. 7 ſt. $\frac{d.\varphi X.}{dx}\ \frac{dX}{dX}$ l. $\frac{d.\varphi X.}{dX}\ \frac{dX}{dx}$
S. 234 Z. 1 ſt. $x^{(n-1)r}$ l. $x^{(n-1)r}$
S. 307 Z. 8 ſt. (f2+c) l. (f+2c)
S. 308 Z. 8 ſt. (n−1c] l. (n−1) c]
S. 319 Z. 6 von unten, ſt. $-\frac{3}{4}$ l. $-\frac{4}{3}$
S. 395 Z. 4 von unten, ſt. $1050x^5$ l. $1050x$,





SEP 24 1930